LNCC
www.lncc.br
Laboratório Nacional de Computação Científica
Ministério da Ciência e Tecnologia
BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL
Av. Getúlio Vargas 333, Quitandinha, Petrópolis, RJ - CEP 25651-075

PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

GA-038 Processamento Digital de Sinais

Quinta Lista de Exercícios

(**Prazo de entrega: dia 4 de setembro)**

Exercício 1

Um processo ideal de amostragem do sinal de tempo-contínuo $x_c(t) = \cos(6000\pi t)$, no qual se emprega período de amostragem T, produz o sinal em tempo discreto:

$$x[n] = \cos\left[\frac{\pi n}{3}\right].$$

a) Determine um valor de T que seja consistente com a informação fornecida no problema;

b) A escolha de T é única? Justifique.

Exercício 2

O sinal de tempo-contínuo $x_c(t) = \cos(2000\pi t)$ é idealmente amostrado (em três ocasiões distintas) com os períodos de amostragem: $T_1 = 4000$ Hz, $T_2 = 3000$ Hz e $T_3 = 1500$ Hz. Os sinais discretos resultantes são, respectivamente, $x_1[n]$, $x_2[n]$ e $x_3[n]$.

a) Esboce a magnitude do espectro de Fourier $\left|X_i\left(e^{j\omega}\right)\right|$ de cada $x_i[n]$, no intervalo $-4\pi < \omega < 4\pi$.

b) Suponha que cada sinal discreto $x_i[n]$ seja submetido a um conversor digital-analógico ideal. Quais seriam os sinais analógicos correspondentes? Justifique.

c) Suponha que, antes de passarem pelo conversor digital-analógico ideal, os sinais discretos sejam decimados por 2, i.e., $\tilde{x}_i[n] = x_i[2n]$. Quais dos três sinais discretos decimados ainda conteriam a mesma informação de $x_c(t)$ após a conversão para o domínio analógico (tempo contínuo)? Justifique.

Exercício 3

Deseja-se processar o sinal de tempo-contínuo $x(t) = 3\cos(2000\pi t) + 7\text{sen}(2200\pi t)$ usando um sistema em tempo-discreto. Para tal, $x(t)$ é amostrado idealmente a 4000 amostras por segundo para gerar o sinal discreto $x[n]$. O processamento efetuado no tempo discreto é regido pela seguinte equação de diferenças:

$$y[n] = x[n] + x[n-2].$$

a) Esboce o espectro de magnitude $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$ do sistema que representa o processamento discreto realizado.

b) Suponha que $y[n]$ seja submetido a um conversor digital-analógico ideal. Determine uma expressão para $y(t)$.

c) Discuta o efeito do processamento efetuado sobre o sinal de entrada $x(t)$.

Exercício 4

Deseja-se implementar através de um sistema discreto no tempo o seguinte sistema analógico (de tempo contínuo): $y(t) = x^2(t)$. No mais, sabe-se que $x(t)$ é real e seu espectro é nulo para $|f_c| > 4$ kHz. Projete tal sistema, considerando como **ideais** todos os seus possíveis elementos constituintes, i.e., conversor analógico-digital, filtro anti-*aliasing*, filtro de reconstrução, conversor digital-analógico, etc. Justifique as suas escolhas de projeto.

Exercício 5

Durante a produção de um documentário, técnicos de uma produtora de vídeo desejam "mixar" (somar) a voz de um narrador com um tema musical de fundo. Ambos os sinais já estão disponíveis na forma de seqüências discretas no tempo, sendo o sinal de voz amostrado a 16 kHz e o do fundo musical a 48 kHz. No mais, deseja-se que o sinal "mixado" resultante seja disponibilizado como uma seqüência discreta com 24 mil amostras por segundo. Projete um sistema discreto que realize adequadamente[1] a tarefa em questão. Considere como ideais os sistemas (filtros) seletivos possivelmente necessários para a implementação do sistema. Justifique suas escolhas de projeto.

[1] Por adequadamente entende-se: sem criar distorções e/ou infligir perdas desnecessárias aos sinais em questão.

Exercício 6

Deseja-se computar a saída $y[n]$ de um sistema $h[n]$, LTI FIR de quarta ordem, para uma dada entrada $x[n]$, i.e., obter $y[n] = (h * x)[n]$. Suponha que $x[n]$ tenha suporte temporal finito e contenha 16 amostras.

a) Descreva um procedimento que permita calcular $y[n]$ através de DFTs e IDFTs das seqüências envolvidas. Justifique sua resposta.
b) Suponha que, por uma limitação de recursos computacionais, só lhe seja permitido usar no procedimento acima duas DFTs de 16 pontos e uma IDFT de 16 pontos. Discuta o efeito dessa restrição sobre o resultado $y[n]$. Justifique sua resposta.

Exercício 7

Suponha um problema similar ao exercício 6, i.e., obter $y[n] = (h * x)[n]$, no qual $h[n]$ e $x[n]$ tenham, respectivamente, 256 e 4096 amostras. No mais, considere que, por uma limitação de recursos computacionais, só lhe seja permitido usar DFTs (e IDFTs) de 512 pontos.

a) Qual o número mínimo de DFTs e IDFTs necessárias para obter $y[n]$ usando o método *overlap-and-add* de convolução por blocos? Justifique.
b) Qual o número mínimo de DFTs e IDFTs necessárias para obter $y[n]$ usando o método *overlap-and-save* de convolução por blocos? Justifique.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

QUINTA Lista de Exercícios

(**Prazo de entrega: dia 14 de dezembro de 2009)**

Indique a linha de raciocínio pela qual chegou às soluções e embase as suas respostas com argumentações e justificativas adequadas.

