



Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional
Laboratório Nacional de Computação Científica
LNCC - MCTI

GA-038 – PROCESSAMENTO DIGITAL DE SINAIS

Paulo A. A. Esquef

(sala 2A36 – pesquef@lncc.br)

(Crédito: Baseado em material anterior do Prof. Carlos E. de Souza)

Página na web: www.lncc.br/~pesquef/GA038_1p26/

1.º Período de 2026

Introdução: Processamento Digital de Sinais (DSP)

Objetivo Principal

- ▶ **Processamento de informação (sinal) utilizando ferramentas computacionais.**
- ▶ Processamento pode significar: armazenagem, modificação, compactação, segregação, etc.

Mecanismo

- ▶ Sinais “naturais” podem ser vistos como funções com domínio e imagem contínuos.
- ▶ **Processamento digital requer a DISCRETIZAÇÃO do domínio e da imagem da função.**
- ▶ Sinais são transformados e manipulados como SEQUÊNCIAS numéricas.

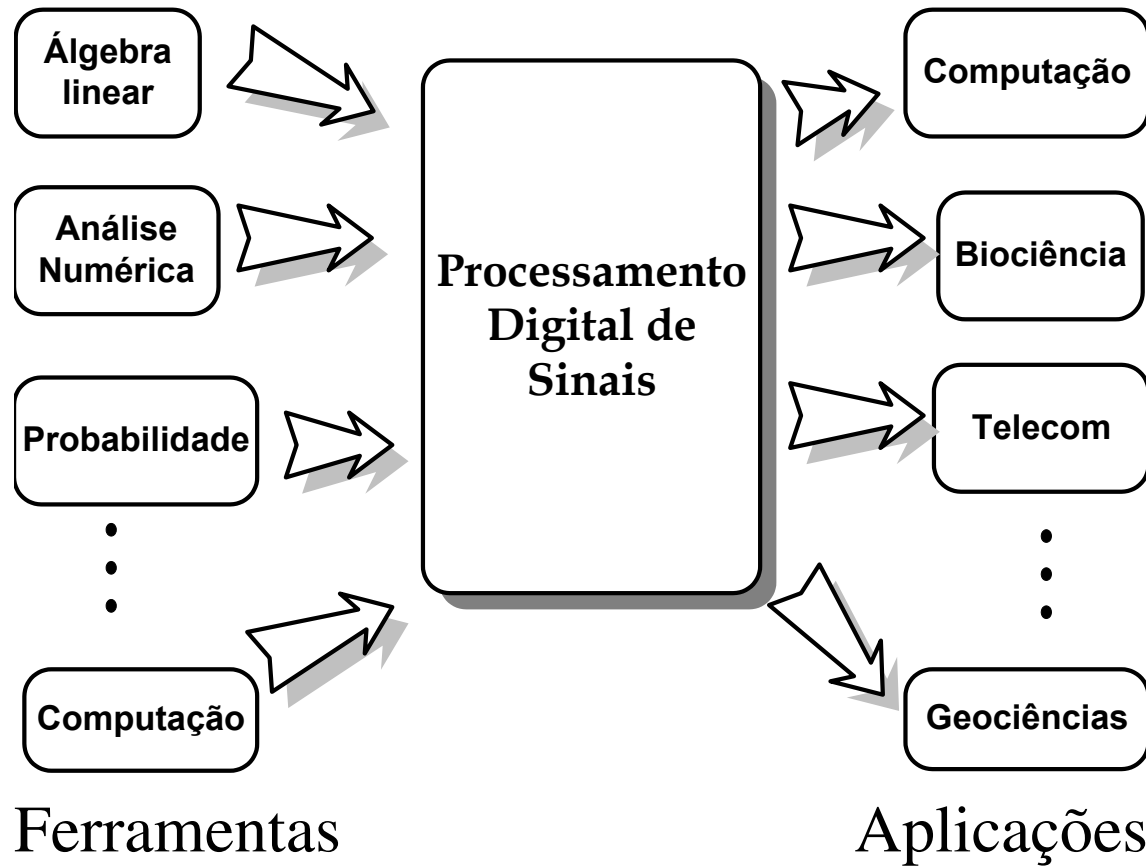
Vantagens do Processamento Digital

- ▶ Repetibilidade e realização mais fácil de operações matemáticas intrincadas.
- ▶ **Disponibilização de ferramentas poderosas para filtragem, interpolação, detecção, predição e estimação de sinais.**

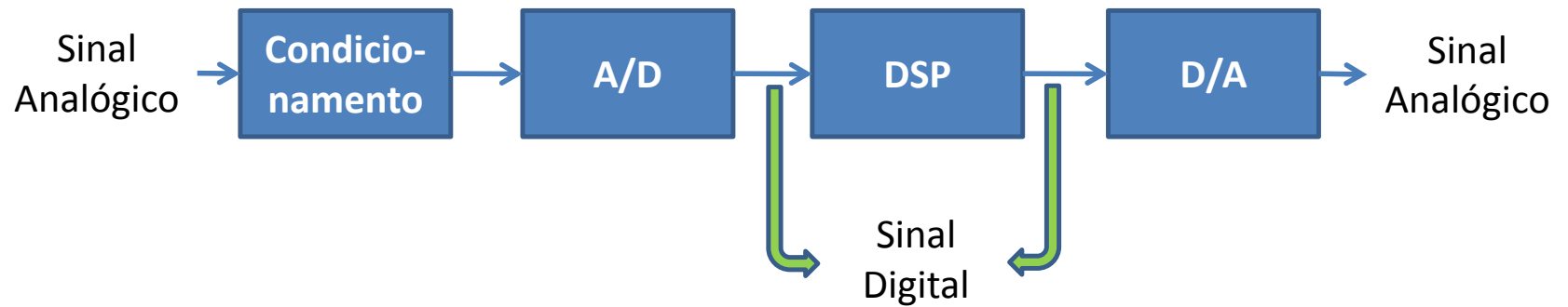
Desvantagem do Processamento Digital

- ▶ A discretização do domínio e imagem acarreta PERDAS (controláveis) de informação.

DSP



Estrutura Básica de DSP



Ementa do Curso

- i. Sinais e Seqüências (classificação);
- ii. Quantização Escalar Uniforme;
- iii. Sistemas (tipos, representações e propriedades);
- iv. Transformada- Z (definição e propriedades);
- v. Resposta em Frequência;
- vi. Transformada de Fourier de Sinais Discretos (DTFT);
- vii. Representação por Estados;
- viii. Teorema da Amostragem;
- ix. Transformada Discreta de Fourier (DFT)
- x. Transformada Rápida de Fourier (FFT);
- xi. Noções de projeto de filtros digitais;
- xii. Estimação de sinais e parâmetros;

Referências Bibliográficas

- **Livros:**

- A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer, *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice-Hall, 1989.
- J. G. Proakis, D. G. Manolakis, *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications*, 3rd edition, Prentice-Hall, 1987.
- S. Haykin, B. Veen, *Sinais e Sistemas*, Bookman Editora, 2001 (em Português).
- P. S. R. Diniz et al., *Processamento Digital de Sinais*, Bookman Editora, 2003.
- M. H. Hayes, *Statistical Digital Signal Processing and Modeling*, Wiley, 1996.

- **Material de Apoio**

- Slides do Curso (Página na Web)
- Matlab, Octave, Scilab ou outra ferramenta computacional

Avaliação de Desempenho no Curso

- Exame Escrito 1: peso 50% (29 de janeiro de 2026).
- Exame Escrito 2: peso 50% (05 de março de 2026)

Atribuição de Conceitos à Nota Final (NF):

A: $NF > 8,5$.

B: $7,0 < NF \leq 8,5$.

C: $5,0 < NF \leq 7,0$.

D: $3,0 < NF \leq 5,0$.

E: $NF \leq 3,0$.

Sinais

- ▶ Definição de Sinais
- ▶ Classificação de Sinais
- ▶ Sinais Básicos
- ▶ Propriedades de Sinais
- ▶ Operações com Sinais

Definição de Sinais

Um sinal é uma função, cujo *DOMÍNIO* pode ser:

- ▶ um subconjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$;
- ▶ um subconjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$;
- ▶ um subconjunto dos números reais $\mathbb{R}$;
- ▶ etc.

O *CO-DOMÍNIO* do sinal pode ser:

- ▶ um subconjunto dos números inteiros;
- ▶ um subconjunto dos números reais;
- ▶ um subconjunto dos **números complexos**;
- ▶ um subconjunto de um espaço linear qualquer;
- ▶ etc.

Classificação de Sinais

Dimensão ou número de variáveis independentes

► **Unidimensional:** é função de apenas uma variável independente (unidimensional), normalmente chamada tempo.

► **Bidimensional:** é função de duas variáveis independentes.

$$s_3(x, y) = 5x + y^3 \quad x, y \in \mathbb{R}, s_4(z) = 1/(z - 1), \quad z \in \mathbb{C}$$

► **Multidimensional:** é função de três ou mais variáveis.

$$s_5(x, y, z) = 5x + y^3 + z^2 \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

Dimensionalidade de Sinais: Exemplos

Unidimensional

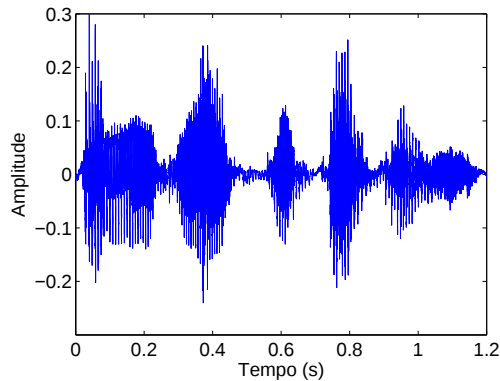


Fig 1: Sinal de voz

Bidimensional



Fig 2: Imagem em tons de cinza

Multidimensional

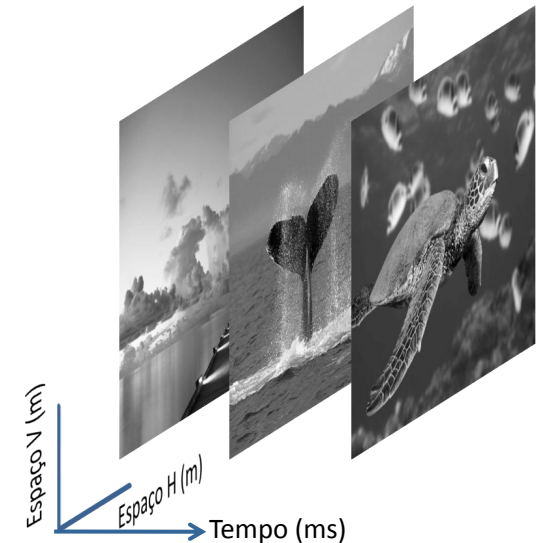


Fig 3: Sequência de vídeo

Não confundir com o número dimensões necessárias à visualização do sinal!

Classificação de Sinais

Quanto à NATUREZA do Domínio, e.g., tempo

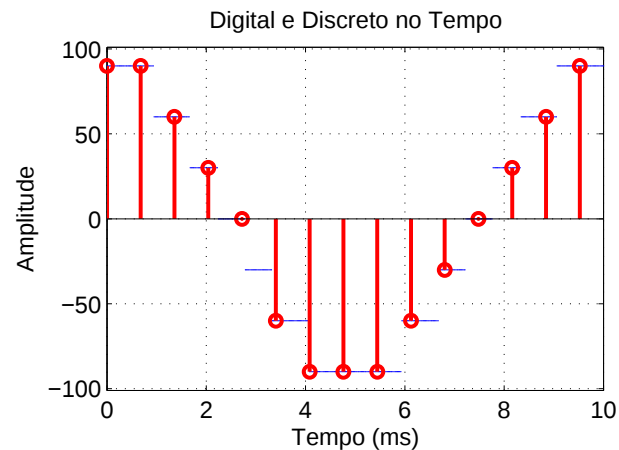
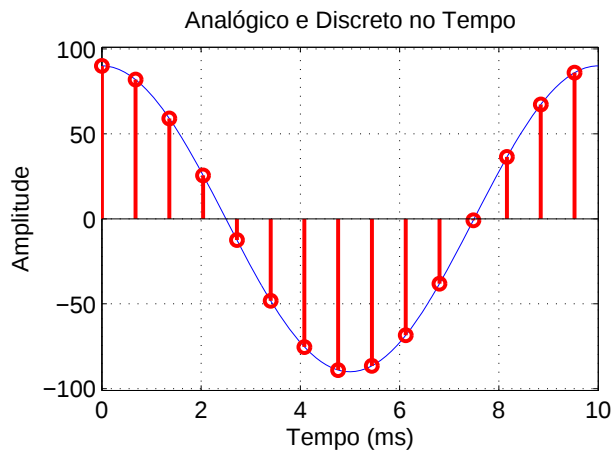
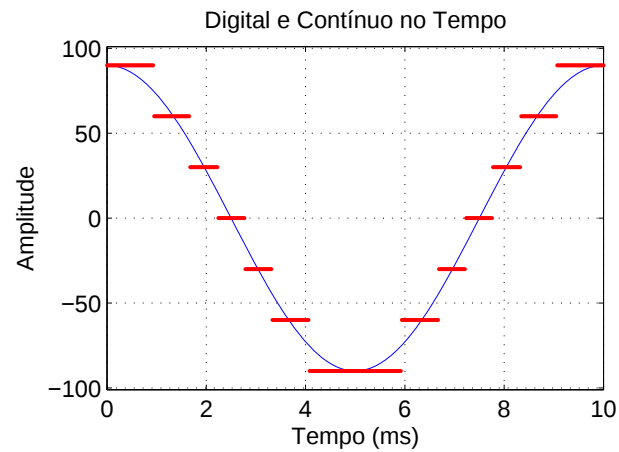
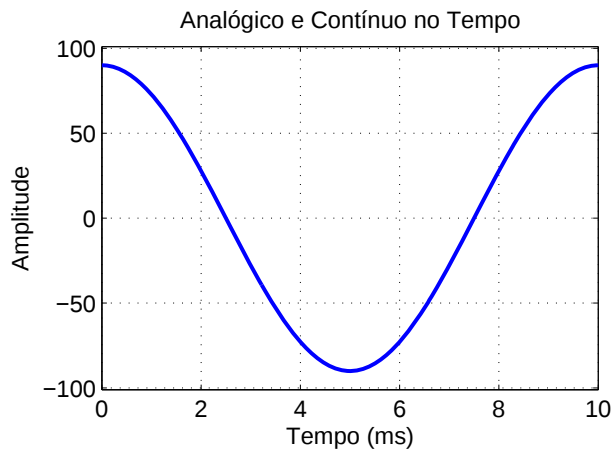
- **Contínuo no tempo:** se for um subconjunto de um conjunto denso e não-enumerável, e.g. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Exemplos:
 - O sinal $s(t) = \sin(t)$, com $t \in \mathbb{R}$;
 - Evolução temporal contínua de fenômenos físicos: temperatura, pressão, velocidade, etc.
- **Discreto no tempo:** se for um subconjunto não-denso e enumerável, e.g. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$. Exemplos:
 - O sinal $s[n] = 2n + 1$, com $n \in \mathbb{Z}$;
 - O fechamento da cotação diária do dolar.

Classificação de Sinais

Quanto à NATUREZA do Co-domínio

- ▶ **Contínua ou Analógica:** se for um subconjunto de um conjunto denso e não-enumerável, e.g. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Exemplos:
 - O sinal $s(t) = \sin(t)$, com $t \in \mathbb{R}$;
 - A variação de tensão da rede elétrica ao longo do tempo.
- ▶ **Discreta ou Digital:** se for um subconjunto não-denso e enumerável, e.g. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$.. Exemplos:
 - A população na n -ésima geração de uma dada espécie;
 - Bases ATGC de uma sequência de DNA;
 - O sinal $s(t) = \text{sinal}\{\sin(t)\}$. Note que $s(t) \in \{-1, 0, 1\}$.

Natureza do Domínio e do Co-Domínio: Exemplos



Natureza de Domínio e Co-Domínio: Discussão

Terminologia Usual

- ▶ **Amostragem:** Refere-se à discretização da variável independente (domínio);
- ▶ **Quantização:** Refere-se à discretização da variável dependente (co-domínio);
- ▶ **Sinal Analógico:** Domínio e Co-domínio Contínuos;
- ▶ **Sinal Discreto:** Domínio Discreto e Co-domínio Contínuo;
- ▶ **Sinal Digital:** Domínio e Co-domínio Discretos;

Amostragem e Quantização

- ▶ **Uniforme:** a passos (intervalo de tempo, espaçamento) constantes;
- ▶ **Não-uniforme:** a passos (intervalo de tempo, espaçamento) variáveis;

Amostragem

Questão Fundamental

- ▶ Como garantir que a amostragem (discretização do domínio) de um sinal contínuo analógico preserve a informação contida no sinal?

Resposta

- ▶ **O Teorema da Amostragem** (a ser discutido posteriormente) define o quão densa deve ser a amostragem.

Quantização Escalar Uniforme

Mapeamento Não-Linear de $\mathbb{R}$ em “ $\mathbb{Z}$ ”

- ▶ Realizado por conversores A/D: **implica perda irreversível;**
- ▶ **Notação:** $x_q = Q(x)$, com $x \in \mathbb{R}$, sendo $Q(\cdot)$ uma função não-linear (com operadores ‘arredondamento’, ‘teto’ e ‘chão’);
- ▶ x_q é representado com número finito de dígitos;
- ▶ **Exemplo:** $x = \pi$ representado com 3 dígitos é $x_q = 3,14$. Nesse caso, $Q(x) = \frac{\lfloor 100x \rfloor}{100}$;

Quantizadores *Mid-tread* e *Mid-rise*

Caso IDEAL

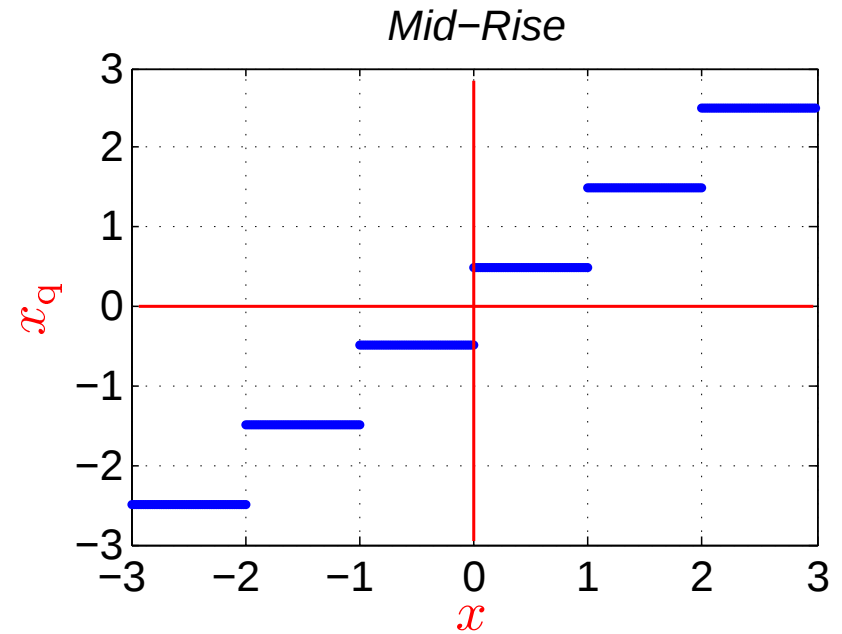
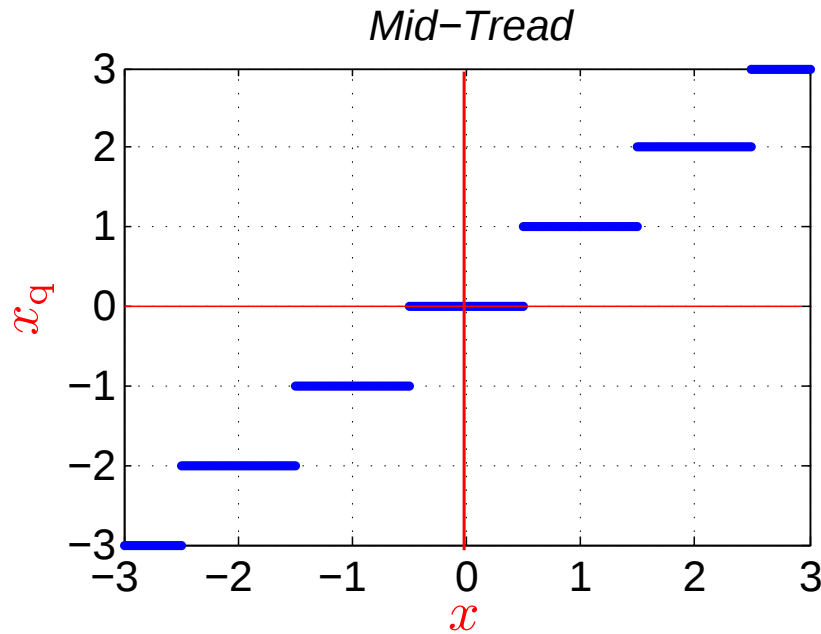
- ▶ **Entrada (contínua):** $-\infty \leq x \leq \infty$
- ▶ **Saída (discreta):** infinitos níveis de quantização
- ▶ **Funções características dos quantizadores**

$$\diamond \textit{Mid-Tread}: x_q^{\text{mt}} = \lfloor x - 0,5 \rfloor + 1 = \text{round}(x)$$

$$\diamond \textit{Mid-Rise}: x_q^{\text{mr}} = \lfloor x \rfloor + 0,5 = \lceil x \rceil - 0,5$$