Exercício 1

Deseja-se amostrar o sinal de tempo-contínuo $x(t) = \cos(2000\pi t)$ por meio de um conversor analógico-digital (A/D) ideal, com freqüência de amostragem ajustável $f_{s,i}$, dada em Hz. No mais, o processo de amostragem não inclui filtro anti-*aliasing*.

a) Determine expressões algébricas para os sinais discretos $x_i[n]$ resultantes do processo de amostragem em 5 situações distintas: $f_{s,1} = 10$ kHz; $f_{s,2} = 6$ kHz; $f_{s,3} = 2$ kHz; $f_{s,4} = 1{,}2$ kHz; e $f_{s,5} = \frac{6}{7}$ kHz;

b) Para os cinco casos do item anterior, plote $x_i[n]$ para $0 \leq n \leq 10$. Critique os resultados observados à luz do teorema da amostragem.

c) Encontre expressões algébricas para sinais de tempo-contínuo $x_{r,i}(t)$, reconstruídos através submissão de $x_i[n]$ a um D/A ideal com freqüência de operação ajustável $f_{o,i}$, cujos valores são feitos idênticos aos do A/D, quando da obtenção de $x_i[n]$, i.e., $f_{o,i} = f_{s,i}$.

d) Considerando a seqüência $x_5[n]$ (sem se saber como foi obtida), é possível ajustar uma freqüência de operação para o D/A ideal de modo a obter $x_{r,5}(t) = x(t)$?

Exercício 2

Suponha um sinal de tempo-contínuo $x(t)$ cujo espectro de Fourier tenha magnitude dada por

$$|X(j\Omega)| = \begin{cases} 1 - \frac{10|\Omega|}{11\Omega_c}, & \text{se } |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0 \quad\quad\quad\;\;, & \text{se } |\Omega| > \Omega_c \end{cases} \text{, com } \Omega_c = 500\pi \ \text{rad/s}.$$

Sabe-se que se a discretização temporal $x(t)$ for feita com freqüência de amostragem $f_s > f_{mín}$ o critério de Nyquist é atendido. Considere que o processo de amostragem é realizado por um A/D ideal, sem filtro anti-*aliasing*.

a) Determine o valor de $f_{mín}$.

b) Para $f_s = (r + 0{,}05)f_{mín}$ e $r \in \{1,2,3\}$, esboce o espectro de Fourier de $x_r[n] = x\left(\frac{n}{f_s}\right)$, i.e., $X_r(e^{j\omega})$, no intervalo $-4\pi \leq \omega \leq 4\pi$.

c) Suponha $\hat{x}_r(t)$ represente o sinal de tempo contínuo reconstruído a partir da seqüência $x_r[n]$, via um D/A ideal, cuja freqüência de operação seja fixa e igual a $f_o = 525$ Hz. Para os $x_r[n]$ obtidos no item anterior, esboce a magnitude dos espectros de Fourier de $\hat{x}_r(t)$, i.e., $\hat{X}_r(j\Omega)$.

d) Considere que, antes de passarem por um D/A ideal, os sinais discretos $x_r[n]$ (do item b) sejam decimados por 3, i.e., $x_r^{d}[n] = x_r[3n]$. Quais dentre os três sinais discretos decimados ainda contêm a mesma informação de $x(t)$, após a conversão para o domínio analógico (tempo contínuo) via um D/A ideal? Em cada caso, qual deve ser a freqüência de operação do D/A?

Exercício 3

Deseja-se processar o sinal de tempo-contínuo

$$x(t) = \sum_{k=0}^{4} \frac{k+1}{4} \cos(200k\pi t)$$

usando um sistema em tempo-discreto. Para tal, $x(t)$ é amostrado idealmente a 1000 amostras por segundo para gerar o sinal discreto $x[n]$. O processamento efetuado no tempo discreto é realizado por um sistema discreto causal, cuja função de transferência é dada por:

$$H(z) = 1 - z^{-5}.$$

a) Esboce o espectro de magnitude $|H(e^{j\omega})|$ do sistema discreto.

b) Suponha que a saída $y[n] = (x * h)[n]$ do sistema discreto seja submetida a um conversor digital-analógico ideal, com freqüência de operação igual ao do A/D. Determine uma expressão algébrica para $y(t)$.

c) Discuta o efeito de toda a cadeia de processamento (A/D, DSP e D/A) sobre o sinal de entrada $x(t)$.

d) Suponha que, por uma limitação de recursos técnicos, só se disponha de um D/A ideal que opera somente com a metade da freqüência de amostragem do A/D. Proponha uma modificação no estágio de processamento discreto de modo minimizar os efeitos da restrição operacional do D/A sobre a saída $y(t)$.

Exercício 4

Deseja-se implementar através de um sistema discreto no tempo o seguinte sistema analógico (de tempo contínuo): $y(t) = x(3t)$. No mais, sabe-se que $x(t)$ é real e seu espectro é nulo para $|f_c| > 1$ kHz. Especifique a cadeia de processamento necessária para realizar tal objetivo. Considere como **ideais** todos os seus possíveis elementos constituintes, i.e., conversor analógico-digital, filtro anti-*aliasing*, filtro de reconstrução, conversor digital-analógico, etc. Justifique as suas escolhas de projeto.

Exercício 5

Sabe-se que o sinal real de tempo-contínuo que representa a evolução temporal de certa grandeza associada a um dado fenômeno físico só contém informação de interesse até 0,08 Hz. Um pesquisador A, ciente das características do fenômeno em questão, toma medidas da grandeza a cada 2 segundos. Um segundo investigador B, realiza outro conjunto de medidas da mesma grandeza física associada ao mesmo fenômeno. Entretanto, por uma limitação de recursos de *hardware*, só é capaz de realizar medidas a cada 5 segundos. Um pesquisador C, que também mediu a grandeza em questão, mas a cada 3 segundos, deseja confrontar seus dados com aqueles disponibilizados pelos pesquisadores A e B.

Sabendo que, nos três casos acima, o procedimento de medição (discretização temporal) da grandeza foi realizado corretamente, especifique os sistemas discretos de mudança de taxa de amostragem que permitam ao pesquisador C realizar corretamente a tarefa demandada. Para fins de projeto, considere como ideais todos os sub-sistemas constituintes necessários, e.g. filtros seletivos.

Exercício 6

A função de auto-correlação de uma seqüência determinística $x[n]$ de valores reais é definida por

$$r[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x[n+m].$$

Suponha que $x[n]$ seja uma seqüência de suporte temporal finito com valores possivelmente não-nulos para $0 \leq n \leq 8$. Nesse caso, pode-se mostrar que só é necessário computar $r[m]$ na faixa $-8 \leq m \leq 8$.

a) Descreva um procedimento que permita calcular $r[m]$ através de DFTs e IDFTs das seqüências envolvidas. Sugestão: re-escreva $r[m]$ como uma convolução linear entre $x[n]$ e uma versão modificada de $x[n]$.

b) Qual o número mínimo de DFTs e IDFTs necessárias para computar $r[m]$?

c) Suponha que, por uma limitação de recursos computacionais, só lhe seja permitido usar no procedimento acima apenas uma DFT de 15 pontos e apenas uma IDFT de 15 pontos. Discuta o efeito dessa restrição sobre o resultado observado em $r[m]$.

Exercício 7

Deseja-se obter a saída de um sistema linear, i.e., obter $y[n] = (h * x)[n]$, sendo que a resposta impulsiva $h[n]$ e a entrada $x[n]$ têm, respectivamente, 100 e 4130 amostras. No mais, considere que, por uma limitação de recursos computacionais, só lhe seja permitido usar DFTs (e IDFTs) de tamanho fixo $N = 512$ pontos.

a) Qual o número mínimo de DFTs e IDFTs necessárias para obter $y[n]$ usando o método *overlap-and-add* de convolução por blocos?

b) Qual o número mínimo de DFTs e IDFTs necessárias para obter $y[n]$ usando o método *overlap-and-save* de convolução por blocos?

LNCC
www.lncc.br
Laboratório Nacional de Computação Científica

Ministério da Ciência e Tecnologia
BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Av. Getúlio Vargas 333, Quitandinha, Petrópolis, RJ - CEP 25651-075

PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

FIFTH List of Exercises

(**Deadline: 14th of December, 2009 – early morning)**

Indicate the rationale behind your proposed solutions. Moreover, always justify your answers.

Question 1

One wants to sample the continuous-time signal $x(t) = \cos(2000\pi t)$ via an ideal analog-to-digital (A/D) converter, with adjustable sampling frequency $f_{s,i}$, given in Hz. Furthermore, anti-aliasing filtering is absent in the sampling process.

a) Determine algebraic expressions for the discrete signals $x_i[n]$ that result from the sampling process in 5 distinct situations: $f_{s,1} = 10$ kHz; $f_{s,2} = 6$ kHz; $f_{s,3} = 2$ kHz; $f_{s,4} = 1{,}2$ kHz; and $f_{s,5} = \frac{6}{7}$ kHz;

b) For the 5 cases of the previous item, plot $x_i[n]$ for $0 \le n \le 10$. Discuss the observed results in light of the Sampling Theorem.

c) Find algebraic expressions for the continuous-time signals $x_{r,i}(t)$, which are reconstructed by means of submitting $x_i[n]$ to an ideal digital-to-analog (D/A) converter, with adjustable operating frequency $f_{o,i}$, whose values are made identical to those of the A/D, when $x_i[n]$ were obtained, i.e., $f_{o,i} = f_{s,i}$.

d) Consider the sequence $x_5[n]$, but without knowledge of how it was obtained. Is it possible to set an operating frequency for the D/A such that $x_{r,5}(t) = x(t)$?

Question 2

Consider the continuous-time signal $x(t)$ whose Fourier spectrum has magnitude given by

$$|X(j\Omega)| = \begin{cases} 1 - \frac{10|\Omega|}{11\Omega_c}, & \text{se } |\Omega| \le \Omega_c \\ 0 \qquad\quad , & \text{se } |\Omega| > \Omega_c \end{cases} \text{, com } \Omega_c = 500\pi \text{ rad/s.}$$

It is known that when the temporal discretization of $x(t)$ is carried out with sampling frequency $f_s > f_{mín}$, the Nyquist criterion is met. Moreover, assume that anti-aliasing pre-filtering is absent in the ideal sampling process.

a) Determine the value of $f_{mín}$.

b) For $f_s = (r + 0{,}05)f_{mín}$ and $r \in \{1,2,3\}$, sketch the magnitude of the Fourier spectrum of $x_r[n] = x\left(\frac{n}{f_s}\right)$, i.e., $X_r(e^{j\omega})$, in the interval $-4\pi \le \omega \le 4\pi$.

c) Suppose $\hat{x}_r(t)$ represents a continuous-time signal reconstructed from sequence $x_r[n]$, via an ideal D/A ideal, whose fixed operating frequency is $f_o = 525$ Hz. For the 3 sequences $x_r[n]$ obtained in the previous item, sketch the magnitude of the Fourier spectra of $\hat{x}_r(t)$, i.e., $\hat{X}_r(j\Omega)$.

d) Suppose that, before the ideal D/A conversion, the discrete signals $x_r[n]$ (from item b) be decimated by 3, i.e., $x_r^d[n] = x_r[3n]$. Which among these three decimated sequences $x_r^d[n]$, after being properly converted back to the continuous-time domain, still contain the same information of $x(t)$? In each case, what operating frequency should be set to the D/A?

Question 3

One wants to process the continuous-time signal

$$x(t) = \sum_{k=0}^{4} \frac{k+1}{4} \cos(200k\pi t)$$

through a discrete-time system. For that, $x(t)$ is ideally sampled at 1000 samples per second in order to yield the sequence $x[n]$. The discrete-time processing is performed by a causal discrete-time system whose transfer function is given by

$$H(z) = 1 - z^{-5}.$$

a) Sketch the magnitude spectrum $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$ of the system.

b) Consider that the system's output $y[n] = (x * h)[n]$ be submitted to an ideal D/A, with operating frequency equal to that of the A/D. Find an algebraic expression for $y(t)$.

c) Discuss the effect of the whole processing chain (A/D, DSP, and D/A) on the input signal $x(t)$.

d) Imagine that, due to technical restrictions, one can only use an ideal D/A that operates at half the sampling frequency of the A/D. Propose a modification to the discrete-time processing stage so as to minimize the effects of the operational restriction of the D/A on the output $y(t)$.

Question 4

You have been given the task to implement the analog system (continuous-time): $y(t) = x(3t)$ using discrete signal processing means. In addition, it is known that $x(t)$ is real-valued and its spectrum is null for $|f_c| > 1$ kHz. Specify the necessary processing chain to accomplish the desired task. For that, consider as ideal all possible constituent sub-systems, i.e., A/D, D/A, anti-aliasing and reconstruction filters. Justify your design choices.