Quantizadores *Mid-tread* e *Mid-rise*

Gráficos das Funções Características (para $-3 \leq x \leq 3$)



Da Teoria para a Realidade Prática

- ▶ **Entrada do Quantizador:** sinal de tensão ou corrente elétrica (em Volt ou Ampère) que pode variar em uma faixa contínua e **LIMITADA** $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$;
- ▶ **Saída do Quantizador:** número **FINITO** de níveis de quantização (dependente do número de bits B do A/D);
 - ◊ **Exemplo:** Quantizador de um A/D de $B = 8$ bits permite $2^B = 256$ níveis quantização x_q distintos;
- ▶ **Importante:** a saída de um A/D é um índice (ou código) inteiro i_q que representa indiretamente cada valor possível de x_q ;
 - ◊ Tipicamente, i_q é representado em um sistema binário, e.g., complemento-a-dois;

Passo de Quantização Δ de um A/D

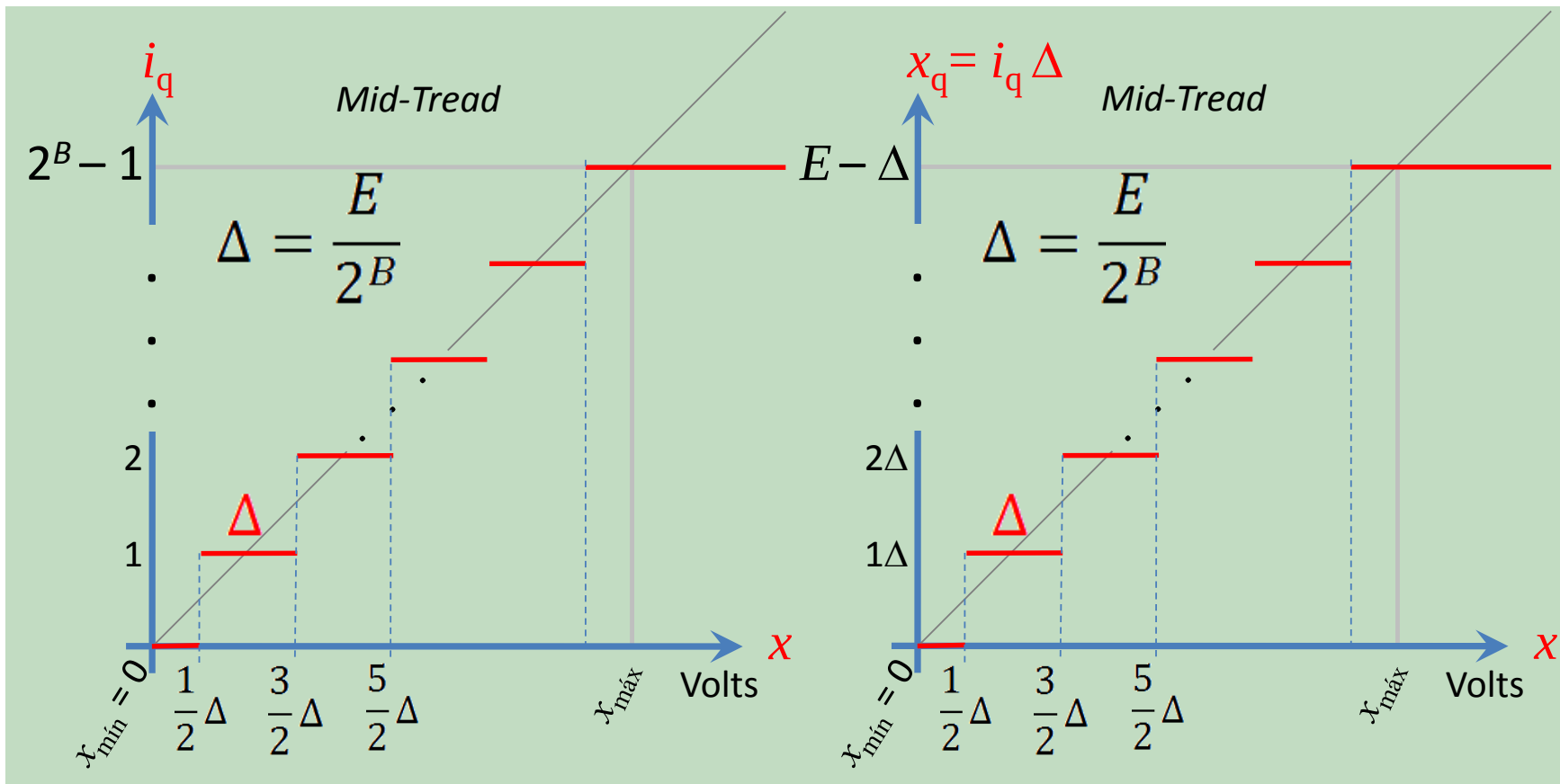
Propósito do Δ

- Indicar a proporção entre as faixas de entrada x (real dimensional) e saída i_q (inteiro adimensional) do A/D:

$$\Delta = \frac{E}{2^B}, \text{ com } E = x_{\text{máx}} - x_{\text{mín}}$$

- Logo, Δ tem dimensão de tensão (ou corrente) e informa o tamanho fixo dos intervalos de segmentação da faixa de entrada (exceto nas suas extremidades).

Quantizador *Mid-Tread*: Ilustração do Papel do Δ



- **Níveis de Decisão:** pontos $0, \frac{\Delta}{2}, \frac{3\Delta}{2}, \frac{5\Delta}{2}, \text{etc.}$, no eixo x ;
- **Níveis de Quantização:** pontos $0, \Delta, 2\Delta, \dots, E - \Delta$, no eixo x_q ;

Ainda sobre o Δ

Δ e Pré-escalamento da Faixa Entrada

- ▶ Suponha um A/D *mid-tread* de $B = 8$ bits (256 níveis x_q) com faixa de entrada $-1 \leq x \leq 1$ Volt. A quantização direta $x_q = \text{round}(x)$, resultaria em $x_q \in \{-1, 0, 1\}$;
- ▶ Para que os 2^B níveis de quantização sejam aproveitados, o A/D multiplica a faixa de entrada por $\frac{1}{\Delta}$ antes de arredondar;
- ▶ A faixa de valores de $\frac{x}{\Delta}$ (agora adimensional) e o **número** de níveis x_q guardam razão (praticamente) unitária;
- ▶ Assim, $\text{round}\left(\frac{x}{\Delta}\right)$ produz 2^B valores inteiros (de -127 a 128);

Indexação de x_q por i_q

Escolha de i_q

- ▶ Em princípio, a indexação dos níveis x_q pelos inteiros i_q pode ser arbitrária;
- ▶ Para um A/D *mid-tread* é usual escolher $i_q = \text{round}\left(\frac{x}{\Delta}\right)$, descartando-se o maior índice;
- ▶ A escolha acima é **conveniente** pois permite trabalhar diretamente com i_q , já que $x_q = i_q \Delta$;
- ▶ Estratégia de escolha similar para um A/D *mid-rise*;

Quantizadores *Mid-tread* e *Mid-rise*

Caso Real Prático

► Funções características

$$\diamond \textit{Mid-Tread}: x_q^{\text{mt}} = \underbrace{\left(\left\lfloor \frac{x}{\Delta} - 0,5 \right\rfloor + 1 \right)}_{i_q} \Delta = \text{round} \left(\frac{x}{\Delta} \right) \Delta$$

$$\diamond \textit{Mid-Rise}: x_q^{\text{mr}} = \underbrace{\left(\left\lfloor \frac{x}{\Delta} \right\rfloor + 0,5 \right)}_{i_q^{(a)}} \Delta = \underbrace{\left(\left\lceil \frac{x}{\Delta} \right\rceil - 0,5 \right)}_{i_q^{(b)}} \Delta$$

► Note as duas escolhas diferentes para i_q no *mid-rise*;

A/D e Quantização Escalar Uniforme

Exemplo Numérico

► Seja um A/D *mid-rise* com faixa de entrada $-5V \leq x \leq 5V$ e saída de $B = 8$ bits (representação em ponto-fixo). Para $x_1 = 0$ V e $x_2 = -1,5$ V determine as saídas do A/D e os níveis de quantização correspondentes.

► **Solução:**

◇ $2^B = 2^8 = 256$ níveis x_q de quantização; $\Delta = \frac{10V}{2^8} \approx 39$ mV;

◇ **Escolha particular:** $i_q = \left\lfloor \frac{x}{\Delta} \right\rfloor$;

◇ x_1 : $i_q = \left\lfloor \frac{0V}{\Delta} \right\rfloor = 0$ e $x_q = (0 + 0,5)\Delta \approx 0,0195$ V;

◇ x_2 : $i_q = \left\lfloor \frac{-1,5V}{\Delta} \right\rfloor = -39$ e $x_q = (-39 + 0,5)\Delta \approx -1,5039$ V;

Quantização Escalar Uniforme

Exemplos com Imagem

1 bit



3 bits



original: 8 bits



Exemplos com Audio

Voz 24 bits Original

Voz 2 bits

Voz 1 bit

Sinais a Tempo Discreto

Interpretação

- $x[n]$ é uma seqüência de números, onde n é inteiro, $-\infty < n < \infty$.

Representação

- Funcional:

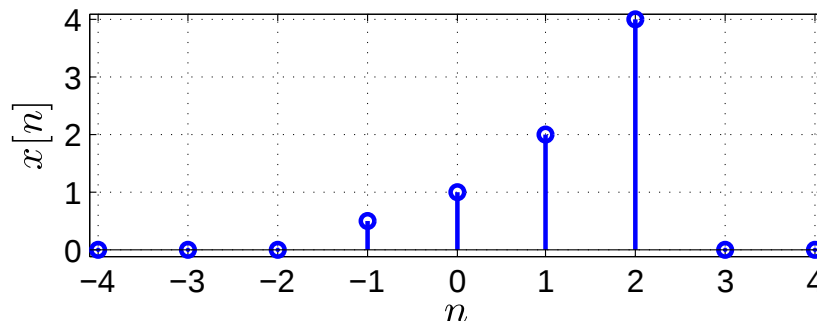
$$x[n] = x_n = \begin{cases} 2^n, & -1 \leq n \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Por seqüência: $x[n] = \{\dots, 0, \frac{1}{2}, 1_{\uparrow}, 2, 4, 0, \dots\}$, onde $\uparrow$ marca o termo em que $n = 0$

- Por tabela:

n	-2	-1	0	1	2
$x[n]$	0	0,5	1	2	4

- Gráfica:



Operações Básicas

Soma: $z[n] = x[n] + y[n]$

Produto: $z[n] = x[n]y[n]$

Escalamento: $y[n] = ax[n]$

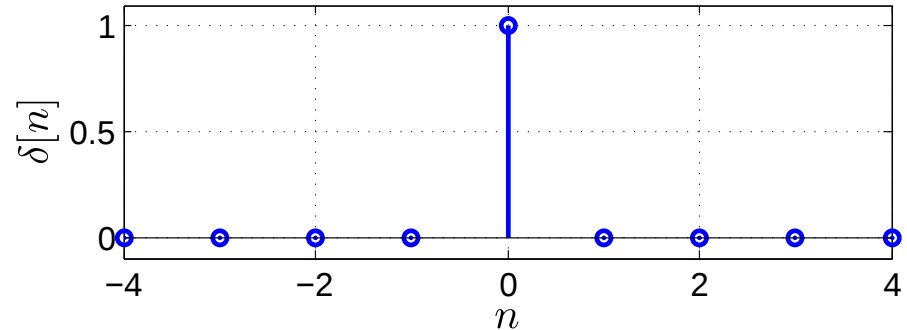
Deslocamento (translação): $y[n] = x[n - h]$, com $h \in \mathbb{Z}$

Operações realizadas amostra-a-amostra.

Sinais Básicos

Impulso Unitário $\delta[n]$

►
$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$



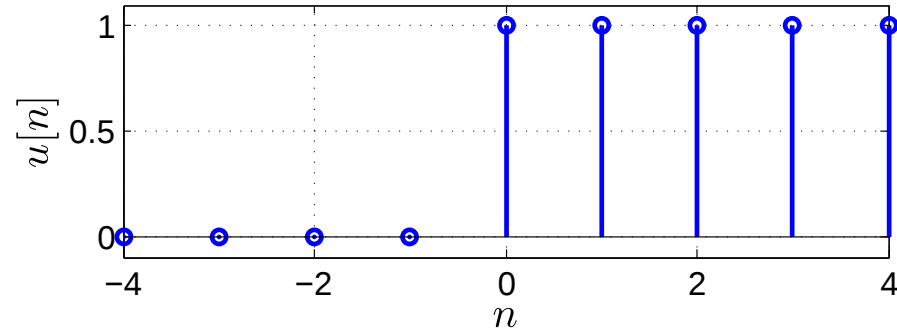
► Qualquer sinal arbitrário $x[n]$ pode ser representado em função de $\delta[n]$:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k]$$

Sinais Básicos

Degrau Unitário $u[n]$

►
$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$



► Note que:

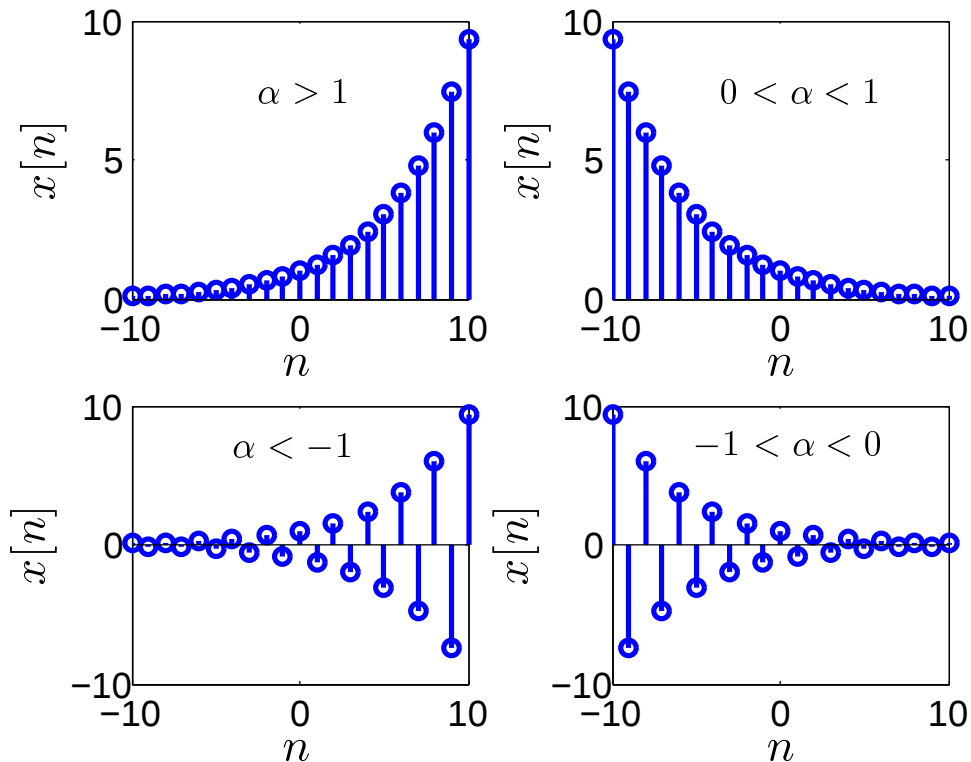
$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k], \quad (\text{Integração})$$

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n - k], \quad (\text{Soma de Convolução})$$

$$\delta[n] = u[n] - u[n - 1]. \quad (\text{Diferenciação})$$

Exponencial Real

- $x[n] = A\alpha^n$, com A e α escalares reais.
- $|\alpha|$ governa a taxa de crescimento ($|\alpha| > 1$) ou decrescimento ($0 < |\alpha| < 1$) da função.
- Sem tendência de crescimento para $|\alpha| = 1$ e indefinida para $n < 0$ se $\alpha = 0$.



Exponencial Complexa

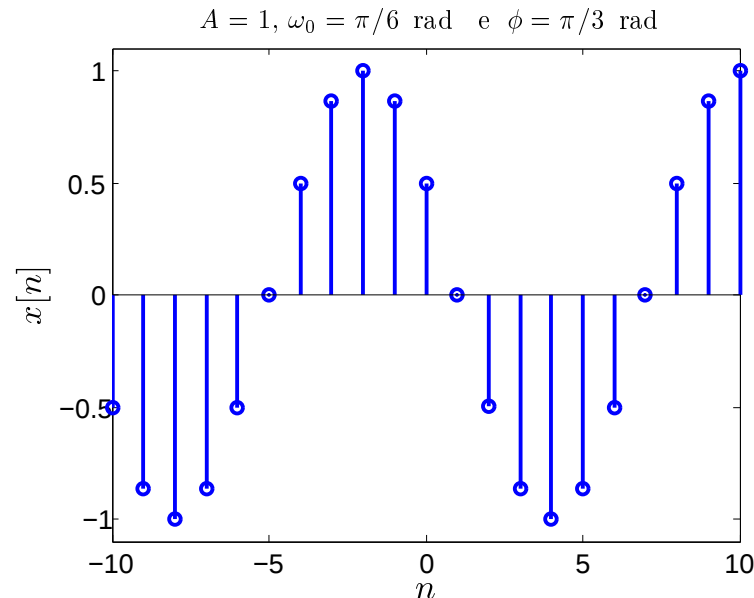
- ▶ $x[n] = A\alpha^n$, com $A = |A|e^{j\phi}$ e/ou $\alpha = |\alpha|e^{j\omega_0}$ complexos;
- ▶ $j = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária;
- ▶ Tem-se que:

$$\begin{aligned}x[n] &= |A||\alpha|^n e^{j[\omega_0 n + \phi]} \\&= |A||\alpha|^n (\cos[\omega_0 n + \phi] + j\text{sen}[\omega_0 n + \phi])\end{aligned}$$

- ▶ $|A|$ é um fator de escala para a amplitude do sinal;
- ▶ $|\alpha|$ define o *perfil* de decaimento/crescimento da amplitude do sinal;
- ▶ ω_0 define a frequência angular (taxa de variação temporal da fase) em radianos por amostra;
- ▶ ϕ define a fase inicial em radianos.

Senóide/Cossenóide

- ▶ $x[n] = A \cos[\omega_0 n + \phi]$ para n inteiro;
- ▶ A , ω_0 e ϕ tais como definidos para a exponencial complexa;
- ▶ Propriedades de $x[n]$ com $n \in \mathbb{Z}$ são distintas das do caso com tempo contínuo.
 - Relação estreita com o **Teorema da Amostragem**.