Question 5

It is known that the continuous-time real-valued signal, which represents the temporal evolution of a given scalar variable associated with a certain physical phenomenon, only contains information of interest up to 0,08 Hz. A researcher A, aware of the characteristics of the phenomenon in question, takes measures (samples) of the variable at every two seconds. A researcher B obtains another set of measures of the same physical variable associated with the same phenomenon. However, due to hardware constraints, he can only take measures at each five seconds. A third researcher C, who has also measured the same variable in question, but at every 3 seconds, wants to confront his data with those obtained and made available by researchers A and B.

Knowing that, in all three cases above, the measurement procedures (time discretization) have been properly performed, specify the discrete-time systems for sampling rate conversion that allow researcher C to accomplish his goal adequately. For design purposes, consider as ideal all necessary sub-systems, e.g., selective filters, that may compose the whole processing chain.

Question 6

The auto-correlation function of real-valued deterministic sequence $x[n]$ is defined by

$$r[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x[n+m].$$

Assume that $x[n]$ is non-null only within the finite temporal support $0 \le n \le 8$. In this case, one can show that it is only necessary to compute $r[m]$ within the range $-8 \le m \le 8$.

a) Describe a procedure that allows calculating $r[m]$ by means of DFTs and IDFTs of the sequences in question. Suggestion: re-write $r[m]$ as a linear convolution between $x[n]$ and modified version of it.

b) What is the minimum number of DFTs and IDFTs needed to compute $r[m]$?

c) Suppose that, owing to a hardware constraint, one can only use just one 15-point DFT and just one 15-point IDFT in the preceding task. Discuss the effect of such restriction on the resulting $r[m]$.

Question 7

One wants to compute the output of a linear system, i.e., obtain $y[n] = (h * x)[n]$, in a situation where the impulse response $h[n]$ and the input $x[n]$ have, respectively, 100 and 4130 samples. Moreover, consider that, due to hardware limitations, only DFTs and IDFTs of fixed length $N = 512$ points can be employed.

a) What is the minimum number of DFTs and IDFTs needed to obtain $y[n]$ if the *overlap-and-add* method for block convolution is used?

b) What is the minimum number of DFTs and IDFTs needed to obtain $y[n]$ if the *overlap-and-save* method for block convolution is used?

PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

GA-038 Processamento Digital de Sinais

Quinta Lista de Exercícios

(Prazo de entrega: dia 02 de junho de 2010)

Indique a linha de raciocínio pela qual chegou às soluções e embase as suas respostas com argumentações e justificativas adequadas.

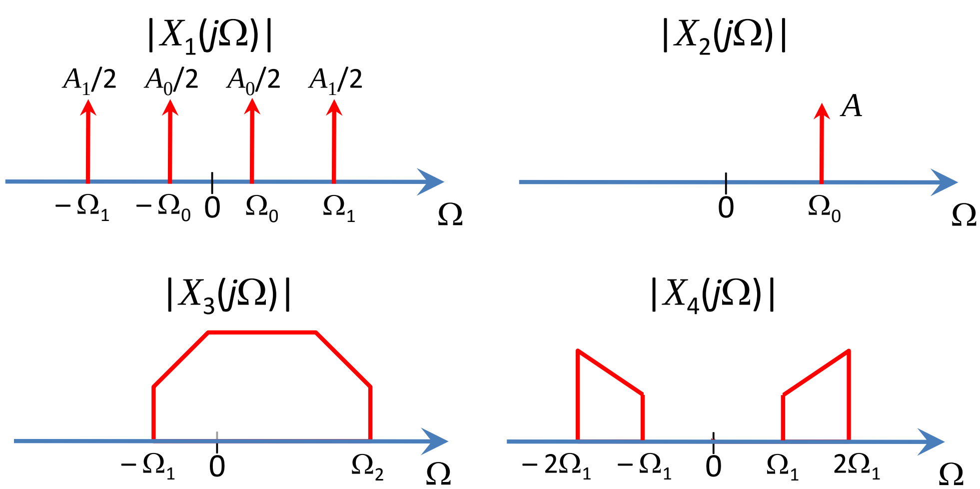
EXERCÍCIO 1

Sabe-se que a amostragem ideal de um sinal de tempo contínuo $x(t)$, feita com freqüência de amostragem $f_s = 1$ kHz, resulta na seqüência $x[n] = \cos\left[\frac{\pi}{3}n\right]$.

a) Suponha que o critério de Nyquist tenha sido respeitado durante a amostragem: determine uma expressão algébrica para $x(t)$;
b) Suponha que o critério de Nyquist possa ser desrespeitado durante a amostragem: determine todos os sinais $x(t)$ que, quando amostrados com $f_s = 1$ kHz, podem produzir $x[n] = \cos\left[\frac{\pi}{3}n\right]$;
c) Suponha que o $x(t)$ encontrado no item (a) seja amostrado com $f_s = \frac{1}{7}$ kHz.
   i. Obtenha o $x[n]$ correspondente;
   ii. Obtenha o sinal $x_r(t)$ reconstruído a partir do $x[n]$ do item anterior, através de um D/A ideal com freqüência de reconstrução $f_r = 1$ kHz;
   iii. Os resultados acima implicam uma violação do Teorema da Amostragem?

EXERCÍCIO 2

Considere os sinais de tempo contínuo $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ e $x_4(t)$, cujos espectros de magnitude são mostrados abaixo. No mais, assuma que $|X_3(j\Omega)| \neq 0$ para $-\Omega_1 < \Omega < \Omega_2$ e que $|X_4(j\Omega)| \neq 0$ para $\Omega_1 < |\Omega| < 2\Omega_1$.



Para cada sinal, determine a menor freqüência de amostragem Ω_s que satisfaz o critério de Nyquist.

EXERCÍCIO 3

Deseja-se utilizar um sistema em tempo-discreto processar o sinal de tempo-contínuo

$$x(t) = 4 + 3\cos\left(4000\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos(2000\pi t) + \cos\left(4800\pi t + \frac{\pi}{10}\right).$$

Para realizar amostragem em conformidade com o critério de Nyquist, um projetista escolhe um A/D ideal que amostra $x(t)$ a 8000 amostras por segundo, de modo a obter a seqüência $x[n]$. O processamento efetuado no tempo discreto é realizado por um sistema discreto causal cuja função de transferência é dada por $H(z) = \frac{1-z^{-4}}{2}$.

a) Obtenha a seqüência $x[n]$ que resulta da amostragem de $x(t)$;
b) Considerando que $x[n]$ é nulo para $n < 0$, obtenha $y[n] = (x * h)[n]$;
c) Determine o sinal $y(t)$ reconstruído a partir de $y[n]$ através de um D/A ideal com freqüência de reconstrução $f_\mathrm{r} = f_\mathrm{s}$, onde f_s é a freqüência de amostragem do A/D;
d) Suponha que, devido a uma limitação de *hardware*, só se disponha de um D/A que opere com $f_\mathrm{r} = \frac{f_\mathrm{s}}{2}$. Visando a remediar a situação e a obter a melhor aproximação para o sinal $y(t)$ do item (c), o projetista resolve alimentar o D/A disponível com $\hat{y}[n] = y[2n]$, para obter $\hat{y}(t)$. Determine as freqüências das componentes senoidais presentes em $\hat{y}(t)$. Discuta e critique a solução empregada pelo projetista.

EXERCÍCIO 4

Um pesquisador deseja correlacionar medições de temperatura realizadas por duas estações meteorológicas, localizadas em cidades distintas C1 e C2. A estação em C1 faz medições de temperatura a cada 10 minutos, enquanto aquela em C2 coleta os dados a cada 15 minutos. Por convenção, seguida por ambas a estações, a primeira medição de temperatura realizada em determinado dia ocorre sempre à 0h hora (horário de Brasília). Especifique um sistema de mudança de taxa de amostragem que permita comparar adequadamente as seqüências de dados medidas em C1 e C2. Considere como ideais todos os componentes (A/D, D/A, filtros seletivos, filtros anti-*aliasing*, etc.) que compõem o sistema.

EXERCÍCIO 5

Explique de forma sucinta (breve) as seguintes questões:

a) Como se relacionam a DTFT de uma seqüência $x[n]$ de L amostras e a DFT de tamanho $N = L$ da mesma $x[n]$?
b) Qual é o efeito de computar a DFT de N pontos de uma seqüência $x[n]$ de $L = N/2$ amostras, i.e., usando preenchimento por zeros (*zero-padding*), em relação à computação da DFT sem *zero-padding* ($N = L$)?
c) É factível computar pela definição a DFT de $N = 64$ pontos da seqüência $x[n] = (0{,}9)^n\, u[n]$?
d) Quais as vantagens e desvantagens da FFT sobre a DFT?

LNCC
www.lncc.br
Laboratório Nacional de Computação Científica
Ministério da Ciência e Tecnologia
Av. Getúlio Vargas 333, Quitandinha, Petrópolis, RJ - CEP 25651-075

PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

GA-038 Processamento Digital de Sinais – **Quinta Lista de Exercícios**

(Prazo de entrega: dia 14 de dezembro de 2010 às 13h30min)

Indique a linha de raciocínio pela qual chegou às soluções e embase as suas respostas com argumentações e justificativas adequadas. Para os exercícios que envolvem simulação computacional, apresente também os scripts e resultados gráficos produzidos.

EXERCÍCIO 1

Sabe-se que a amostragem ideal de um sinal de tempo contínuo $x(t)$, realizada com freqüência de amostragem $f_s = 500$ Hz, resulta na seqüência $x[n] = \cos\left[\frac{\pi}{7}n\right]$.

a) Determine uma expressão algébrica para todos os sinais $x(t)$ que, quando amostrados com $f_s = 500$ Hz, produzem o $x[n]$ dado.

b) Suponha que o critério de Nyquist tenha sido respeitado na amostragem feita no item (a): determine uma expressão algébrica para $x(t)$.

c) Suponha que o $x(t)$ encontrado no item (b) seja amostrado com $f_s = \frac{1}{15}$ kHz.

   i. Obtenha o $x[n]$ correspondente;

   ii. Obtenha o sinal $x_r(t)$ reconstruído a partir do $x[n]$ do item anterior, através de um conversor digital-analógico (D/A) ideal com freqüência de reconstrução $f_r = 500$ Hz;

   iii. Os resultados acima (dos sub-itens i e ii) implicam uma violação do **Teorema da Amostragem**?

EXERCÍCIO 2

Considere os sinais de tempo contínuo $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ e $x_4(t)$, cujos espectros de magnitude são mostrados na **Figura 1**. No mais, assuma que $|X_3(j\Omega)|$ é nulo para todo Ω, exceto em $0 \leq \Omega \leq \Omega_1$ e que $|X_4(j\Omega)|$ é nulo para todo Ω, exceto para $\Omega_1 < |\Omega| < 2\Omega_1$. Para cada sinal, determine **a menor** freqüência de amostragem Ω_s que satisfaz o critério de Nyquist.

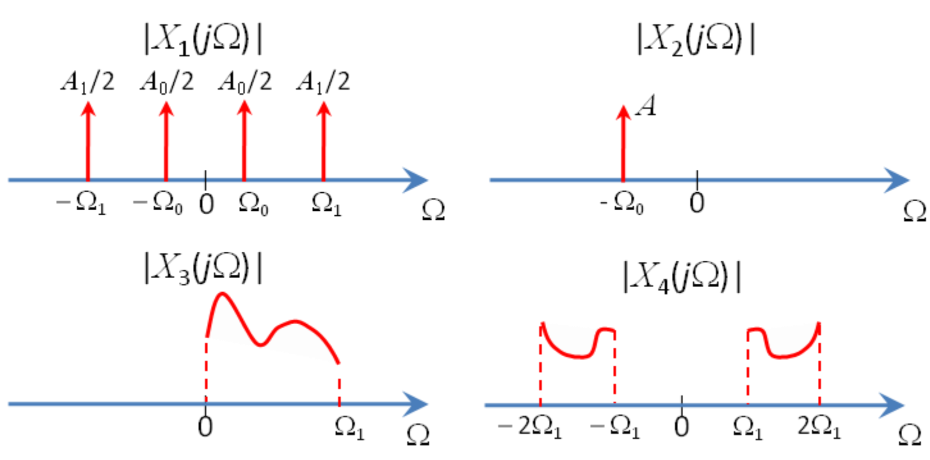


Figura 1. Magnitude dos espectros dos sinais considerados no exercício 2.