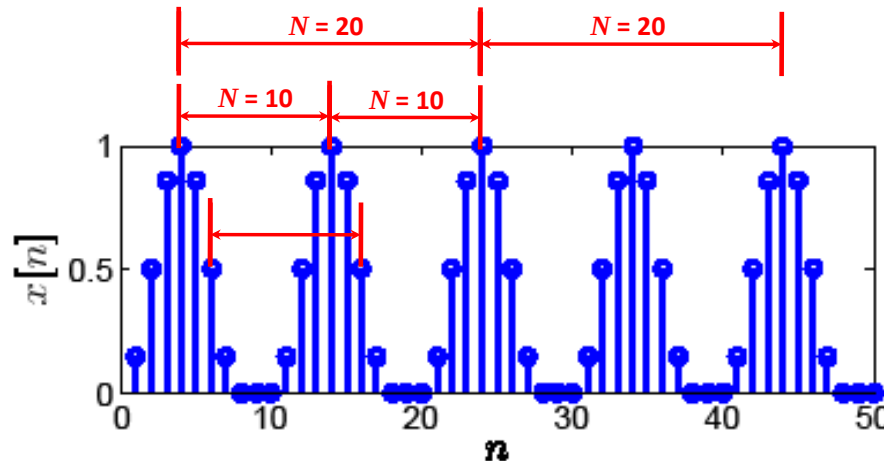
Sinais Periódicos

Definição

- Um sinal $x[n]$ é dito periódico se

$$x[n] = x[n + N], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \text{onde } N \in \mathbb{N};$$

- Em geral, um sinal periódico, **com período fundamental N** , também o é para múltiplos inteiros de N . Logo, o período fundamental se refere ao menor valor de N em que $x[n] = x[n+N]$;



Discussão sobre Sequências Senoidais

Periodicidade

- ▶ $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi)$ para n inteiro **nem sempre é periódico**;
- ▶ O *aumento* da frequência ω_0 não necessariamente implica *diminuição* do período fundamental N_0 ;
- ▶ Por propriedade de funções senoidais (exponenciais complexas), $\cos(\omega_0) = \cos(\pm\omega_0 + 2\pi k)$, com $k \in \mathbb{Z}$;
- ▶ **Mínima frequência** de oscilação de $x[n]$ é $\omega_0 = 0 + 2\pi k$, com $k \in \mathbb{Z}$;
- ▶ **Máxima frequência** de oscilação de $x[n]$ é $\omega_0 = \pi + 2\pi k$, com $k \in \mathbb{Z}$;
- ▶ Demonstração Matlab

Discussão sobre Seqüências Senoidais

Condição de Periodicidade para $x[n] = \cos[\omega_0 n + \phi]$

► $x[n] = x[n + N], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \text{com } N \in \mathbb{N};$

► Tem-se que, para $k \in \mathbb{Z}$:

$$\cos[\omega_0 n + \phi] = \cos[\omega_0(n + N) + \phi]$$

$$\cos[\omega_0 n + \phi + 2\pi k] = \cos[\omega_0 n + \phi + \omega_0 N]$$

$$2\pi k = \omega_0 N$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi k}{N}$$

► Exemplo Matlab.

Norma de Sinais

Definição:

- A norma p de um sinal discreto $x[n]$ é definida como

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x[n]|, & \text{se } p = \infty \end{cases}$$

- Normas freqüentemente usadas: $p = 1, p = 2, p = \infty$
- Espaços lineares normados associados:

$$\ell_1 = \{x[n] : \|x\|_1 < \infty\}$$

$$\ell_2 = \{x[n] : \|x\|_2 < \infty\}$$

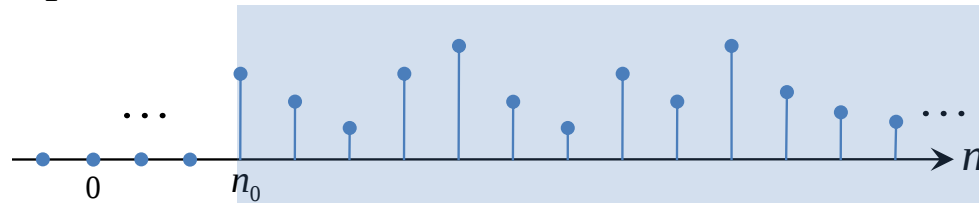
$$\ell_\infty = \{x[n] : \|x\|_\infty < \infty\}; \quad (|x[n]| = M < \infty, \quad \forall n)$$

Suporte Temporal de Seqüências

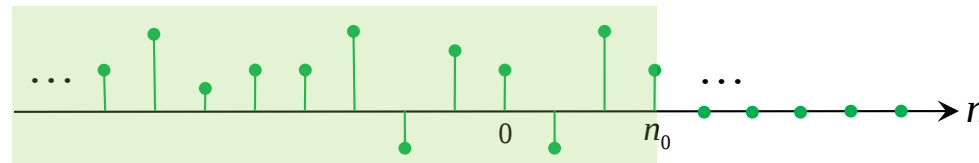
Classificação: Finito $\times$ Infinito

Seqüências com Suporte Temporal Infinito

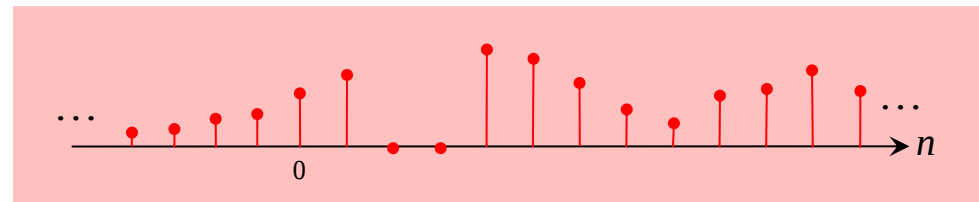
► **Lateral Direita:** nula para dado $n < n_0$



► **Lateral Esquerda:** nula para dado $n > n_0$



► **Bi-Lateral**



Sinais de Energia e de Potência

Definição de Sinal de Energia:

- A energia E de um sinal $x[n]$ é definida por

$$E = \sum_n |x[n]|^2.$$

- Se a série converge, i.e. **se E é finita e não-nula**, então $x[n]$ é um **sinal de energia**.

Definição de Sinal de Potência:

- A potência média P de um sinal $x[n]$ é definida por

$$P = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k+1} \sum_{n=-k}^k |x[n]|^2.$$

- Se o valor de **P é finito e não-nulo**, então $x[n]$ é um **sinal de potência**.

Sinais de Energia e de Potência

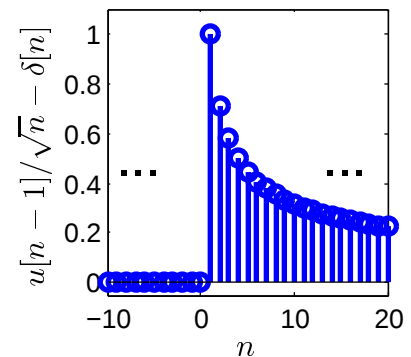
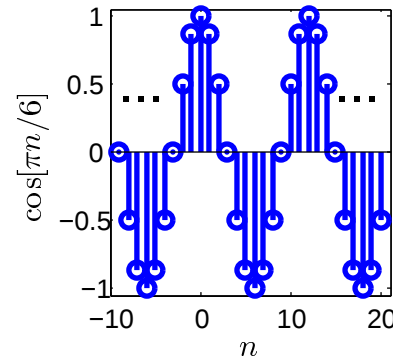
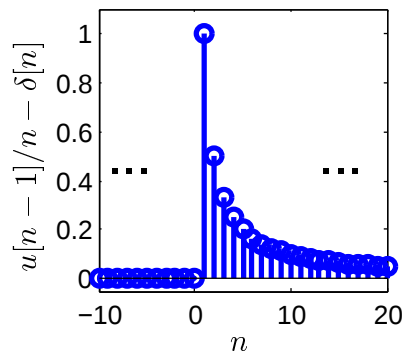
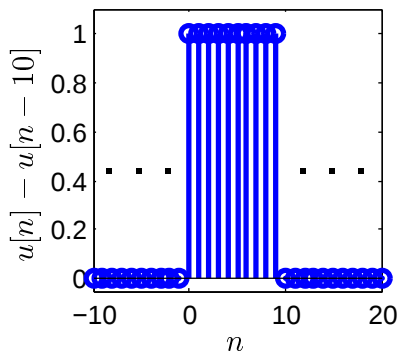
Exemplos

► Sinais de Energia

- Limitados em amplitude e **suporte temporal finito**: $x[n] = u[n] - u[n - 10]$;
- Amplitude limitada e **(suficientemente) decrescente** ao longo do tempo: $x[n] = \frac{1}{n}$, para $n \geq 1$;
- Note que $x[n] = \frac{1}{\sqrt{n}}$, para $n \geq 1$ decresce em amplitude mas não é sinal de energia;

► Sinais de Potência

- **Periódicos (suporte temporal infinito)** e amplitude limitada: $x[n] = \cos[\pi n/6]$ com $n \in \mathbb{Z}$;
- Com amplitude limitada e decrescente, mas com E infinita: $x[n] = \frac{1}{\sqrt{n}}$, para $n \geq 1$;



Sinais de Energia e de Potência

Questões

- ▶ Todo sinal de energia também é sinal de potência?
- ▶ Todo sinal de potência também é sinal de energia?
- ▶ Qualquer sinal é de energia ou de potência?

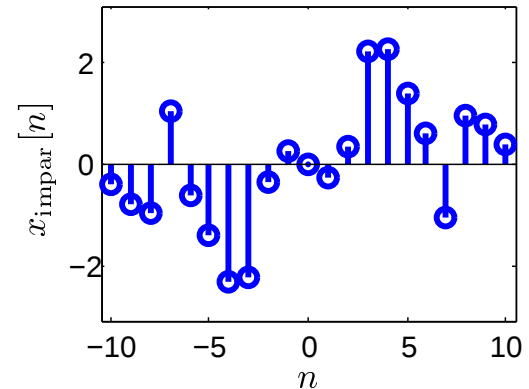
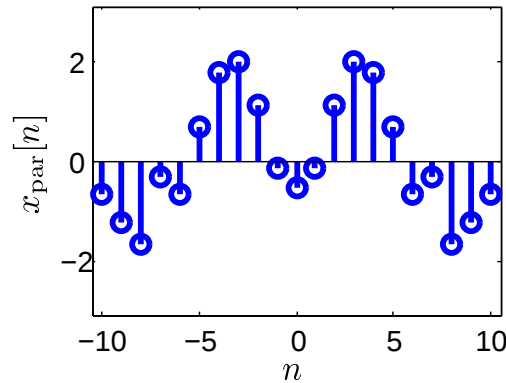
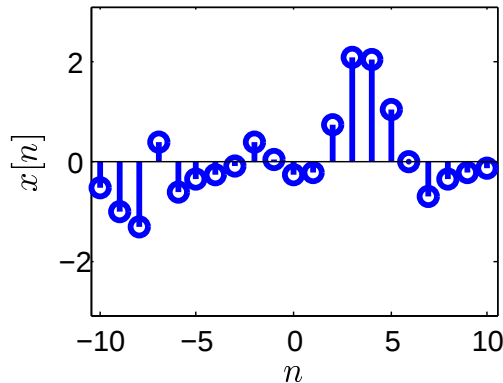
Seqüências Pares e Ímpares

Definições:

- Uma seqüência é **par** se $x[n] = x[-n], \forall n \in \mathbb{Z}$;
- Uma seqüência é **ímpar** se $x[n] = -x[-n], \forall n \in \mathbb{Z}$ e $x[0] = 0$.

Propriedades

- **Simetria:** seqüências **pares w.r.t. ordenadas**, enquanto as **ímpares w.r.t. origem**;
- **Decomposição:** $x[n] = x_{\text{par}}[n] + x_{\text{ímpar}}[n]$, com $x_{\text{par}}[n] = (x[n] + x[-n])/2$ e $x_{\text{ímpar}}[n] = (x[n] - x[-n])/2$;



Sistemas

Roteiro:

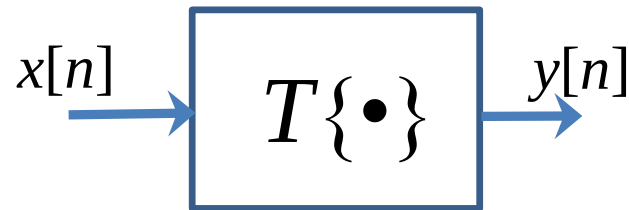
- ▶ Introdução
- ▶ Classificação de Sistemas
- ▶ Características de Sistemas a Tempo Discreto
- ▶ Exemplos de Sistemas a Tempo Discreto
- ▶ Resposta Impulsional
- ▶ Convolução
- ▶ Propriedades de Sistemas LTI

Introdução

Definição:

- ▶ Sistema é uma função (transformação, aplicação ou operador) cujo domínio e a imagem são conjuntos de sinais.
- ▶ Sistemas a tempo discreto são aqueles nos quais tanto o sinal de entrada quanto o sinal de saída são a tempo discreto.

Representação Entrada/Saída:



onde

$$y[n] = T\{x[n]\}$$

Sistema $\Leftrightarrow$ Processador de Sinais

Classificação de Sistemas a Tempo Discreto

Taxonomia Usual

- ▶ Linear vs. Não-Linear
- ▶ Com Memória vs. Sem Memória
- ▶ Causal vs. Não-Causal
- ▶ Estável vs. Instável
- ▶ Invariante no Tempo vs. Variante no Tempo

Sistemas Lineares / Não-Lineares

Definição:

- Um sistema é dito linear se, para $y_1[n] = T\{x_1[n]\}$ e $y_2[n] = T\{x_2[n]\}$,

$$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = ay_1[n] + by_2[n]$$

onde a e b são coeficientes escalares.

- A relação acima é chamada de **Princípio da Superposição** e engloba duas propriedades:
- **Aditividade** e **Escalabilidade** (ou **Homogeneidade**)
- O Princípio da Superposição pode ser generalizado para múltiplas entradas e saídas.
- Exemplos:
1. Sistema Atrasador: $y[n] = x[n - n_0]$, com n_0 inteiro positivo (Linear)
 2. Sistema Média-Móvel: $y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n - k]$ (Linear)
 3. $y[n] = (x[n])^3$ (Não-linear)
 4. $y[n] = \log_{10}(x[n])$, com $x[n] > 0$. (Não-linear)

Sistemas Com / Sem Memória

Definição:

- ▶ Um sistema é dito **sem memória** se sua saída $y[n]$ em qualquer instante n só depende do valor da entrada $x[n]$ medida no mesmo instante n .
- ▶ Exemplos:
 1. $y[n] = x[n - n_0]$ (Com Memória)
 2. $y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n - k]$ (Com Memória)
 3. $y[n] = x^3[n]$ (Sem Memória)
- ▶ Note que o termo “com memória” se aplica a sistemas cuja saída $y[n_0]$ depende de uma entrada futura $x[n_1 > n_0]$.

Sistemas Causal / Não-Causal

Definição:

- ▶ Um sistema é dito **CAUSAL** se sua saída $y[n]$, $\forall n$, depende de $x[k]$ para $k \leq n$ e/ou $y[k]$ para $k < n$, isto é, não depende de valores futuros da entrada e/ou saída.
- ▶ Um sistema causal é Não-Antecipativo.
- ▶ Exemplos:
 1. $y[n] = y[n-1] + 2x[n-1] - x[n-2]$ (Causal)
 2. $y[n] = \frac{1}{M_1+M_2+1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k]$ (Não-Causal)
 3. Diferença para frente: $y[n] = x[n+1] - x[n]$ (Não-Causal)
 4. Diferença para trás: $y[n] = x[n] - x[n-1]$ (Causal)

Definição de Estabilidade BIBO (*Bounded Input Bounded Output*)

- ▶ Um sistema é dito BIBO-estável se para **TODO** sinal de entrada $x[n]$ limitado, sua saída $y[n]$ também é limitada.
- ▶ **Conceito de limitação:** $s[n]$ é limitado se $s[n] \in \ell_\infty \Leftrightarrow \exists B_s < \infty : |s[n]| \leq B_s \quad \forall n$.
- ▶ Um sistema é BIBO-estável se $y[n] \in \ell_\infty$ para qualquer sinal $x[n] \in \ell_\infty$.
- ▶ Exemplos:
 1. $y[n] = x^2[n]$ (Estável)
 2. **Integrador:** $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$ (Instável)
 3. $y[n] = \log_{10}(x[n])$ (Instável)

Sistemas Invariantes / Variantes no Tempo

Definição:

- ▶ Um sistema é **Invariante no Tempo** se suas características funcionais se mantêm inalteradas ao longo do tempo.

Verificação de Invariância

- ▶ Excitar o sistema com um mesmo sinal de entrada em instantes de tempo diferentes.
- ▶ Verificar se as respostas do sistema são idênticas (a menos da defasagem temporal).
- ▶ **Em termos matemáticos:** se $y[n] = T\{x[n]\}$ e $x_1[n] = x[n - k]$, então:

$$y_1[n] = T\{x_1[n]\} = y[n - k], \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

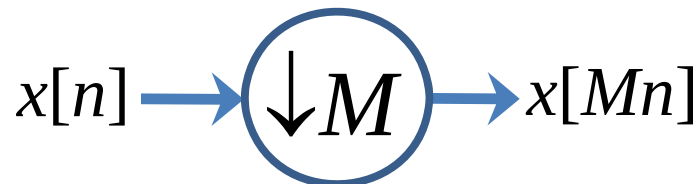
- ▶ Exemplos:

1. Sistema Compressor: $y[n] = x[Mn]$, com M inteiro positivo (Variante no Tempo)
2. $y[n] = x[n^2]$ (Variante no Tempo)
3. Integrador: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$ (Invariante no Tempo)

Teste TI para Sistema Compressor

Sistema Compressor: $T\{x[n]\} = y[n] = x[Mn]$

► Simbologia Usual



► Teste de Invariância Temporal:

- i. $x_1[n] = x[n - k]$ (Entrada original defasada no tempo arbitrariamente por k)
- ii. $T\{x_1[n]\} = x_1[Mn] = x[Mn - k]$ (Resposta do sistema a $x_1[n]$)
- iii. $y[n - k] = x[M(n - k)] = x[Mn - Mk]$ (Resposta do sistema a $x[n]$ atrasada de k)
- iv. $T\{x[n - k]\} \neq y[n - k], \forall k \in \mathbb{Z}$

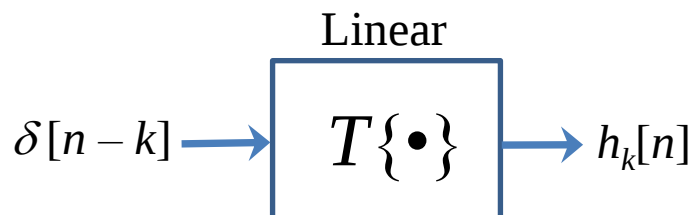
► Conclusão: o sistema compressor é **variante no tempo**.

► Causal? Estável?

Resposta Impulsional

Definição:

- ▶ É a saída de um sistema **linear** $y[n] = T\{x[n]\}$ ao impulso unitário aplicado no instante k , i.e., $x[n] = \delta[n - k]$.
- ▶ Notação: $h_k[n] = T\{\delta[n - k]\}$



- ▶ $h_k[n] = T\{\delta[n - k]\}$ é a RI que caracteriza o sistema linear com excitação impulsiva aplicada no instante $n = k$.
- ▶ Note que, para sistemas variantes no tempo, $h_k[n]$ pode mudar a cada k .
- ▶ Utilidade: Computar a saída de um sistema só sabendo de sua RI (sem info sobre a representação funcional)

Resposta Impulsional

Relação Entrada-Saída via RI

► Para $y[n] = T\{x[n]\}$ e lembrando que $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$, pode-se escrever

$$y[n] = T \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \right\}$$

e, pelo princípio da superposição ($T\{\cdot\}$ opera para funções de n),

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n]$$

► Se, além de linear, o sistema for **INVARIANTE NO TEMPO**, i.e. $T\{\delta[n-k]\} = h[n-k]$, tem-se que

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Relação Entrada-Saída via RI

Conclusões Importantes

- ▶ Um sistema linear e invariante no tempo (LTI) é completamente caracterizado por sua resposta impulsional $h[n]$;
- ▶ A resposta (saída $y[n]$) de um sistema LTI a um sinal arbitrário $x[n]$ é obtida através da chamada **Soma de Convolução**:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

- ▶ A soma de convolução acima também é chamada de convolução **LINEAR** discreta.

Soma de Convolução

Notação

- Usual: $y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$;
- Mais Precisa: $y[n] = (x * h)[n]$;

Considerações Práticas

- Para duas seqüências $x[n]$ e $h[n]$ de durações finitas L_x e L_h amostras, respectivamente, $y[n] = x[n] * h[n]$ tem duração de $L_y = L_x + L_h - 1$ amostras;
- Para duas seqüências de suporte temporal finito, a convolução equivale à multiplicação de dois polinômios cujos coeficientes dos termos de grau n são os elementos das seqüências correspondentes. Exemplo:
 - $x[n] = \{1_{\uparrow}, 2, 3\}$ implica $p_x(\lambda) = 1 + 2\lambda + 3\lambda^2$
 - $h[n] = \{1_{\uparrow}, 0, -1\}$ implica $p_h(\lambda) = 1 + 0\lambda + (-1)\lambda^2$
 - $p_x(\lambda)p_h(\lambda) = 1 + 2\lambda + 2\lambda^2 - 2\lambda^3 - 3\lambda^4$, logo $y[n] = x[n] * h[n] = \{1_{\uparrow}, 2, 2, -2, -3\}$

Propriedades de Sistemas LTI

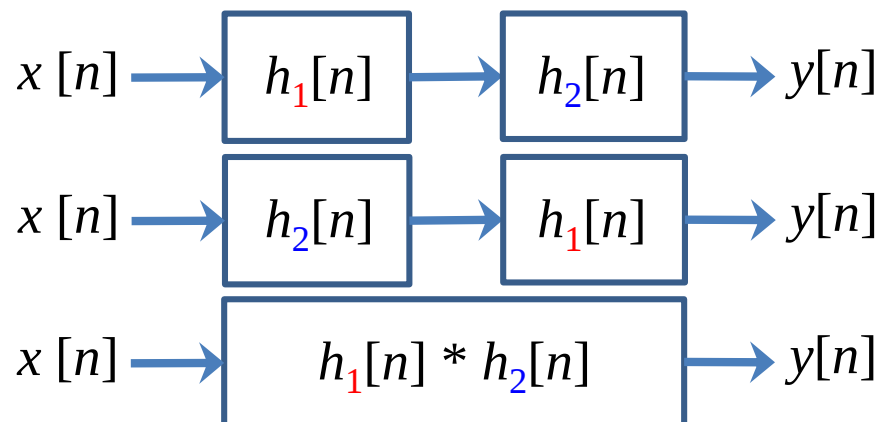
Ligação em Série

► Comutativa:

- $h[n] = h_1[n] * h_2[n] = h_2[n] * h_1[n]$
- $y[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = x[n] * (h_2[n] * h_1[n])$

► Associativa:

- $y[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$

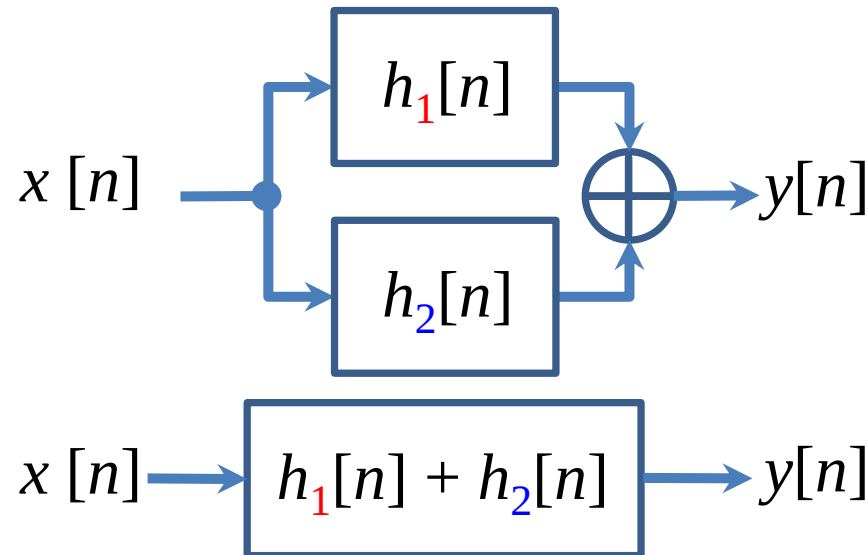


Propriedades de Sistemas LTI

Ligação em Paralelo

► Distributiva:

- $h[n] = h_1[n] + h_2[n]$
- $y[n] = x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$



Propriedades de Sistemas LTI

Proposição 1 : *Um sistema LTI é BIBO-ESTÁVEL s.s.s. $h[n] \in \ell_1$, i.e.*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty .$$

Proposição 2 : *Um sistema LTI é CAUSAL s.s.s. $h[n]$ é nula para todos os instantes de tempo negativos, i.e.*

$$h[n] = 0, \quad \forall n < 0 .$$

Note que se o sistema for causal, então $h[n - a] = 0$ para todo $n < a$, com $a \in \mathbb{N}$.

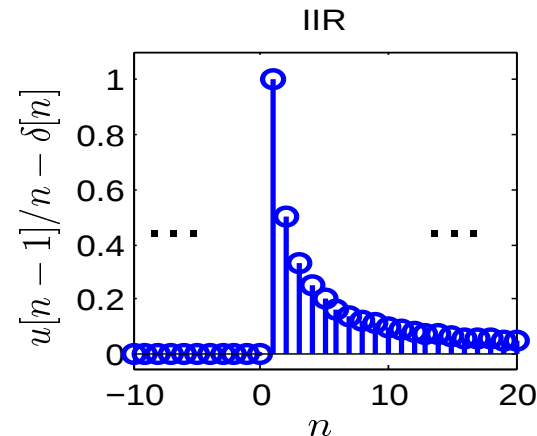
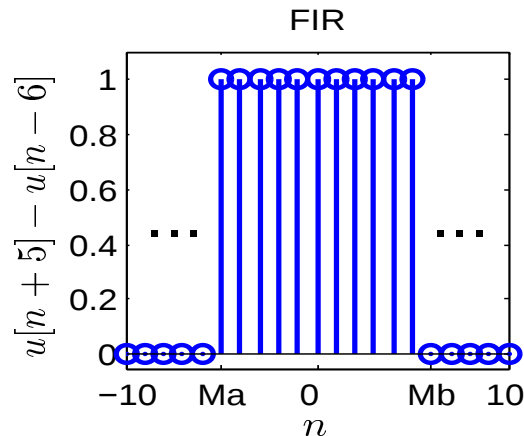
Definição de Sistemas FIR

- Um sistema é dito FIR (*Finite Impulse Response*) se sua resposta impulsiva tiver suporte temporal finito, i.e.

$$h[n] = 0, \quad \forall n \ni [M_a, M_b], \quad \text{com } M_b > M_a.$$

Definição de Sistemas IIR

- Um sistema é dito IIR (*Infinite Impulse Response*) se sua resposta impulsiva tiver suporte temporal infinito.



Respostas Impulsivas Usuais

Operador	Resposta ao Impulso	Observações
Atrasador Ideal	$h[n] = \delta[n - n_d]$, com $n_d \in \mathbb{Z}^+$	FIR, Causal, Estável
Integrador	$h[n] = u[n]$	IIR, Causal, Instável
Diferença a frente	$h[n] = \delta[n + 1] - \delta[n]$	FIR, Não-Causal, Estável
Diferença a trás	$h[n] = \delta[n] - \delta[n - 1]$	FIR, Causal, Estável
Média Móvel	$h[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} \delta[n - k]$	FIR, Não-Causal ($M_1 > 0$), Estável

Seqüências Inversas

Definição:

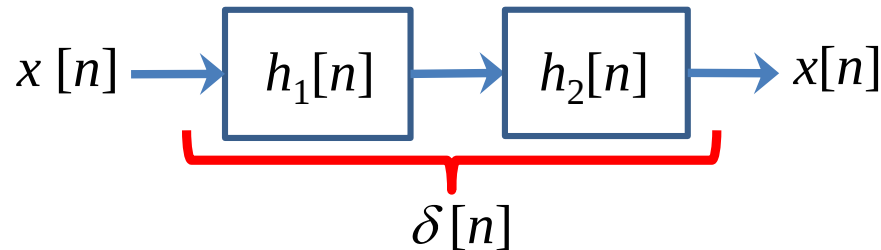
- Duas seqüências $h_1[n]$ e $h_2[n]$ são ditas inversas se

$$h_1[n] * h_2[n] = \delta[n].$$

- Diz-se que $h_1[n]$ é o **sistema inverso** de $h_2[n]$ e vice-versa.

- Exemplo:

- Integrador e diferença a trás



- Na prática, admite-se que $h_1[n] * h_2[n] = \delta[n - n_0]$, i.e., o sistema resultante também atrasa a seqüência de entrada.

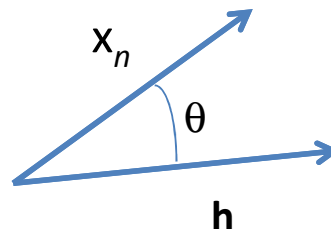
Discussão: Convolução como Correlação

Estudo de Caso: $h[n]$ FIR, causal, com M coeficientes

► $y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k]$

► Pode-se escrever a expressão acima como um produto interno vetorial

$$y[n] = \langle \mathbf{h}, \mathbf{x}_n \rangle = \|\mathbf{h}\| \|\mathbf{x}_n\| \cos(\theta)$$



► Para vetores pré-normalizados, i.e. $\tilde{\mathbf{h}} = \frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}$ e $\tilde{\mathbf{x}}_n = \frac{\mathbf{x}_n}{\|\mathbf{x}_n\|}$ tem-se

$$\tilde{y}[n] = r_{\mathbf{h}\mathbf{x}_n} = \langle \tilde{\mathbf{h}}, \tilde{\mathbf{x}}_n \rangle = \cos(\theta) \in [-1, 1]$$

► $r_{\mathbf{h}\mathbf{x}_n}$ mede o coeficiente de correlação entre $\mathbf{h}$ e $\mathbf{x}_n$.

Equações de Diferenças (EDs)

Fundamentos Gerais

- ▶ “Análogas” a equações diferenciais para representação de sistemas em tempo contínuo.
- ▶ Governam a relação entrada-saída do sistema.
- ▶ Representação **GERAL** de um sistema SISO via EDs

$$\sum_{k=0}^N a_k[n]y[n-k] = \sum_{m=0}^M b_m[n]x[n-m]$$

onde $a_k[\cdot]$ e $b_m[\cdot]$ são os coeficientes (variantes no tempo) do modelo, sendo $x[n]$ e $y[n]$ a entrada e a saída do sistema, respectivamente.

- ▶ Observações:
 - No curso será abordado o caso em que os coeficientes $a_k[\cdot]$ e $b_m[\cdot]$ são constantes, i.e.

$$a_k[n] = a_k \text{ e } b_m[n] = b_m, \forall n.$$

EDs com Coeficientes Constantes

Fundamentos

- Assumindo, sem perda de generalidade, que $a_0 = 1$, pode-se escrever

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{m=0}^M b_m x[n-m]$$

- A representação via ED indica como implementar um sistema na forma direta.
- Quando $N = 0$, a saída $y[n]$ no instante n só depende de $M + 1$ amostras da entrada $x[n]$, em instante igual ou anterior a n . Diz-se então que o sistema tem **implementação não-recursiva**.
- Quando $N > 0$, a saída $y[n]$ no instante n também depende de N amostras anteriores da saída. Diz-se então que o sistema tem **implementação recursiva**.
- Um mesmo sistema pode admitir implementação recursiva quanto não-recursiva. Exemplo: sistema média-móvel.

EDs com Coeficientes Constantes

Exemplo: Acumulador

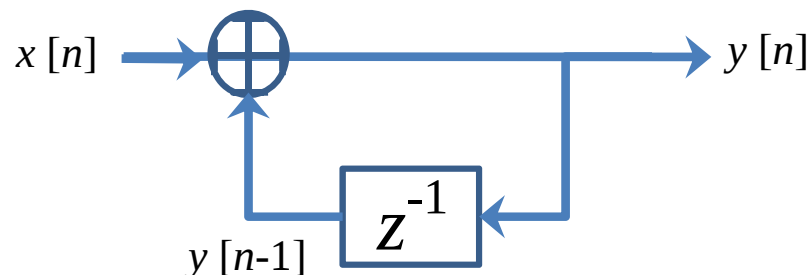
► $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k].$

– O somatório dependente de n e desde $-\infty$ é inconveniente para implementações práticas.

► Formulação (recursiva) via EDs: $y[n] = y[n - 1] + x[n]$

– **Interpretação:** a saída do acumulador no instante n é o valor acumulado até $n - 1$ acrescido da nova amostra de entrada em n .

– Note que $N = 1$, $M = 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ e $b_0 = 1$.



EDs com Coeficientes Constantes

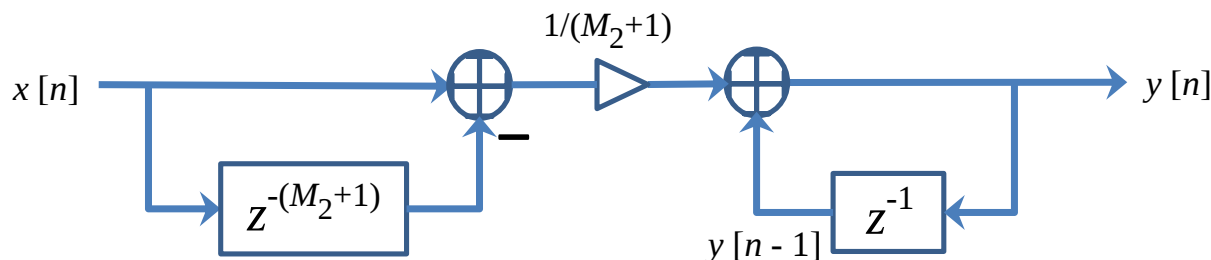
Exemplo: Sistema Média-Móvel (Causal)

► $y[n] = \frac{1}{M_2+1} \sum_{k=0}^{M_2} x[n-k].$

– Já está na forma de uma ED: $N = 0$, $M = M_2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ e $b_k = \frac{1}{M_2+1}$.

► Forma recursiva: $y[n] = y[n-1] + \frac{1}{M_2+1}(x[n] - x[n-(M_2+1)]).$

– **Interpretação:** a saída do sistema no instante n é igual a do no instante $n-1$ descontando-se a contribuição da amostra mais antiga (da janela do somatório) e acrescentando a contribuição da amostra mais recente.



Solução de Equações de Diferenças

Objetivo

- ▶ Encontrar $y[n]$ para uma dada $x[n]$ e um conjunto de condições iniciais (ou auxiliares).

Formas Disponíveis

- ▶ Método Direto: por inspeção;
- ▶ **Método Analítico**
- ▶ Método Indireto: via transformada- Z unilateral (a ser abordado mais a frente)

Observações Iniciais

- ▶ Como no caso contínuo, uma ED admite infinitas soluções, caso não sejam estabelecidas condições iniciais.
- ▶ Sozinha, uma ED não especifica unicamente a saída de um sistema a uma dada entrada.
- ▶ **Especificadas condições iniciais e uma entrada $x[n]$, a solução é única (Teorema da Existência e Unicidade).**

Solução de EDs

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{m=0}^M b_m x[n-m]$$

Solução Geral como a Soma da Homogênea com a Particular

- Suponha que $y_p[n]$ seja uma solução *particular* da ED para um certo $x_p[n]$.
- Assumindo que $y_h[n]$ também é uma solução da ED para $x[n] = 0$ (entrada-nula): pode-se verificar que $y[n] = y_p[n] + y_h[n]$ também é uma solução da ED para $x_p[n]$.
- A versão da ED quando $x[n] = 0$ é chamada de **Equação Homogênea**:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = 0$$

Solução de ED Homogênea

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n - k] = 0$$

Considerações

- ▶ A ED homogênea define o comportamento intrínseco do sistema (independente da entrada).
- ▶ Como a entrada é nula, a saída depende do status de variáveis internas do sistema.
- ▶ A ED homogênea tem N graus de liberdade. Logo, sua solução requer N condições iniciais conhecidas.
- ▶ Os a_k são CONHECIDOS e as condições iniciais são um subconjunto de valores de $y[n]$.
- ▶ Em outras palavras, há que se conhecer parte da “história” da solução do sistema em N instantes de tempo para resolver $y[n]$ para todos os outros instantes.

ED Homogênea – Cálculo Recursivo de $y[n]$

Condições Auxiliares (CAs)

- ▶ $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$.

Cálculo de $y[n]$ para $n \geq 0$

- ▶ Com a ED na forma original (slide anterior), resolver para $y[n = 0]$.
- ▶ Incorporar o último valor calculado $y[n]$ às CAs e resolver a ED para $y[n + 1]$.
- ▶ Continuar a recursão até encontrar “todos” o valores de $y[n]$ para $n \geq 0$.
- ▶ Para ED simples, alguma lei de formação acaba sendo evidenciada durante a recursão.

Cálculo de $y[n]$ para $n < -N$

- ▶ Fazer mudança de variável $t = n - N$ na ED: $\sum_{k=0}^N \frac{a_{N-k}}{a_N} y[t + k] = 0$.
- ▶ Com essa ED modificada e as CAs, resolver para $y[t = -N - 1]$.
- ▶ Incorporar o último valor calculado $y[t]$ às CAs e resolver a ED para $y[t - 1]$.
- ▶ Continuar a recursão até encontrar “todos” o valores de $y[n]$, para $n < -N$.

Exemplo: Solução de ED Homogênea

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = 0$$

Ordem: $N = 2$, com $a_0 = 1$, a_1 e a_2 conhecidos

► **Condições Auxiliares:** $y[-1] = A$ e $y[-2] = B$

Recursão para $n \geq 0$

► $y[n] = -a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2]$

$$\begin{array}{lll} n = 0 : & y[0] & = -a_1 A - a_2 B \\ n = 1 : & y[1] & = -a_1 y[0] - a_2 A \\ n = 2 : & y[2] & = -a_1 y[1] - a_2 y[0] \\ & \vdots & \vdots \end{array}$$

Recursão para $t \leq -3$

► $y[t] = -\frac{a_1}{a_2} y[t+1] - \frac{a_0}{a_2} y[t+2]$

$$\begin{array}{lll} t = -3 : & y[-3] & = -\frac{a_1}{a_2} B - \frac{a_0}{a_2} A \\ t = -4 : & y[-4] & = -\frac{a_1}{a_2} y[-3] - \frac{a_0}{a_2} B \\ t = -5 : & y[-5] & = -\frac{a_1}{a_2} y[-4] - \frac{a_0}{a_2} y[-3] \\ & \vdots & \vdots \end{array}$$

Solução para ED Geral – Cálculo Recursivo de $y[n]$

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] + \sum_{m=0}^M b_m x[n-m] = 0$$

Segue os passos da solução da ED Homogênea (via recursão)

► Na prática, consideram-se nulos os valores da entrada para $n < 0$ ou $n < n_0$.

► Ex.: $y[n] = -a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] + x[n-1]$

$n = 0 :$	$y[0]$	$=$	$-a_1 A - a_2 B + 0$
$n = 1 :$	$y[1]$	$=$	$-a_1 y[0] - a_2 A + x[0]$
$n = 2 :$	$y[2]$	$=$	$-a_1 y[1] - a_2 y[0] + x[1]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Discussão: Solução para ED Geral

Estudo de Caso: $y[n] = ay[n - 1] + x[n]$

► CA: $y[-1] = C \neq 0$

► Pode-se mostrar que $y[n] = a^{(n+1)}C + \sum_{i=0}^n a^{n-i}x[i]$

► O sistema é BIBO-Estável? É LINEAR? É INVARIANTE NO TEMPO?

- A estabilidade depende de a : para $0 < a < 1$ é estável, mas para $a > 1$ não é.
- A linearidade é atendida: vale o Princípio da Superposição para CAs nulas.
- O sistema é invariante no tempo: os coeficientes da ED são constantes. Também atende a $T\{x[n - k]\} = y[n - k], \forall k \in \mathbb{Z}$, para CAs nulas e $x[n] = 0, n < 0$.

Solução Não-Recursiva de ED Homogênea

$$y_h[n] + \sum_{k=1}^N a_k y_h[n-k] = 0$$

Intuição:

- Uma combinação de exponenciais complexas deve satisfazer a ED homogênea
- Note que se $y[n] = A\alpha^n$, então $y[n - n_0] = \alpha^{-n_0} A\alpha^n$ (auto-função)
- Se o polinômio característico da ED homogênea tiver raízes distintas α_i , a solução geral é na forma

$$y_h[n] = \sum_{i=1}^N A_i \alpha_i^n$$

- **Problema:** encontrar A_i e α_i

Solução Não-Recursiva de ED Homogênea

Procedimento:

► Obtenção de α_i :

- São as raízes distintas (possivelmente complexas) do polinômio característico da ED

$$p(\lambda) = \sum_{k=0}^N a_k \lambda^{-k} = \prod_{i=1}^N (1 - \alpha_i \lambda^{-1}) = 0$$

► Obtenção de A_i :

- Conhecidos os α_i , os valores de A_i são obtidos pela solução de um sistema linear de equações, para o qual N valores de $y_h[n]$ são fornecidos (CAs).
- O procedimento é similar para o caso de raízes de $p(\lambda)$ com multiplicidade maior que 1.