EXERCÍCIO 3

Deseja-se realizar o sistema analógico (de tempo contínuo): $y(t) = x^2(t)$ **através de um sistema discreto no tempo**. No mais, sabe-se que $x(t)$ é real e seu espectro $X(j\Omega)$ é nulo para $|\Omega| > 20000\pi$ rad/s. Projete tal sistema, considerando como **ideais** todos os seus possíveis elementos constituintes, i.e., conversor analógico-digital, filtro anti-*aliasing*, filtro de reconstrução, conversor digital-analógico, etc. Desconsidere os atrasos de processamento produzidos pelos A/D, D/A e filtros.

EXERCÍCIO 4

Deseja-se processar o sinal de tempo-contínuo $x(t) = 10\cos(4000\pi t) + 2\mathrm{sen}(8000\pi t)$ usando um sistema em tempo-discreto. Para tal, $x(t)$ é amostrado idealmente a 12000 amostras por segundo para gerar a seqüência discreta $x[n]$. O processamento efetuado no tempo discreto é realizado por um sistema LTI regido pela seguinte equação de diferenças:

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x[n-3].$$

a) Esboce o espectro de magnitude $|H(e^{j\omega})|$ do sistema que representa o processamento discreto realizado.
b) Suponha que $y[n]$ seja submetido a um D/A ideal com freqüência de reconstrução (f_r) idêntica à da de amostragem do A/D, i.e., $f_\mathrm{r} = f_\mathrm{s}$. Determine uma expressão para $y(t)$.
c) Suponha que, para reconstruir $y(t)$, só haja disponível um D/A ideal cuja freqüência de reconstrução (f_r) é a metade da de amostragem do A/D, i.e., $f_\mathrm{r} = f_\mathrm{s}/2$. Proponha uma modificação na cadeia de processamento em tempo discreto que, apesar da restrição imposta ao D/A, permita reconstruir perfeitamente o $y(t)$ obtido no item (b).

EXERCÍCIO 5

Uma seqüência temporal $x[n]$ pode admitir representações equivalentes no domínio da freqüência (espectral), através de transformadas de Fourier. No caso da DTFT, o espectro $X(e^{j\omega})$ é uma função complexa, periódica com período 2π e contínua ($\omega \in \mathbb{R}$). No caso da DFT, o espectro $X[k]$ de N pontos também é uma função complexa, mas discreta na freqüência, i.e., $X[k]$ pode ser visto como a amostragem sobre um período de $X(e^{j\omega})$ nas freqüências $\omega_k = 2\pi k/N$.

Para certa seqüência $x[n]$ desconhecida, sabe-se que o espectro de Fourier correspondente tem expressão algébrica $X(e^{j\omega}) = (1 + 0{,}9\cos(\omega) - j0{,}9\,\mathrm{sen}(\omega))^{-1}$, com j sendo a unidade imaginária. Um pós-graduando em modelagem computacional, conhecedor dos conceitos acima, resolve obter $x[n]$ computacionalmente através do seguinte procedimento:

a) Define $N = 16$;
b) Obtém $X[k]$, com $k = 0, 1, \dots, N-1$, pela avaliação de $X(e^{j\omega})$ em $\omega_k = 2\pi k/N$;
c) Computa a DFT **inversa** de N pontos (através da IFFT) de $X[k]$ e obtém $x[n]$, com $n = 0, 1, \dots, N-1$.

Discuta a validade do procedimento adotado pelo pós-graduando para obter $x[n]$ a partir de sua representação espectral. Em outras palavras, diga se o procedimento adotado é válido para encontrar $x[n]$. Como referência, os resultados encontrados pelo pós-graduando para $|X[k]|$ e $x[n]$ são mostrados na **Figura 2**.

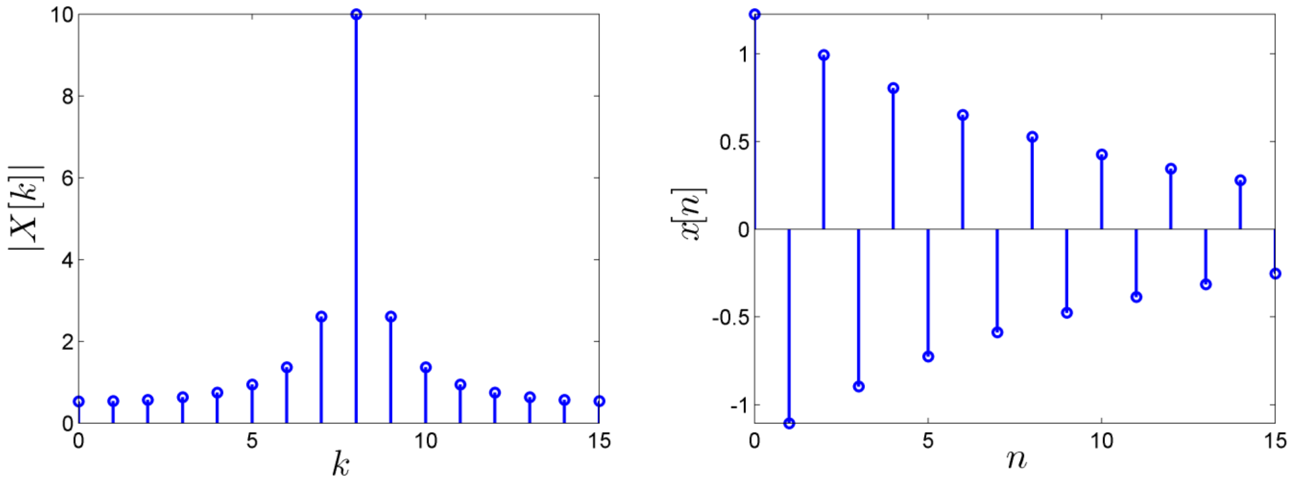


Figura 2. Módulo de $X[k]$ (DFT de 16 pontos) à esquerda e sinal $x[n]$ obtido pela DFT inversa de $X[k]$ à direita.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

GA-038 Processamento Digital de Sinais – **Quinta Lista de Exercícios**

(Prazo de entrega: dia 09 de dezembro de 2011, 17h)

Indique a linha de raciocínio pela qual chegou às soluções e embase as suas respostas com argumentações e justificativas adequadas. Para os exercícios que envolverem simulação computacional, apresente também os scripts e resultados gráficos produzidos.