Solução Não-Recursiva de ED Homogênea

Procedimento para $p(\lambda)$ com raízes de multiplicidade maior que 1

- **Obtenção de α_i :** via as raízes de $p(\lambda)$, como antes;
- **Obtenção de A_i , conhecendo as raízes α_i :**
 - Suponha, sem perda de generalidade, que α_1 seja de multiplicidade $m \leq N$ e as demais α_i para $i = m + 1, \dots, N$ sejam distintas
 - Escrever a solução como:

$$y_h[n] = \sum_{l=1}^m A_l n^{l-1} \alpha_1^n + \sum_{i=m+1}^N A_i \alpha_i^n$$

- Obter os valores de A_i pela solução de um sistema linear de equações, para o qual N valores de $y_h[n]$ são fornecidos (CAs).
- O procedimento acima pode ser generalizado para caso de mais de uma raiz com multiplicidade maior que 1.

Método Não-Recursivo para Solução PARTICULAR da ED

$$\sum_{k=0}^N a_k y_p[n - k] = \sum_{m=0}^M b_m x[n - m], \quad a_0 = 1$$

Objetivo:

- Encontrar $y_p[n]$ para um dado $x[n]$

Procedimento (outline):

- Assumir que $y_p[n]$ tem forma similar à de $x[n]$. Exemplos:
 - $x[n] = Cu[n]$, sendo C uma constante: modela-se $y_p[n] = Ku[n]$, com parâmetro K .
- Resolver o sistema de equações para determinar o(s) parâmetro(s) do modelo de para $y_p[n]$.

Auto-função

Definição: $\mathcal{A}f = \lambda f$

- ▶ $\mathcal{A}$ é um operador linear em um espaço de funções
- ▶ f é qualquer função não-nula no espaço de funções
- ▶ λ é um fator multiplicativo
- ▶ f é uma auto-função de $\mathcal{A}$ se vale a equação acima: λ chamado de auto-valor de $\mathcal{A}$.

Perspectiva de Sistemas LTI

- ▶ $\mathcal{A}$ é o próprio sistema (operador $T\{\cdot\}$)
- ▶ f é um sinal não-nulo $x[n]$ aplicado à entrada do sistema
- ▶ $T\{x[n]\} = \lambda x[n]$
- ▶ **Interpretação:** $x[n]$ é uma auto-função do sistema $T\{\cdot\}$ se sua saída replica a entrada, a menos de um fator de escala (possivelmente complexo).
- ▶ Vale o princípio da superposição: se $s[n] = \sum_l b_l x_l[n]$, então $y[n] = \sum_l \lambda_l b_l x_l[n]$

Auto-função

Exemplo: $x[n] = e^{j\omega n}$

► $x[n]$ é auto-função de um sistema LTI com RI $h[n]$?

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)} \\ &= e^{j\omega n} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} \right) \end{aligned}$$

Definindo-se

$$H(e^{j\omega}) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} \right)$$

Tem-se

$$y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

- $H(e^{j\omega})$ é complexo e função contínua em $\omega \in \mathbb{R}$ (não é função de n).
- $x[n] = e^{j\omega n}$ é auto-função de um sistema LTI
- $H(e^{j\omega})$ é o auto-valor correspondente

Auto-função

Interpretação de $H(e^{j\omega})$

- ▶ $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| \angle H(e^{j\omega})$, onde $\angle \equiv \arg(\cdot)$
- ▶ $|H(e^{j\omega})|$: o quanto o sistema atenua a magnitude da componente $e^{j\omega n}$
- ▶ $\angle H(e^{j\omega})$: o quanto o sistema atrasa a fase da componente $e^{j\omega n}$
- ▶ $H(e^{j\omega})$ avaliado em uma dada faixa de ω é o que se chama resposta em frequência do sistema (a ser estudada mais a frente)

Caso Geral: Auto-função $x[n] = (re^{j\omega})^n$, com $z = re^{j\omega} \in \mathbb{C}$

- ▶ $y[n] = z^n \sum_k h[k]z^{-k}$, sendo o auto-valor definido como $H(z) = \sum_k h[k]z^{-k}$

A Transformada- z é um operador $\mathcal{Z}\{\cdot\}$ que mapeia $h[n]$ em $H(z)$

Transformada- z

Observações Iniciais

- ▶ Operador similar à transformada de Laplace no caso contínuo.
- ▶ Útil na análise de sistemas discretos representados por EDs.

Definição

- ▶ A transformada- z de um sinal a tempo discreto $x[n]$ **é definida** como a série de potências (Laurent):

$$x[n] \longleftrightarrow \mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}, \quad z \in \mathbb{C}$$

- ▶ Notação para a correspondência entre $x[n]$ e sua transformada- z : $x[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)$
- ▶ A transformada- z acima é dita bi-lateral (varre todo n)
- ▶ $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$ é chamada de uni-lateral (definida para $n \geq 0$)
 - Útil para a solução de EDs com condições iniciais

Transformada- z : Alguns Exemplos

Estudo de Caso 1: $x[n] = \delta[n]$

- Pela definição: $\mathcal{Z}\{\delta[n]\} = \sum_n \delta[n]z^{-n} = 1$

Estudo de Caso 2: $x[n] = \delta[n - 1]$

- Pela definição: $\mathcal{Z}\{\delta[n - 1]\} = \sum_n \delta[n - 1]z^{-n} = z^{-1}$
- Explica a simbologia usada para o Sistema Atrasador: $h[n] = \delta[n - 1] \xrightarrow{\mathcal{Z}} H(z) = z^{-1}$
- $H(z) = z^{-1}$ existe para todo z ?

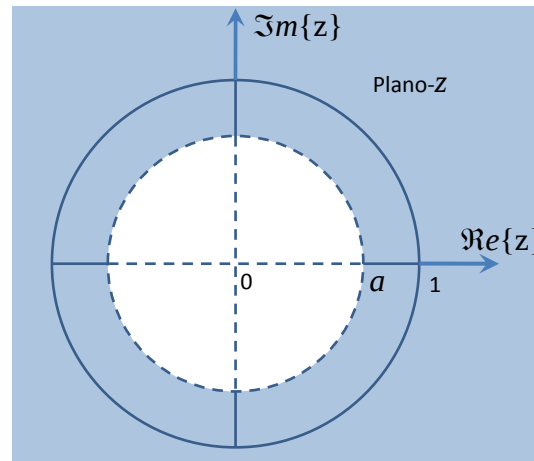
Certamente não existe para $z = 0$.

Transformada- z : Alguns Exemplos

Estudo de Caso 3: $x[n] = a^n u[n]$, com $a \neq 0 \in \mathbb{R}$

- ▶ Pela definição: $\mathcal{Z}\{a^n u[n]\} = \sum_n a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$
- ▶ $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n$ pode ser visto como **a soma de uma PG infinita** de razão-comum $\left(\frac{a}{z}\right)$
- ▶ **$X(z)$ só converge se $\left|\frac{a}{z}\right| < 1$** . Logo, se $|z| > |a|$, então

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$



- ▶ Para $|a| > 1$, a sequência $x[n]$ diverge. Ainda assim, $X(z)$ converge, se $|z| > |a|$!

Em geral, como saber em que região do Plano- z garante-se a convergência de $X(z)$?

Transformada- z : Região de Convergência

Definição:

- ▶ A **Região de convergência (RDC)** é o domínio de existência de $X(z)$ no plano complexo, i.e., os valores de $z \in \mathbb{C}$ para os quais a série $X(z)$ converge.
- ▶ Considerando a forma polar $z = re^{j\omega}$, com $r = |z|$:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n}.$$

- ▶ **Condição para convergência:** a série tem que ser absolutamente somável

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n} \right| < \infty.$$

- ▶ Pela desigualdade $\left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}e^{-j\omega n}|$ e $|e^{-j\omega n}| = 1$:

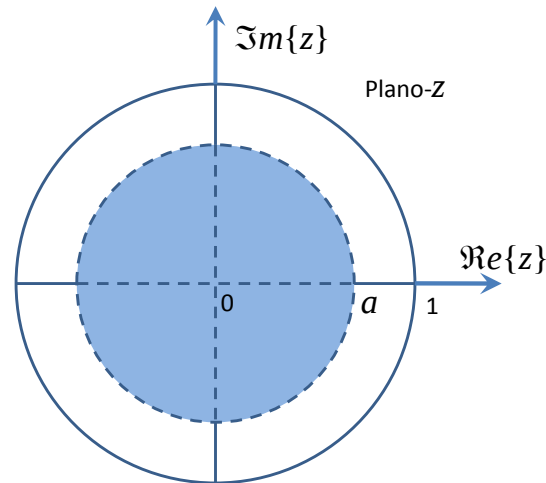
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty.$$

RDC da Transformada- z : Mais Exemplos

Estudo de Caso 4: $x[n] = -a^n u[-n - 1]$, com $a \neq 0 \in \mathbb{R}$

- ▶ Pela definição: $X(z) = -\sum_n a^n u[-n - 1] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} \stackrel{n \rightarrow (-n)}{=} -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n$
- ▶ $X(z) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n$
- ▶ Condição de Convergência: $\left|\frac{z}{a}\right| < 1$
- ▶ $X(z)$ só converge se $|z| < |a|$. Neste caso,

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1 - za^{-1}} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$



- ▶ Mesma expressão algébrica para a $X(z)$ de $x[n] = a^n u[n]$?

Conclusões Importantes

- ▶ Sequências “diferentes” podem ter a mesma expressão algébrica para a transformada- z .
- ▶ A transformada- z de um sinal $x[n]$ só é completamente definida quando se especifica:
 - A expressão algébrica de $X(z)$ e
 - A região de convergência (RDC)

Algumas Antecipações

- ▶ A RI $h[n]$ de um sistema LTI é uma seqüência. Logo pode admitir uma $H(z)$.
- ▶ Dois sistemas com $h[n]$ distintas podem ter a mesma expressão algébrica para $H(z)$.
- ▶ A RDC de uma $H(z)$ tem relação com a Causalidade e a Estabilidade do sistema.

Pares Comuns de Transformada- z

Signal, $x[n]$	Z-transform, $X(z)$	ROC	Signal, $x[n]$	Z-transform, $X(z)$	ROC
$\delta[n]$	1	all z	$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $
$\delta[n - n_0]$	z^{-n_0}	$z \neq 0$	$-a^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a $
$u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$	$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $
$-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z < 1$	$-na^n u[-n - 1]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z < a $
$nu[n]$	$\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$	$ z > 1$	$n^2 a^n u[n]$	$\frac{az^{-1}(1 + az^{-1})}{(1 - az^{-1})^3}$	$ z > a $
$-nu[-n - 1]$	$\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$	$ z < 1$	$-n^2 a^n u[-n - 1]$	$\frac{az^{-1}(1 + az^{-1})}{(1 - az^{-1})^3}$	$ z < a $
$n^2 u[n]$	$\frac{z^{-1}(1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})^3}$	$ z > 1$	$\cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - z^{-1} \cos(\omega_0)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_0) + z^{-2}}$	$ z > 1$
$-n^2 u[-n - 1]$	$\frac{z^{-1}(1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})^3}$	$ z < 1$	$\sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{z^{-1} \sin(\omega_0)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_0) + z^{-2}}$	$ z > 1$
$n^3 u[n]$	$\frac{z^{-1}(1 + 4z^{-1} + z^{-2})}{(1 - z^{-1})^4}$	$ z > 1$	$a^n \cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - az^{-1} \cos(\omega_0)}{1 - 2az^{-1} \cos(\omega_0) + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $
$-n^3 u[-n - 1]$	$\frac{z^{-1}(1 + 4z^{-1} + z^{-2})}{(1 - z^{-1})^4}$	$ z < 1$	$a^n \sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{az^{-1} \sin(\omega_0)}{1 - 2az^{-1} \cos(\omega_0) + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $

Transformada- z

Pólos e Zeros

- ▶ Em muitos casos $X(z)$ é uma função racional de z :

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

- ▶ **Pólos:** Raízes de $D(z)$

- ▶ **Zeros:** Raízes de $N(z)$

- ▶ **Interpretação:**

- ◇ Os **ZEROS** de $X(z)$ são os valores de z para os quais $X(z) = 0$.

- ◇ Os **PÓLOS** de $X(z)$ são os valores **finitos** de z para os quais $X(z) \rightarrow \infty$.

- ▶ *A localização dos pólos de $X(z)$ no plano- z impõe limites à RDC de $X(z)$.*

- ▶ $X(z)$ é completamente caracterizada por seus pólos, zeros e o ganho em dado $z = z_0$, i.e. $X(z_0)$, com z_0 pertencente à RDC.

Propriedades da RDC

- P1: Em geral, a RDC é um anel no plano- z centrado na origem: $0 \leq r_R < |z| < r_L \leq \infty$.
- P2: **A RDC não pode conter nenhum pólo.**
- P3: Para uma sequência $x[n]$ com **suporte temporal finito**, a RDC de $X(z)$ cobre todo o plano- z , com exceção possivelmente em $z = 0$ e $z = \infty$.
- P4: Para uma sequência $x[n]$ *lateral-direita*, a RDC de $X(z)$ se estende radialmente se afastando da origem a partir do (excluindo) raio $r_{\text{máx}}$ do pólo **finito** de maior magnitude: $|z| > r_{\text{máx}}$ e possivelmente incluindo $z = \infty$.
- P5: Para uma sequência $x[n]$ *lateral-esquerda*, a RDC de $X(z)$ se estende radialmente em direção à origem a partir do (excluindo) raio $r_{\text{mín}}$ do pólo não-nulo de menor magnitude: $|z| < r_{\text{mín}}$ e possivelmente incluindo $z = 0$.
- P6: Para uma sequência *bi-lateral*, a RDC de $X(z)$, caso exista, é um anel no plano- z delimitado inferior e superiormente por pólos de $X(z)$, sem conter (P2) nenhum pólo.
- P7: A RDC tem que ser uma região conectada.

Propriedades da Transformada- z

Considerações Iniciais e Notação

► Geral: $x[n] \xleftrightarrow{z} X(z)$, com $\text{RDC} = R_x$

► Para duas seqüências:

$$x_1[n] \xleftrightarrow{z} X_1(z), \quad \text{com RDC} = R_{x_1}$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{z} X_2(z), \quad \text{com RDC} = R_{x_2}$$

Linearidade

► Para a e b escalares:

$$\text{► } ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{z} aX_1(z) + bX_2(z), \quad \text{com RDC} \supset R_{x_1} \cap R_{x_2}$$

Deslocamento Temporal

$$\text{► } x[n - n_0] \xleftrightarrow{z} z^{-n_0} X(z), \quad \text{com RDC} = R_x \text{ (exceto pela inclusão ou exclusão de } z = 0 \text{ ou } z = \infty)$$

Propriedades da Transformada- z

Multiplicação por Sequência Exponencial (Modulação)

- ▶ $z_0^n x[n] \xleftrightarrow{Z} X\left(\frac{z}{z_0}\right)$, com RDC = $|z_0|R_x$
- ▶ A localização dos pólos e zeros é escalada por z_0 .
 - Para $z_0 \in \mathbb{R}$: **contração/expansão radial** do plano- z
 - Para $z_0 \in \mathbb{C}$: contração/expansão radial e **rotação** do plano- z

Diferenciação de $X(z)$

- ▶ $nx[n] \xleftrightarrow{Z} -z \frac{dX(z)}{dz}$, com RDC = R_x

Conjugação de Sequência Complexa

- ▶ $x^*[n] \xleftrightarrow{Z} X^*(z^*)$, com RDC = R_x

Propriedades da Transformada- z

Reversão Temporal

- ▶ $x[-n] \xleftrightarrow{z} X\left(\frac{1}{z}\right)$, com $\text{RDC} = \frac{1}{R_x}$
- ▶ Efeito da reversão temporal: um pólo (ou zero) de $X(z)$ em $re^{j\omega}$ é mapeado em $\frac{1}{r}e^{-j\omega}$.

Convolução de Sequências

- ▶ $x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{z} X_1(z)X_2(z)$, com $\text{RDC} \supset R_{x_1} \cap R_{x_2}$
- ▶ Resultado importante para a análise de sistemas LTI.

Teorema do Valor Inicial

- ▶ Se $x[n]$ é “causal” ($x[n] = 0, n < 0$), então

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

Discussão

Auto-função e a Transformada- z

- ▶ A Transformada- z generaliza a representação complexa de $h[n]$, i.e. $H(e^{j\omega})$ da circunferência unitária para todo o plano complexo $H(z = re^{j\omega})$.
- ▶ $H(z)$ é o auto-valor de $h[n]$ para a auto-função $x[n] = r^n e^{j\omega n}$.

Atrasador e a Transformada- z

- ▶ Sejam a auto-função $x[n] = r^n e^{j\omega n}$ e a **RI** $h[n] = \delta[n - n_0]$

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_k h[k] x[n - k] \\ &= \sum_k \delta[k - n_0] r^{(n-k)} e^{j\omega(n-k)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{k=n_0}{=} r^{(n-n_0)} e^{j\omega(n-n_0)} \\ &= r^n e^{j\omega n} (r e^{j\omega})^{-n_0} \\ &= r^n e^{j\omega n} H(z) \end{aligned}$$

- ▶ Como $z = r e^{j\omega}$, tem-se **$H(z) = z^{-n_0}$**

Discussão

Seqüência Arbitrária e a Transformada- z

► Lembrando que:

$$x[n] = \sum_k x[k] \delta[n - k]$$

$$\Updownarrow \mathcal{Z}$$

$$X(z) = \sum_k x[k] z^{-k}$$

► É a própria definição da Transformada- z !

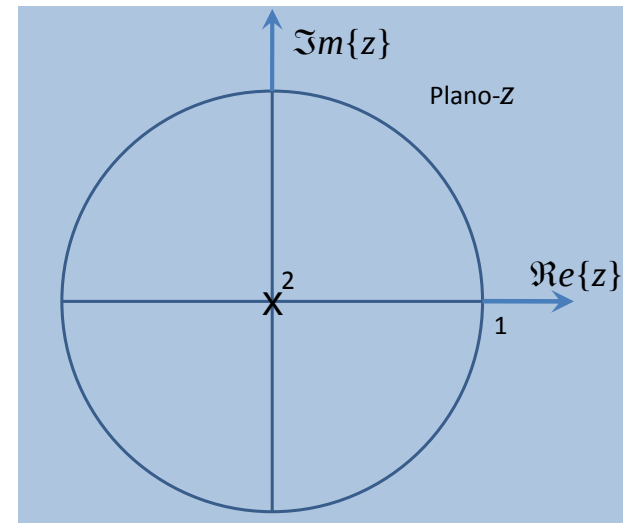
Exemplos

Seqüência de Suporte Temporal Finito

► $x[n] = \sum_{k=-3}^2 c_k \delta[n - k] \xleftrightarrow{z} X(z) = c_{-3}z^3 + c_{-2}z^2 + c_{-1}z^1 + c_0 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2}$

► **RDC de $X(z)$?** Há pelo menos um pólo em $z = 0$ e outro em $z = \infty$.

$$X(z) = \frac{c_{-3}z^5 + c_{-2}z^4 + c_{-1}z^3 + c_0z^2 + c_1z^1 + c_2}{z^2}$$

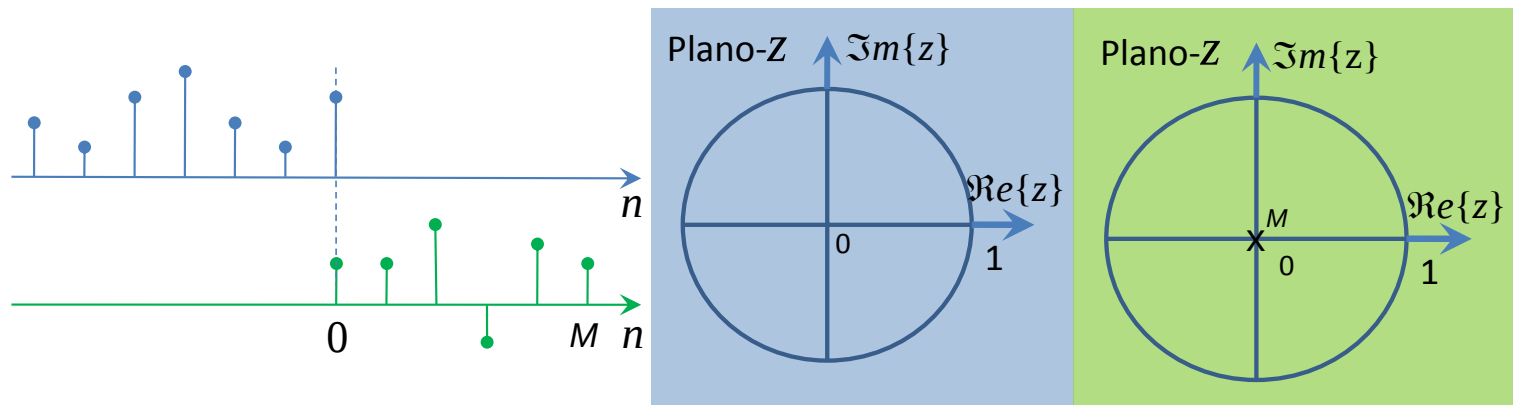


- **Do slide 90:** “Para uma seqüência $x[n]$ com suporte temporal finito, a RDC de $X(z)$ cobre todo o plano- z , com exceção possivelmente em $z = 0$ e $z = \infty$.”
- **Do slide 91:** “ $ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{z} aX_1(z) + bX_2(z)$, com $RDC \supset R_{x_1} \cap R_{x_2}$.”