EXERCÍCIO 1

Considere o sinal (a tempo contínuo) $x(t) = 2\cos(\Omega_1 t) + \frac{1}{2}\cos(\Omega_2 t)$, com Ω
$\Omega_1 = 500\pi$ rad/s e $\Omega_2 = 750\pi$ rad/s.

a) Esboce o espectro $X(j\Omega)$ de $x(t)$.
b) Encontre a sequência $x[n]$ que resulta da amostragem ideal (sem filtro anti-*aliasing*) de $x(t)$ com um período de amostragem uniforme $T = \frac{2\pi}{\Omega_s} = 1$ ms.
c) O Critério de Nyquist foi observado no processo de amostragem realizado no item (b)?
d) Esboce o espectro $X(e^{j\omega})$ associado à $x[n]$ obtida no item (b), no intervalo $-3\pi \leq \omega \leq 3\pi$ rad/amostra.
e) Obtenha uma expressão algébrica para o sinal $x_r(t)$ reconstruído a partir do $x[n]$ obtido no item (b), através de um D/A ideal com frequência de reconstrução $f_r = 2000\pi$ Hz.

EXERCÍCIO 2

Sabe-se que a amostragem ideal de um sinal de tempo contínuo $x(t) = \cos(\Omega t)$, realizada com freqüência de amostragem $f_s = 3{,}3$ kHz, resulta na seqüência $x[n] = \cos\left[\frac{3\pi}{5}n\right]$. No mais, o processo de amostragem não inclui filtro anti-*aliasing*.

a) Determine uma expressão para todos os valores positivos de Ω que satisfaçam o enunciado acima.
b) Suponha que o Critério de Nyquist tenha sido respeitado durante o processo de amostragem feito no item (a): determine uma expressão algébrica para $x(t)$.
c) Suponha que o $x(t)$ encontrado no item (b) seja amostrado com $f_s = \frac{9900}{23}$ Hz.
   i. Obtenha o $x[n]$ correspondente;
   ii. Obtenha o sinal $x_r(t)$ reconstruído a partir do $x[n]$ do item anterior, através de um conversor digital-analógico (D/A) ideal com freqüência de reconstrução $f_r = 3300$ Hz;
d) Os resultados acima (dos sub-itens i e ii) implicam uma violação do **Teorema da Amostragem**?

EXERCÍCIO 3

Deseja-se realizar o sistema a tempo contínuo $y(t) = x^2(t)$ através de um sistema discreto no tempo. No mais, sabe-se no escopo de utilização do sistema, o sinal de entrada entrada $x(t)$ é real e seu espectro $X(j\Omega)$ é nulo para $|\Omega| \geq 300\pi$ rad/s. Projete tal sistema, considerando como **ideais** todos os seus possíveis elementos constituintes, i.e., conversor analógico-digital, filtro anti-*aliasing*, filtro de reconstrução, conversor digital-analógico, etc. Desconsidere os atrasos de processamento produzidos pelos A/D, D/A e processos de filtragem.

EXERCÍCIO 4

Deseja-se utilizar um sistema em tempo-discreto processar o sinal de tempo-contínuo
$x(t) = 1 + 2\cos\left(50\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + 3\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + 4\cos\left(150\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$.
Para a obter uma seqüência $x[n]$ associada ao sinal $x(t)$, um projetista escolhe um A/D ideal (sem filtro anti-*aliasing*) para amostrar $x(t)$ a 250 amostras por segundo, portanto, satisfazendo o Critério de Nyquist. O processamento efetuado no tempo discreto é realizado por um sistema LTI causal cuja função de transferência é $H(z) = \frac{1}{2} - \frac{z^{-5}}{2}$, com RDC: $z \in \mathbb{C}, |z| > 0$.

a) Obtenha a seqüência $x[n]$ que resulta da amostragem de $x(t)$;
b) Considerando que $x[n]$ é nulo para $n < 0$, obtenha $y[n] = (x * h)[n]$;
c) Determine o sinal $y(t)$ reconstruído a partir de $y[n]$ através de um D/A ideal com freqüência de reconstrução $f_r = f_s$, onde f_s é a freqüência (em Hz) de amostragem do A/D ;
d) Suponha que, devido a uma limitação de *hardware*, só se disponha de um D/A ideal que opere com $f_r = \frac{f_s}{2}$. Para essa situação particular:
   i. Obtenha o sinal $y(t)$ reconstruído a partir de $y[n]$.
   ii. Visando a remediar o problema e obter um sinal reconstruído mais próximo do sinal $y(t)$ obtido no item (c), o projetista resolve passar $y[n]$ por um sistema compressor com fator $M = 2$ e alimentar o resultado diretamente no D/A disponível, para obter $\hat{y}(t)$. Determine as freqüências das componentes senoidais presentes em $\hat{y}(t)$. Discuta e critique a solução empregada pelo projetista.

EXERCÍCIO 5

A auto-covariância amostral de uma sequência "causal" determinística $x[n]$ de média zero e L (finito) valores reais é uma função par definida por

$$r[m] = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1-m} x[n]x[n+m].$$

Suponha que $x[n]$ seja uma seqüência de média zero e suporte temporal finito no intervalo $0 \le n \le 8$, no qual pode assumir valores possivelmente não-nulos. Nesse caso, só é necessário computar $r[m]$ na faixa $-8 \le m \le 8$. Note ainda o somatório acima pode ser feito para $\forall n \in \mathbb{Z}$. Mas graças ao suporte temporal compacto de $x[n]$, pode-se utilizar a faixa limitada mostrada.

a) Descreva um procedimento que permita calcular $r[m]$ no domímio da frequência, através de DFTs (*Discrete Fourier Transforms*) e IDFTs (*Inverse Discrete Fourier Transforms*).
b) Qual o número mínimo de DFTs e IDFTs necessário para computar $r[m]$?
c) Implemente (em Matlab ou em outra ferramenta de simulação) a solução proposta no item (a) para a sequência $x[n] = \{\ldots 0;\ 0{,}7_{\uparrow};\ 0{,}3;\ -0{,}4;\ -0{,}8;\ -0{,}2;\ 0;\ 0{,}1;\ 0{,}5;\ -0{,}2;\ 0 \ldots\}$ e compare o resultado obtido para $r[m]$, no intervalo $0 \le m \le 8$, com a referência (matlab): r=covf(x,9);

EXERCÍCIO 6

Deseja-se computar **um período** da Série de Fourier c_k de uma seqüência não-nula $x[n] = x[n+P]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, com P inteiro positivo. Proponha uma solução para o problema na qual sejam utilizados: multiplicadores e somadores e uma única DFT de N pontos.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

GA-038 Processamento Digital de Sinais – **Quinta Lista de Exercícios**

(Prazo de entrega: dia 13 de dezembro de 2012, 9h)

Indique a linha de raciocínio pela qual chegou às soluções e embase as suas respostas com argumentações e justificativas adequadas. Para os exercícios que envolverem simulação computacional, apresente também os scripts e resultados gráficos produzidos.

EXERCÍCIO 1

Considere o sinal a tempo contínuo $x(t) = \sum_{k=0}^{2}\{2^{-k}\cos(2\pi f_0(k+1)t)\}$, com $f_0 = 1000$ Hz.

a) Esboce o espectro $X(j\Omega)$ de $x(t)$.
b) Encontre a sequência $x[n]$ que resulta da amostragem ideal (sem filtro anti-*aliasing*) de $x(t)$ com frequência de amostragem $f_s = 5000$ Hz.
c) Obtenha uma expressão algébrica para o sinal $x_\mathrm{r}(t)$ reconstruído a partir do $x[n]$ obtido no item (b), através de um D/A ideal com frequência de reconstrução $f_\mathrm{r} = f_\mathrm{s}$.
d) Compare $x(t)$ e $x_\mathrm{r}(t)$ e critique os resultados obtidos à luz do Teorema da Amostragem.

EXERCÍCIO 2

Deseja-se realizar o sistema a tempo contínuo $y(t) = x(Mt)$, com $M > 1$ real, **através de um sistema a tempo discreto**. No mais, sabe-se que $x(t)$ é um sinal real e seu espectro de Fourier $X(j\Omega)$ é não-nulo para $-\Omega_\mathrm{m} < \Omega < \Omega_\mathrm{m}$ rad/s e nulo para $|\Omega| \geq \Omega_\mathrm{m}$ rad/s. Projete tal sistema, considerando como **ideais** todos os seus possíveis elementos constituintes, i.e., filtro anti-*aliasing*, conversor analógico-digital (A/D), sistema discreto, filtro de reconstrução, conversor digital-analógico (D/A), etc. Desconsidere os atrasos de processamento produzidos pelos A/D, D/A e filtros.

EXERCÍCIO 3

Deseja-se processar o sinal de tempo-contínuo $x(t) = \cos^2(400\pi t) + \cos(200\pi t + \pi/5)$ usando um sistema em tempo-discreto. Para tal, $x(t)$ é amostrado idealmente com $f_\mathrm{s} = 1000$ Hz para gerar a sequência discreta $x[n]$. O processamento efetuado no tempo discreto é realizado por um sistema LTI causal com $H(z) = (1 - z^{-5})/2$, RDC$_\mathrm{H}$: $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > 0\}$.

a) Obtenha $x[n]$.
b) Encontre $y[n]$.
c) Determine uma expressão para $y_\mathrm{r}(t)$ reconstruído de $y[n]$ através de um D/A ideal com frequência de reconstrução $f_\mathrm{r} = f_\mathrm{s}$.
d) Suponha que, para reconstruir $y_\mathrm{r}(t)$, só se disponha de um D/A ideal cuja frequência de reconstrução $f_\mathrm{r} = f_s/2$. Apesar dessa restrição imposta ao D/A, ainda seria possível reconstruir perfeitamente o $y_\mathrm{r}(t)$ obtido no item (c)? Caso verdadeiro, proponha uma modificação na cadeia de processamento para viabilizar tal reconstrução.

EXERCÍCIO 4

Sabe-se que o espectro (de banda base) $X(j\Omega)$ de sinal real de tempo-contínuo $x(t)$ que representa a evolução temporal de certa grandeza física só contém informação de interesse até 1 Hz (exclusive). Um pesquisador A mede (amostra) a referida grandeza a cada 200 ms (duzentos milissegundos). Outro investigador B, devido a uma limitação de recursos de *hardware*, só é capaz de realizar medidas da mesma grandeza (associada ao mesmo fenômeno) a cada 1/3 s.

Nos dois casos acima, considerando que a primeira medida ocorre no mesmo instante de tempo e que as amostragens foram realizadas por A/D ideais (sem quantização), especifique um sistema discreto de mudança de taxa de amostragem que permita ao pesquisador A comparar sua série temporal $x_{\mathrm{A}}[n]$ com a obtida pelo colega $x_{\mathrm{B}}[n]$. Para fins de projeto, considere como ideais e sem atrasos todos os sub-sistemas constituintes necessários.

EXERCÍCIO 5

Demonstre o Teorema de Conservação de Energia (ou de Parseval) para a DFT$_N$: $\sum_{n=0}^{N}|x[n]|^2 = (1/N)\sum_{k=0}^{N}|X[k]|^2$, para $x[n]$ de valores complexos e periódica com período fundamental N. Dicas: lembre que se $c_n \in \mathbb{C}$, então $|c_n|^2 = c_n c_n^*$ e que $\sum_n c_n^* = (\sum_n c_n)^*$.