Exemplos

Seqüência de Suporte Temporal Finito

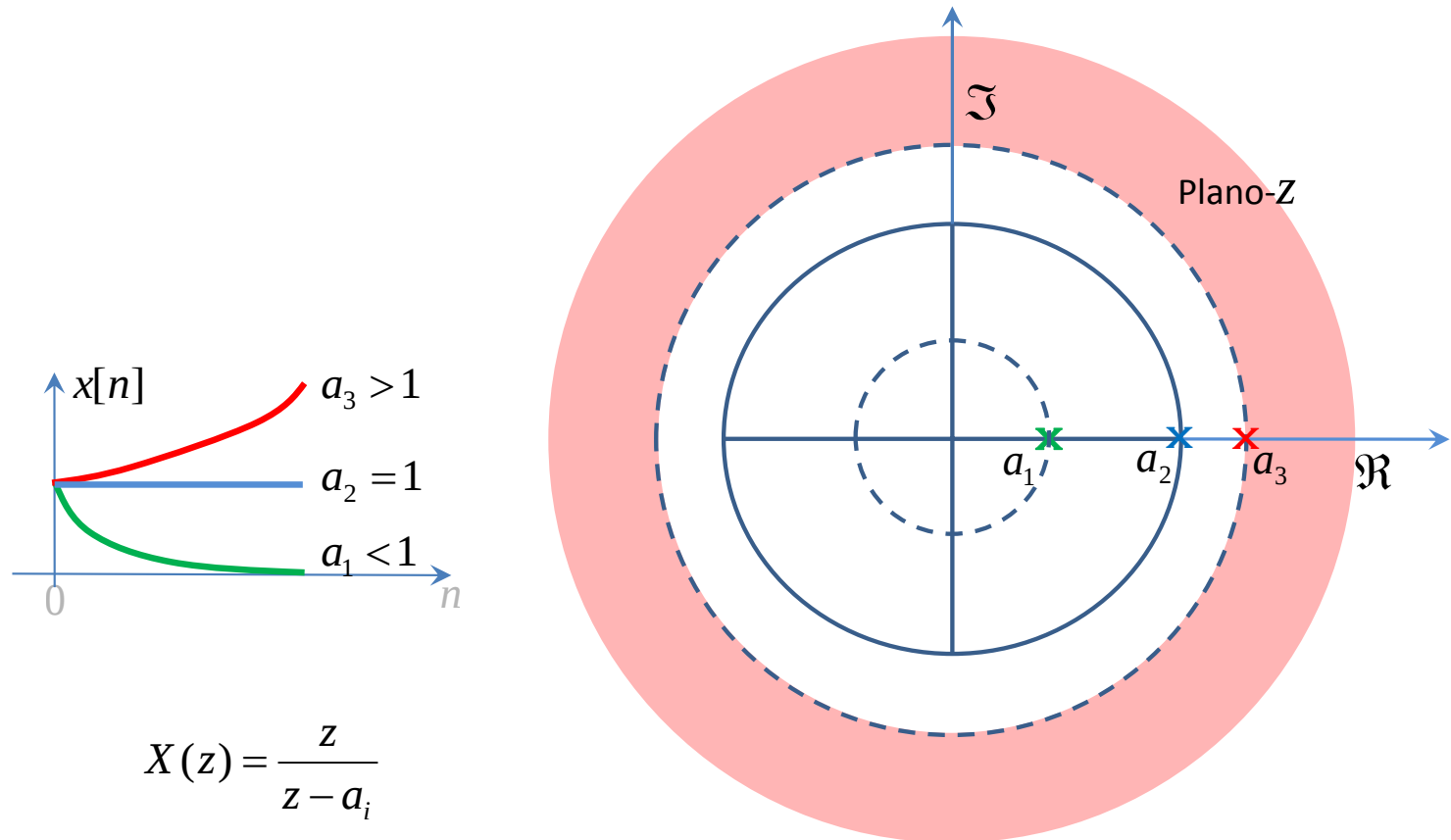
- Se $x[n] = 0$ para $n < 0$, i.e. é “causal”, então RDC exclui a origem do plano- z .
- Se $x[n] = 0$ para $n > 0$, i.e. “não-causal”, então RDC no plano- z exclui $z = \infty$.



- Do slide 91 (Deslocamento Temporal): “ $x[n - n_0] \xleftrightarrow{z} z^{-n_0} X(z)$, com RDC = R_x (exceto pela inclusão ou exclusão de $z = 0$ ou $z = \infty$)”
- Do slide 93 (Teorema do Valor Inicial): “Se $x[n]$ é “causal”, então $x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ ”

Re-visitando a Exponencial Real

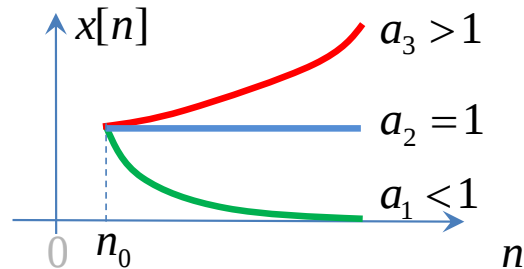
RDC de $x[n] = a^n u[n]$, com $a \in \mathbb{R}$ (Lateral-Direita)



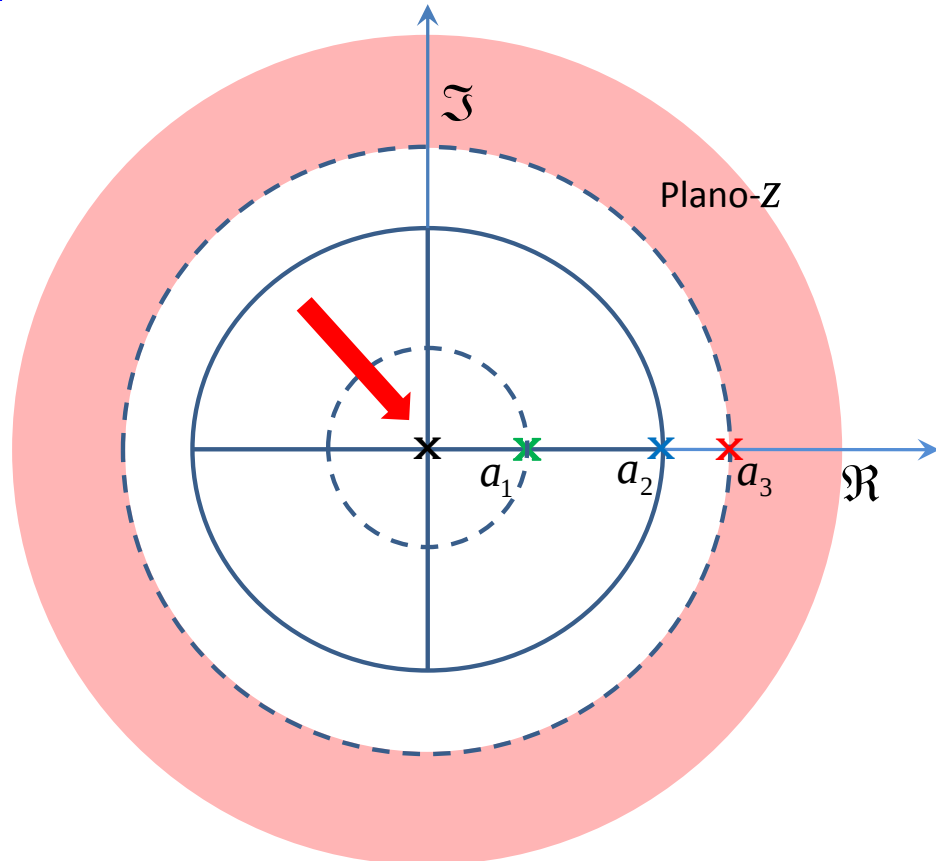
Re-visitando a Exponencial Real

RDC de $x[n] = a^{(n-n_0)}u[n - n_0]$ (Lateral-Direita)

Versão atrasada de $a^n u[n]$



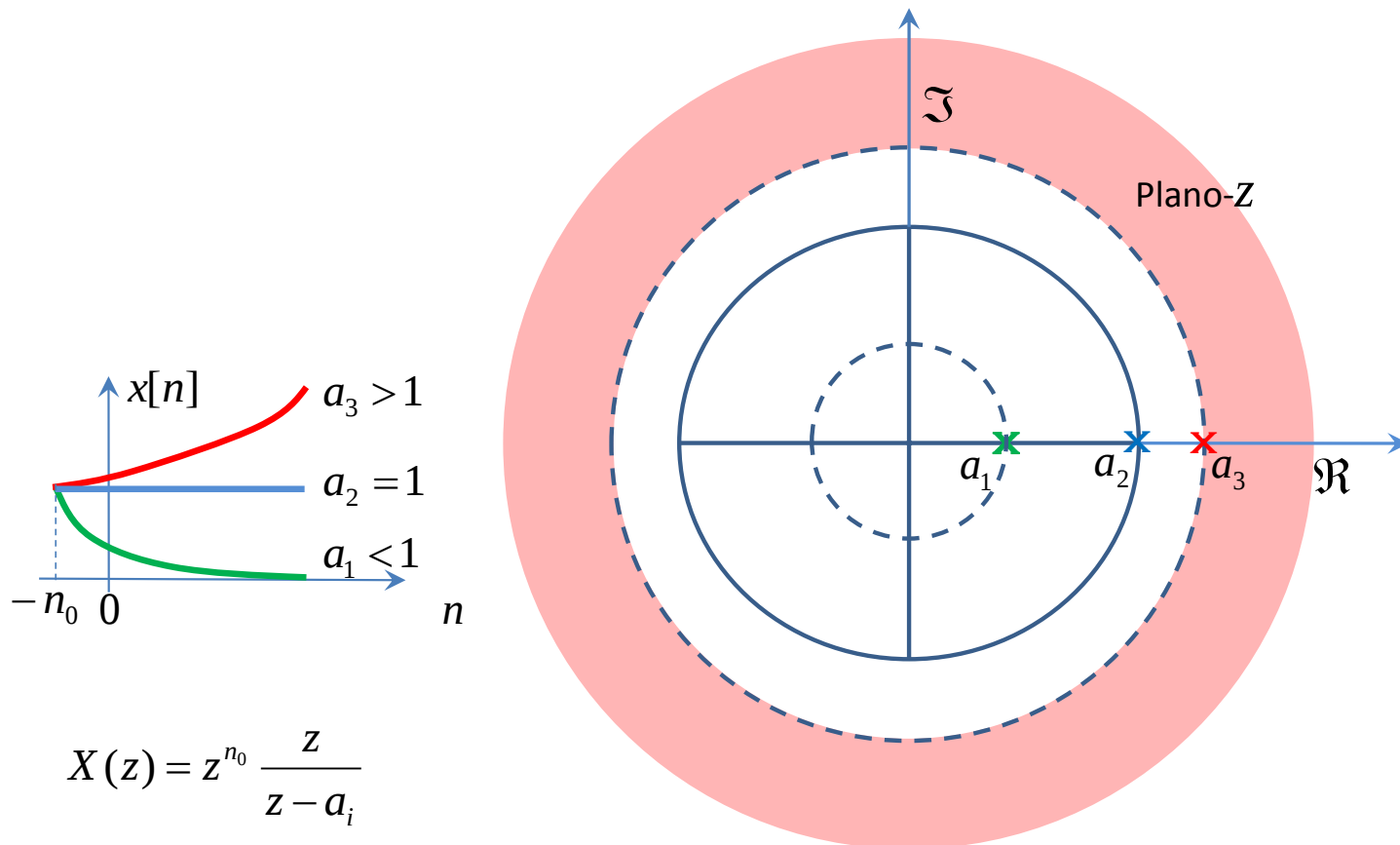
$$X(z) = \frac{1}{z^{n_0}} \frac{z}{z - a_i}$$



Re-visitando a Exponencial Real

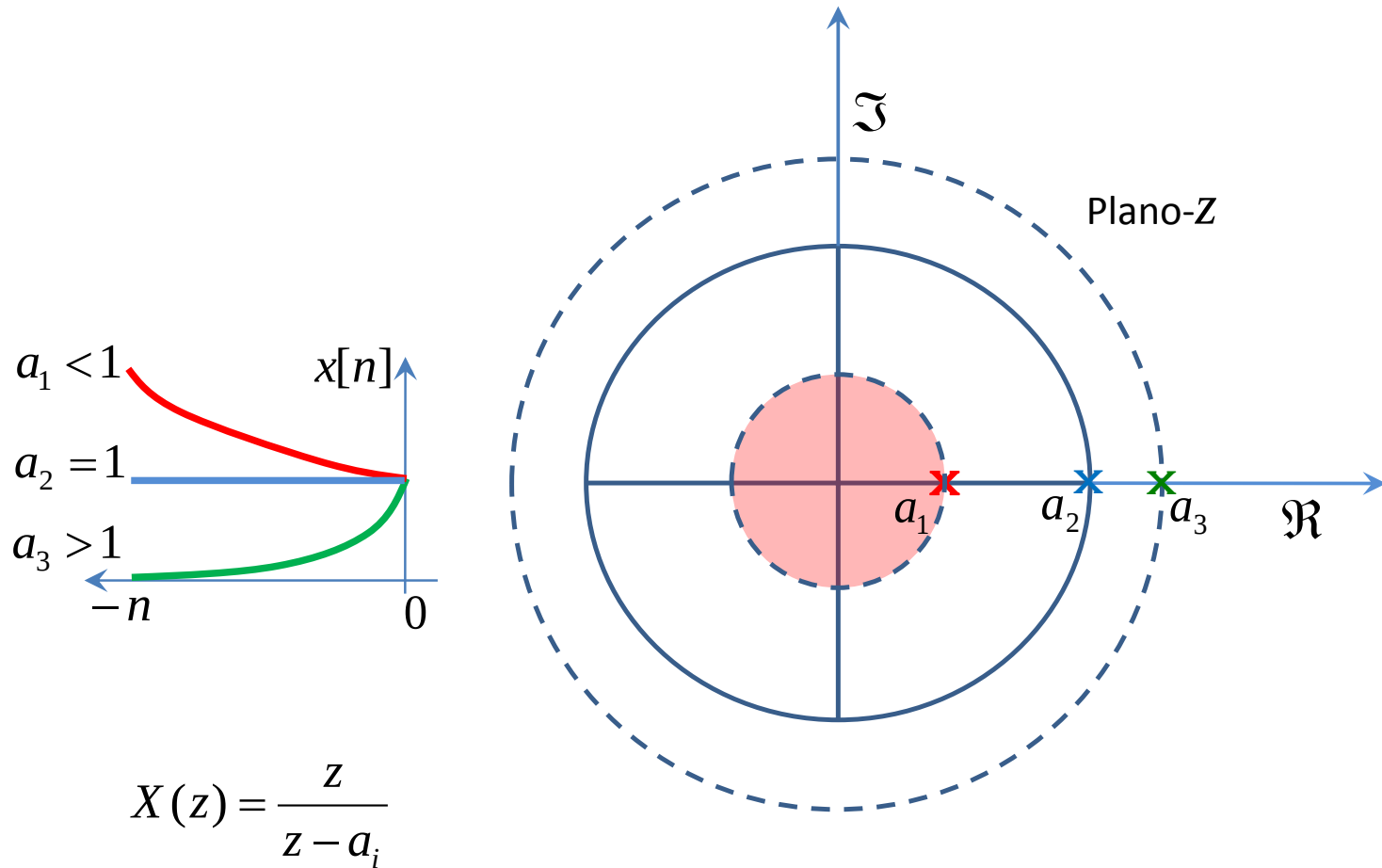
RDC de $x[n] = a^{(n+n_0)}u[n + n_0]$ (Lateral-Direita)

Versão adiantada de $a^n u[n]$



Re-visitando a Exponencial Real

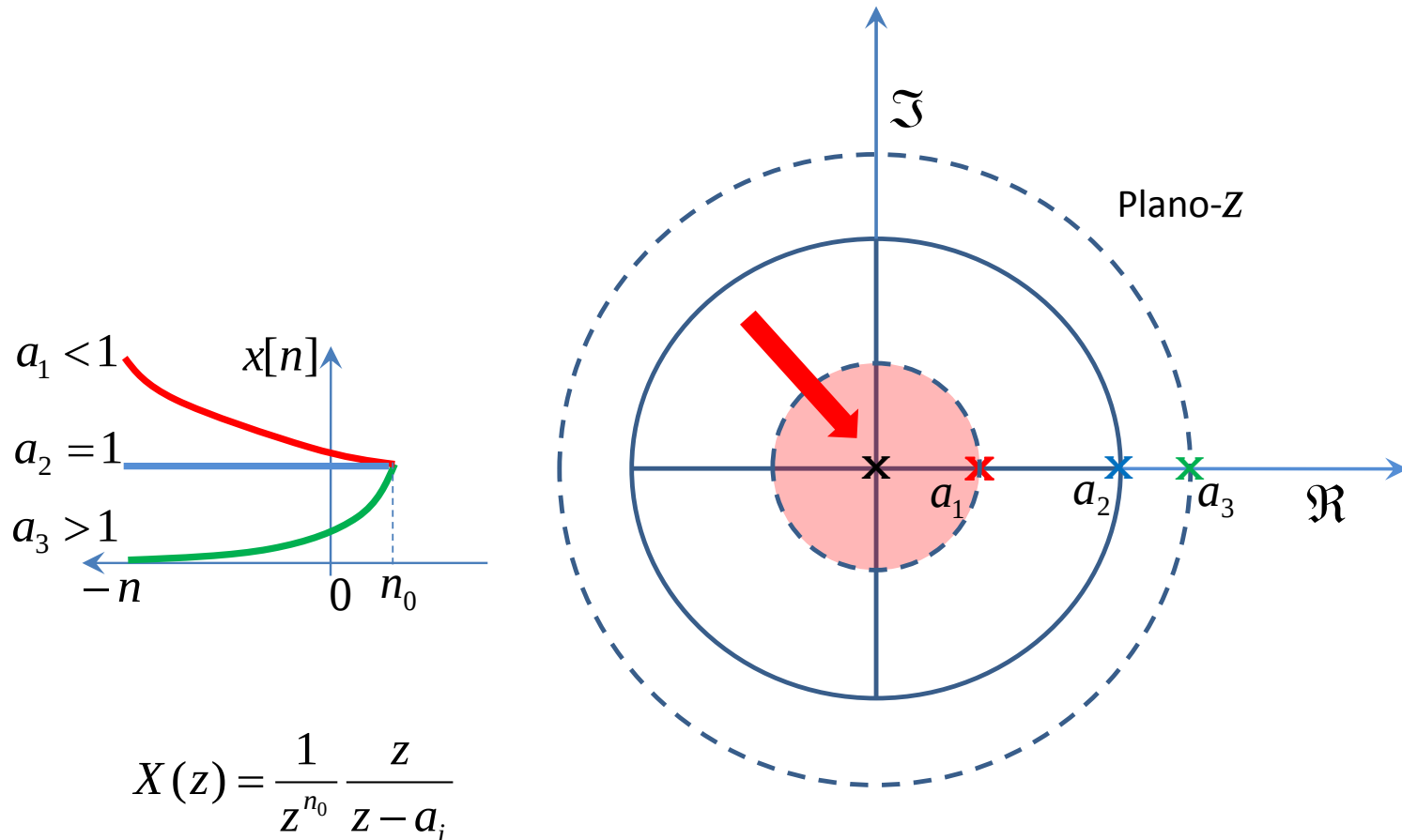
RDC de $x[n] = -a^n u[-n - 1]$ (Lateral-Esquerda)



Re-visitando a Exponencial Real

RDC de $x[n] = -a^{(n-n_0)}u[-n-1+n_0]$ (Lateral-Esquerda)

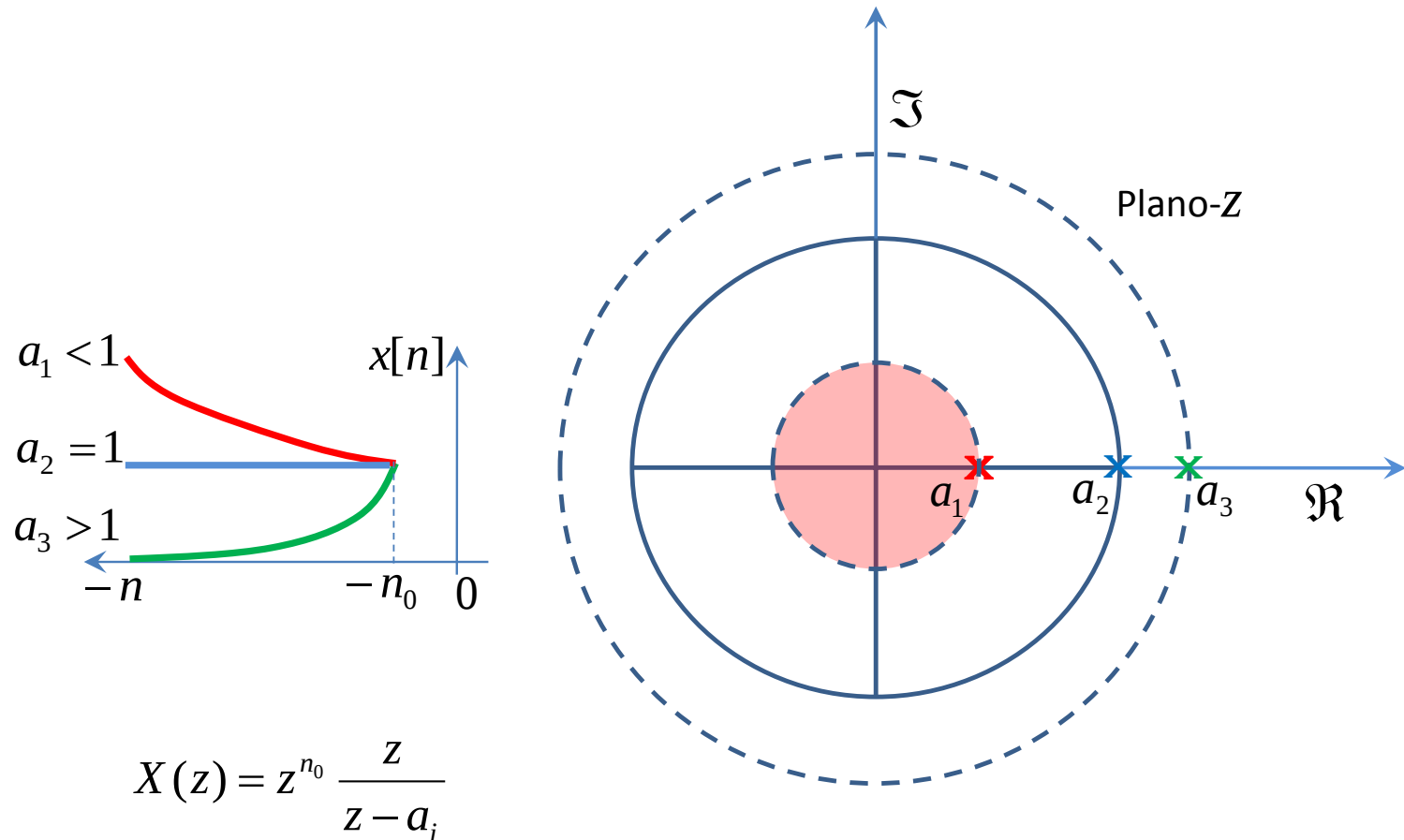
Versão atrasada de $-a^n u[-n-1]$



Re-visitando a Exponencial Real

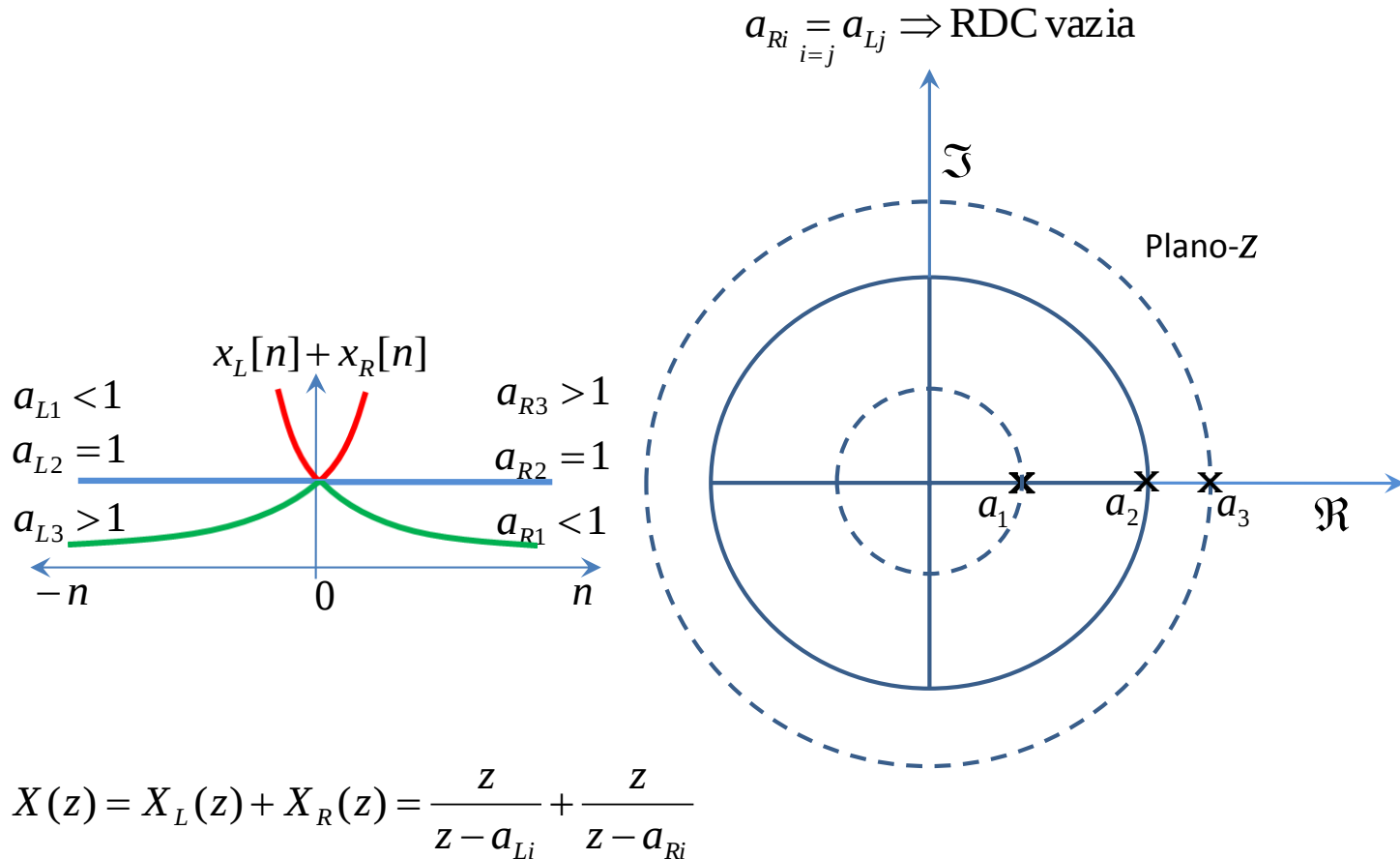
RDC de $x[n] = -a^{(n+n_0)}u[-n-1-n_0]$ (Lateral-Esquerda)

Versão adiantada de $-a^n u[-n-1]$



Re-visitando a Exponencial Real

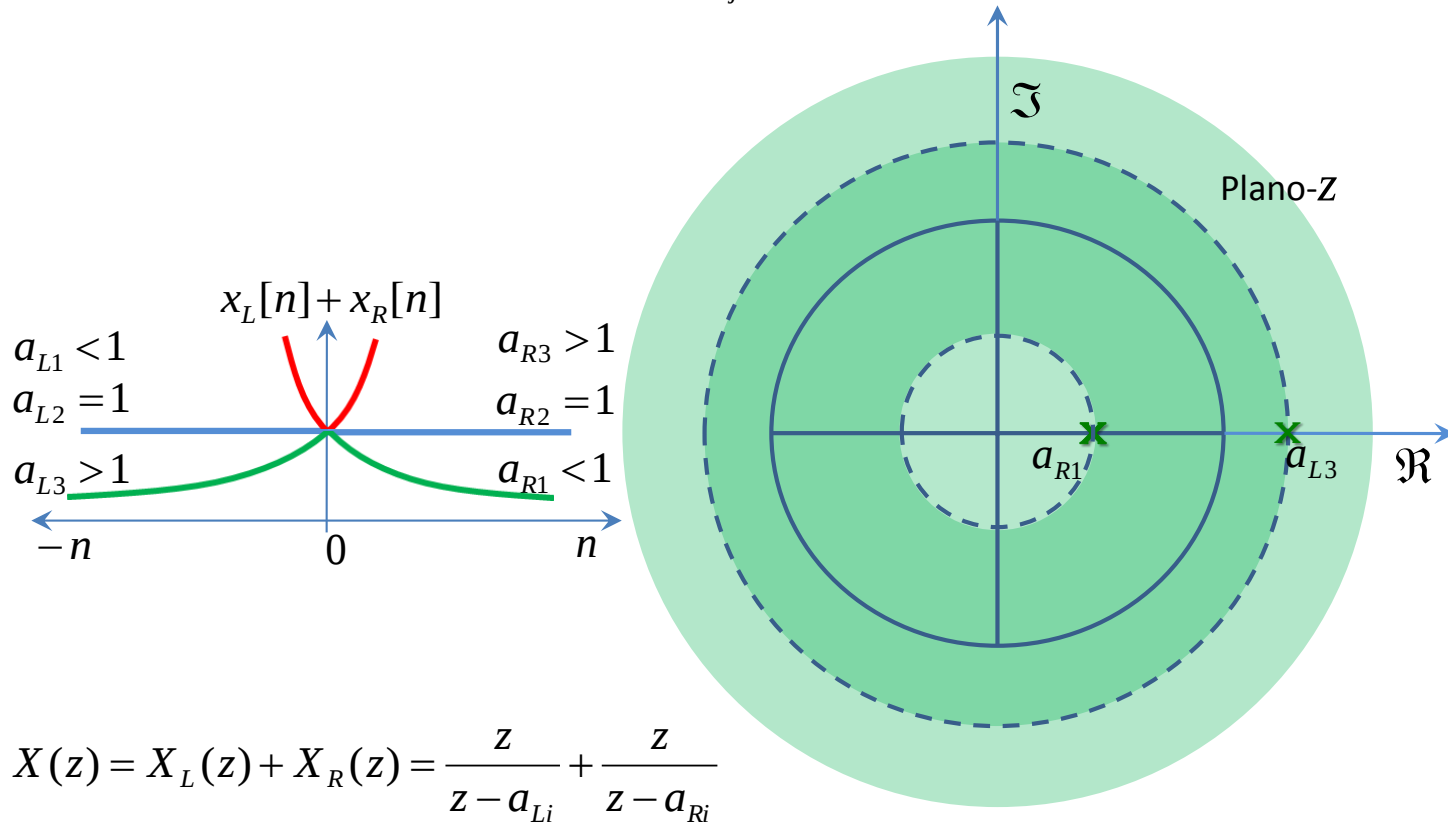
RDC de Sequência Bi-Lateral



Re-visitando a Exponencial Real

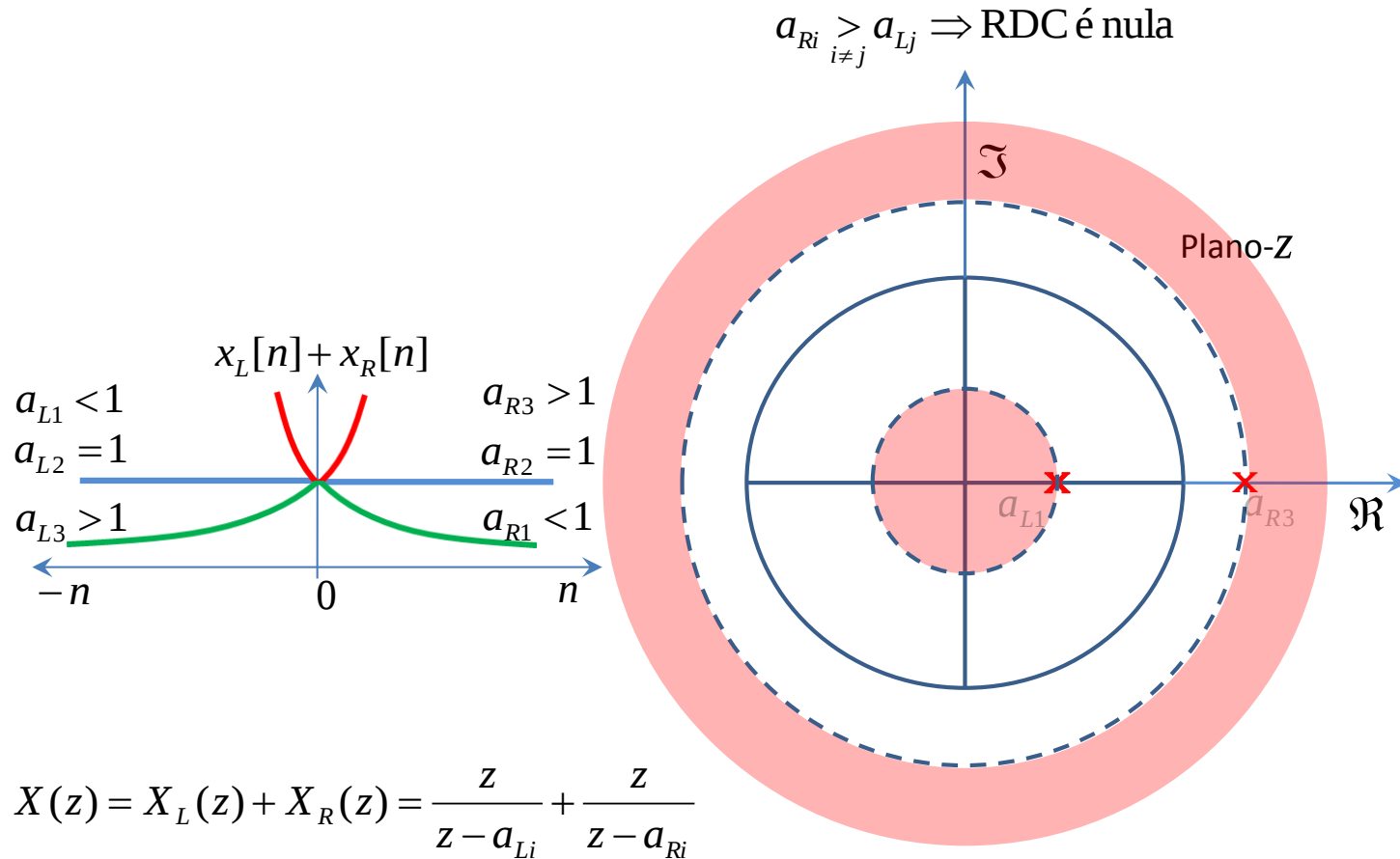
RDC de Sequência Bi-Lateral

$a_{Ri} < a_{Lj} \Rightarrow$ RDC é um anel (verde escuro)



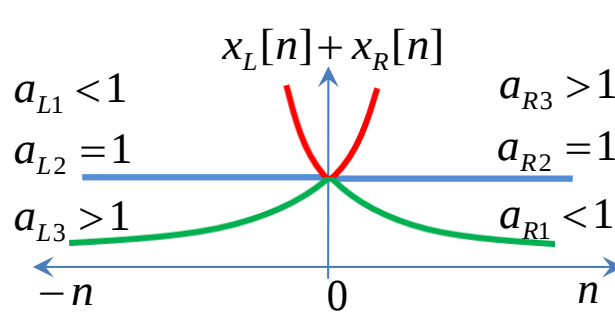
Re-visitando a Exponencial Real

RDC de Sequência Bi-Lateral

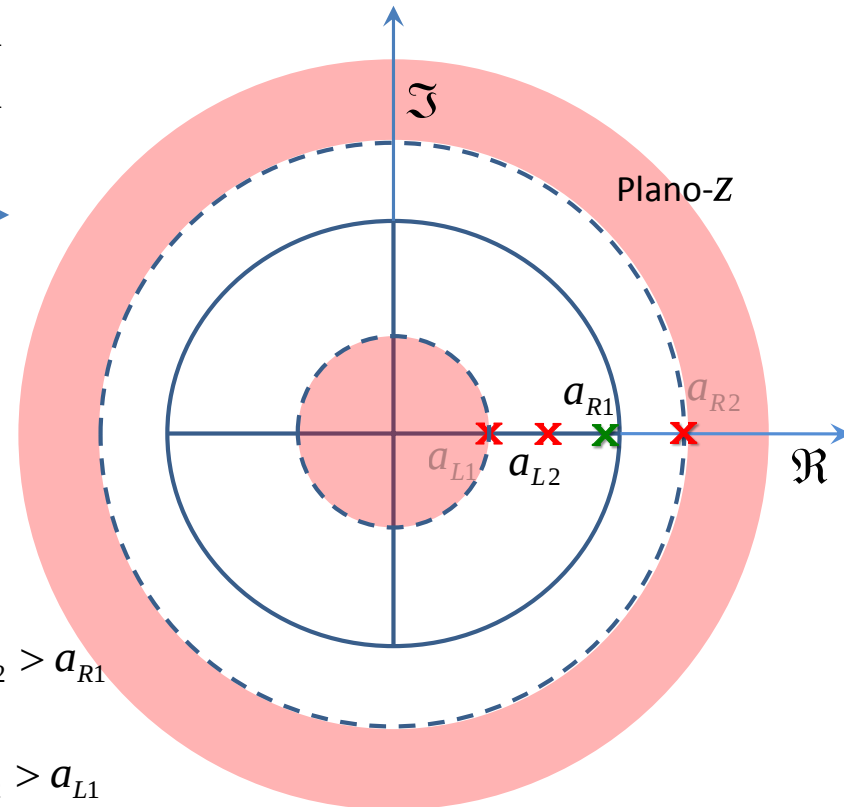


Re-visitando a Exponencial Real

RDC de Sequência Bi-Lateral (Multi-Pólos)



$a_{R2} > a_{L1} \Rightarrow \text{RDC é nula}$



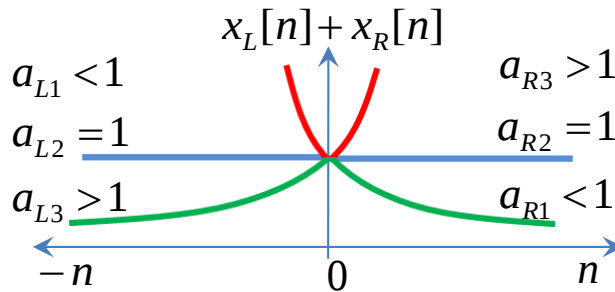
$$X(z) = X_L(z) + X_R(z)$$

$$X_R(z) = \frac{z}{z - a_{R1}} + \frac{z}{z - a_{R2}}, \text{ com } a_{R2} > a_{R1}$$

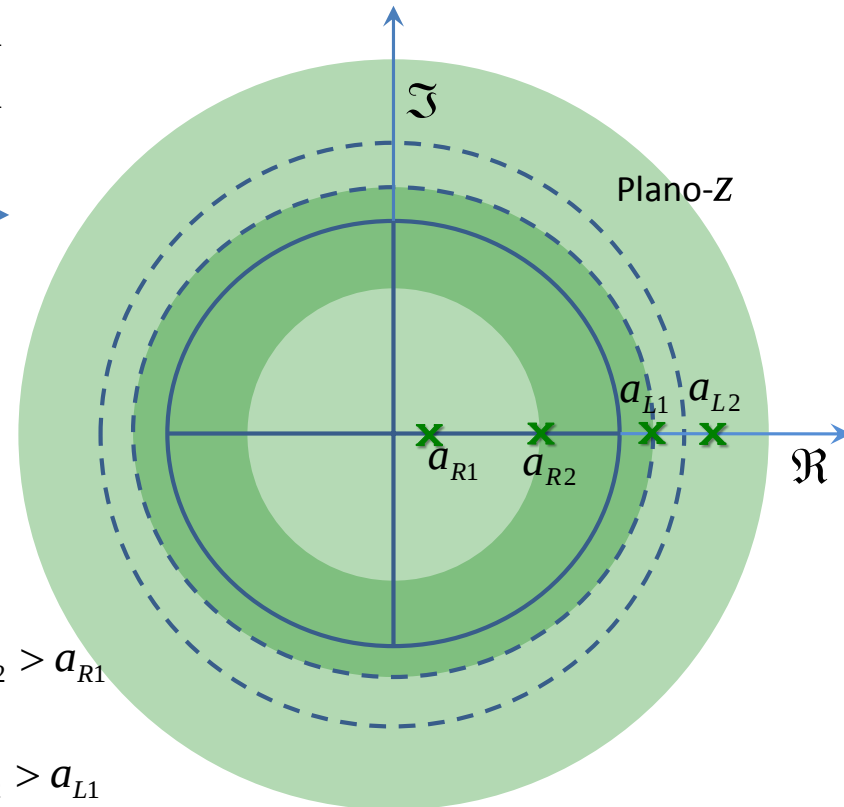
$$X_L(z) = \frac{z}{z - a_{L1}} + \frac{z}{z - a_{L2}}, \text{ com } a_{L2} > a_{L1}$$

Re-visitando a Exponencial Real

RDC de Sequência Bi-Lateral (Multi-Pólos)



$a_{R2} < a_{L1} \Rightarrow$ RDC é um anel (verde escuro)



$$X(z) = X_L(z) + X_R(z)$$

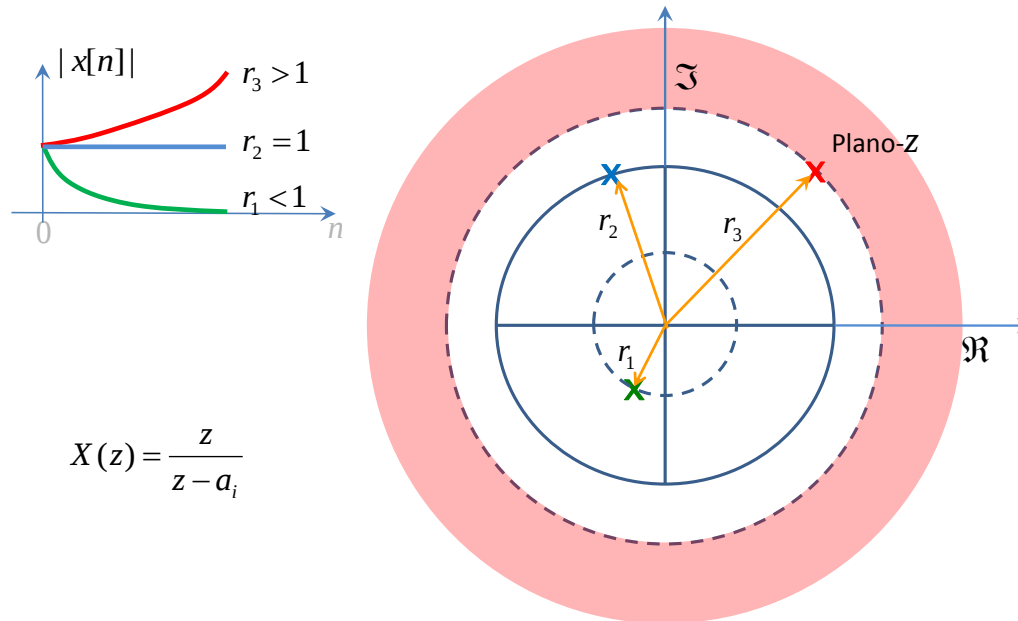
$$X_R(z) = \frac{z}{z - a_{R1}} + \frac{z}{z - a_{R2}}, \text{ com } a_{R2} > a_{R1}$$

$$X_L(z) = \frac{z}{z - a_{L1}} + \frac{z}{z - a_{L2}}, \text{ com } a_{L2} > a_{L1}$$

Re-visitando a Exponencial Complexa

RDC de $x[n] = a^n u[n]$, com $a \in \mathbb{C}$ (Lateral-Direita)

- ▶ $a = r e^{j\omega}$, com $r = |a|$ e fase $\omega \in \mathbb{R}$ em radianos
 - O valor de r define o perfil temporal de crescimento da magnitude do sinal.
 - O valor de ω define a “taxa de oscilação” do sinal ao longo do tempo.
- ▶ A causalidade (ou não) de $x[n]$ e a localização dos pólos de $X(z)$ definem a RDC.



Re-Visitando Seqüências Senoidais

Transformada- z de $x[n] = \cos[\omega_0 n]u[n]$

$$x[n] = \cos[\omega_0 n]u[n] = \left(\frac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2} \right) u[n]$$

- Pode-se decompor $x[n] = \frac{x_1[n] + x_2[n]}{2}$, com $x_1[n] = e^{j\omega_0 n}u[n]$ e $x_2[n] = e^{-j\omega_0 n}u[n]$
- Escrevendo $a_1 = e^{j\omega_0}$ e $a_2 = e^{-j\omega_0}$, pode-se obter $X_1(z)$ e $X_2(z)$ por inspeção:

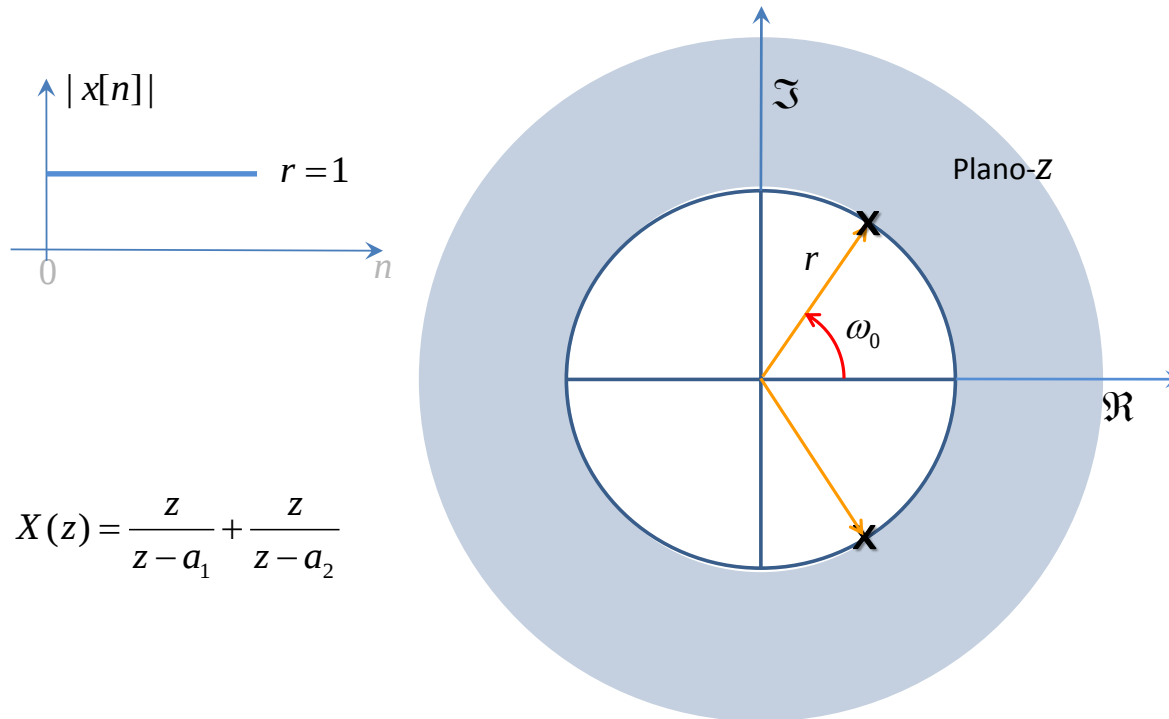
$$X_1(z) = \frac{z}{z - a_1} \quad \text{e} \quad X_2(z) = \frac{z}{z - a_2}$$

- Por linearidade, obtém-se

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z - a_1} + \frac{z}{z - a_2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2z^2 - (a_1 + a_2)z}{z^2 - z(a_1 + a_2) + a_1 a_2} \right) \\ &= \left(\frac{z^2 - \cos(\omega_0)z}{z^2 - 2z \cos(\omega_0) + 1} \right) \end{aligned}$$

Re-Visitando Sequências Senoidais

RDC de $X(z)$ para $x[n] = \cos[\omega_0 n]u[n]$



$$X(z) = \frac{z}{z - a_1} + \frac{z}{z - a_2}$$

EDs e a Transformada- z

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^M b_m x[n-m],$$

Transformada- z de uma ED de Ordem N ($N \geq M$)

► Usando as propriedades de Linearidade e Deslocamento Temporal:

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m} X(z),$$

► (Resposta Impulsional) $h[n] \xleftrightarrow{Z} H(z)$ (Função de Transferência)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)},$$

EDs e a Transformada- z

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}},$$

Observações:

- ▶ Os coeficientes a_k do polinômio $A(z)$ determinam a localização no plano- z dos pólos de $H(z)$. Logo, definem a RDC de $H(z)$.
- ▶ A solução $y_h[n]$ da ED homogênea depende somente dos pólos de $H(z)$.
- ▶ **Dos Slides 75 e 76:** “*A solução geral é na forma $y_h[n] = \sum_{i=1}^N A_i \alpha_i^n$, onde α_i são as raízes (possivelmente complexas) do polinômio característico da ED*”
 - $A(z)$ é o polinômio característico da ED homogênea.

Interpretação para os Pólos de $H(z)$

- ▶ Cada pólo α_i (possivelmente complexo) define uma das N componentes α_i^n da solução $y_h[n]$.
- ▶ A fases ω_i dos pólos são os chamados modos-naturais dos sistema.

Pólos e Zeros de $H(z)$ ou $X(z)$

Razão de Polinômios em Potências Positivas de z

$$\blacktriangleright X(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{z^N \sum_{m=0}^M b_m z^{M-m}}{z^M \sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}}$$

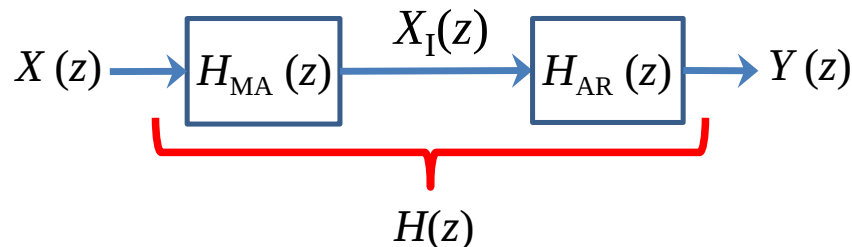
- M zeros e N pólos possivelmente não-nulos
- Se $M > N$: $M - N$ pólos na origem
- Se $M < N$: $N - M$ zeros na origem
- Há sempre o mesmo número de pólos e zeros no plano- z
 - Pólos e zeros no infinito não aparecem no diagrama!

EDs e Função de Transferência $H(z)$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)},$$

Desdobramentos

- ▶ Como uma ED, a expressão de $H(z)$ indica como implementar o sistema.
- ▶ Em geral, uma $H(z)$ pode ser decomposta em duas partes: $H(z) = H_{\text{MA}}(z)H_{\text{AR}}(z)$
 - Parte não-recursiva ou média-móvel (*Moving-Average*) $H_{\text{MA}}(z) = B(z)$
 - Parte recursiva ou autorregressiva (*Auto-Regressive*) $H_{\text{AR}}(z) = \frac{1}{A(z)}$

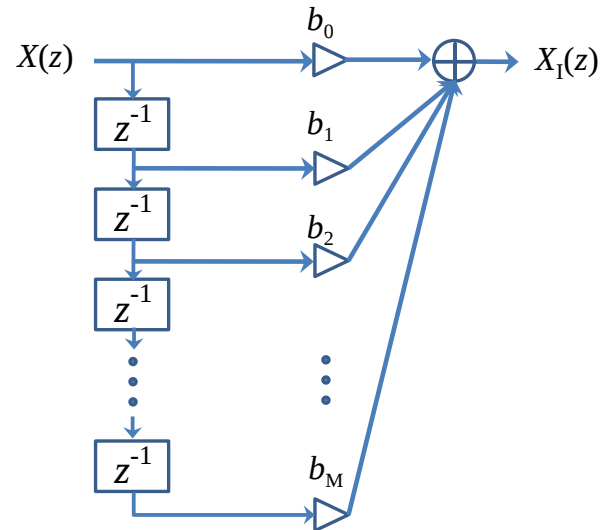


Função de Transferência $H_{\text{MA}}(z)$

$$H_{\text{MA}}(z) = \frac{X_I(z)}{X(z)} = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m},$$

$$X_I(z) = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m} X(z)$$

Representação em Diagrama de Blocos



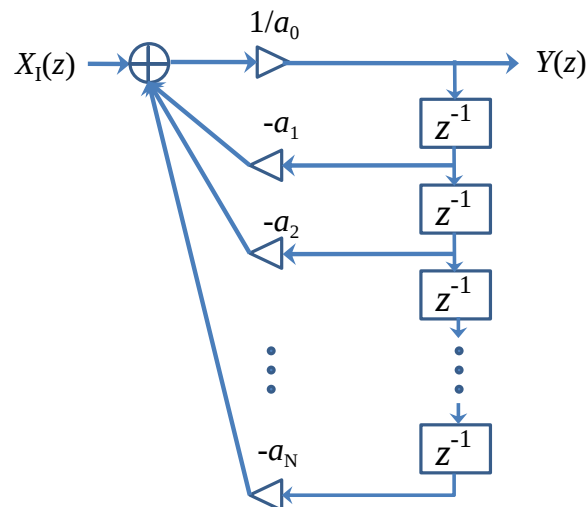
Função de Transferência $H_{\text{AR}}(z)$

$$H_{\text{AR}}(z) = \frac{Y(z)}{X_{\text{I}}(z)} = \frac{1}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = X_{\text{I}}(z)$$

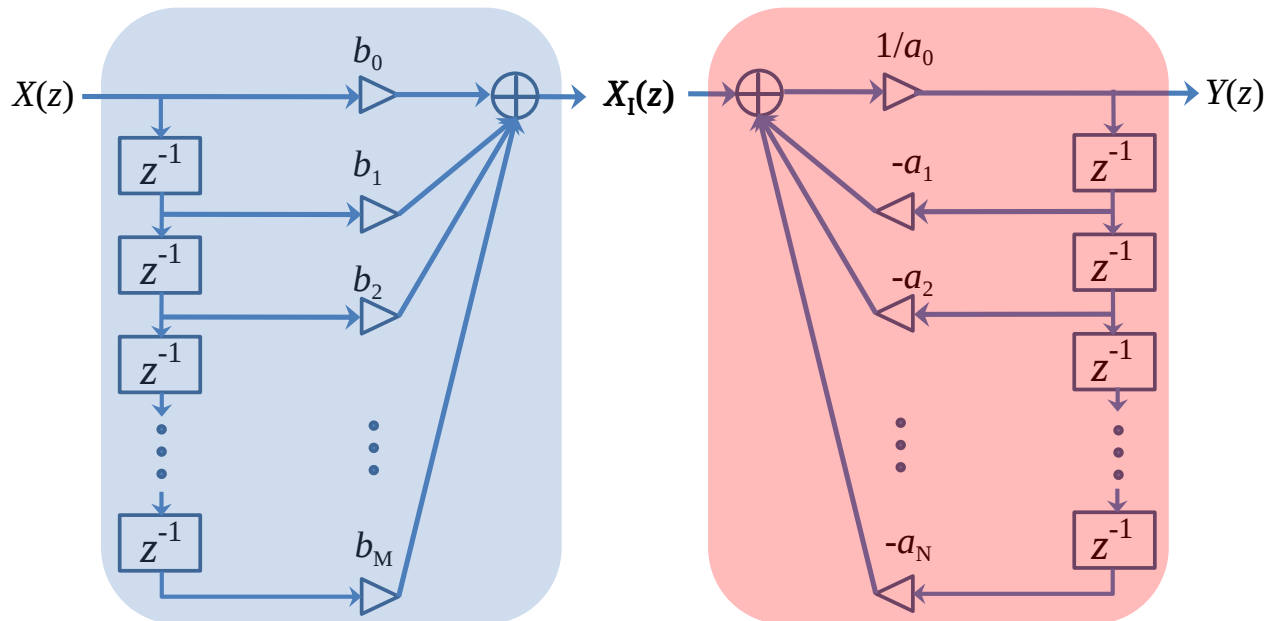
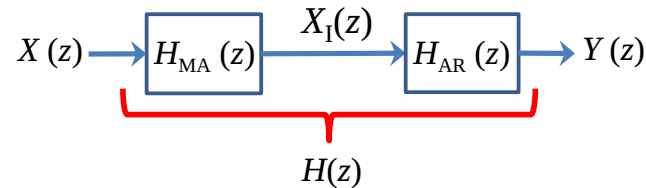
$$Y(z) = \frac{1}{a_0} \left\{ X_{\text{I}}(z) - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} Y(z) \right\}$$

Representação em Diagrama de Blocos



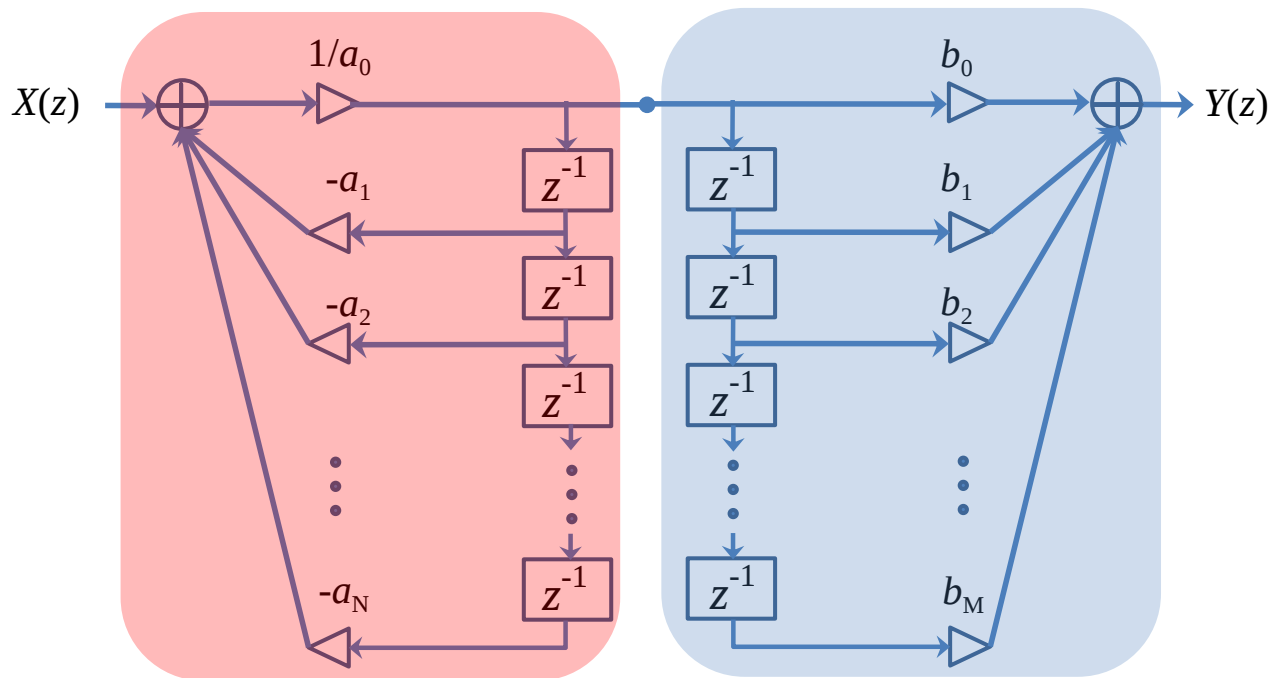
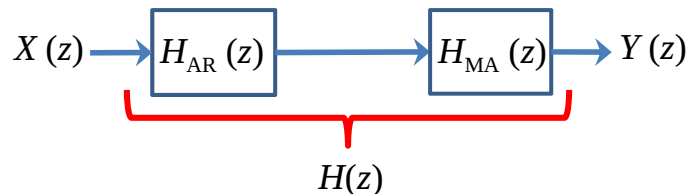
Função de Transferência $H(z) = H_{\text{MA}}(z)H_{\text{AR}}(z)$

Representação em Diagrama de Blocos



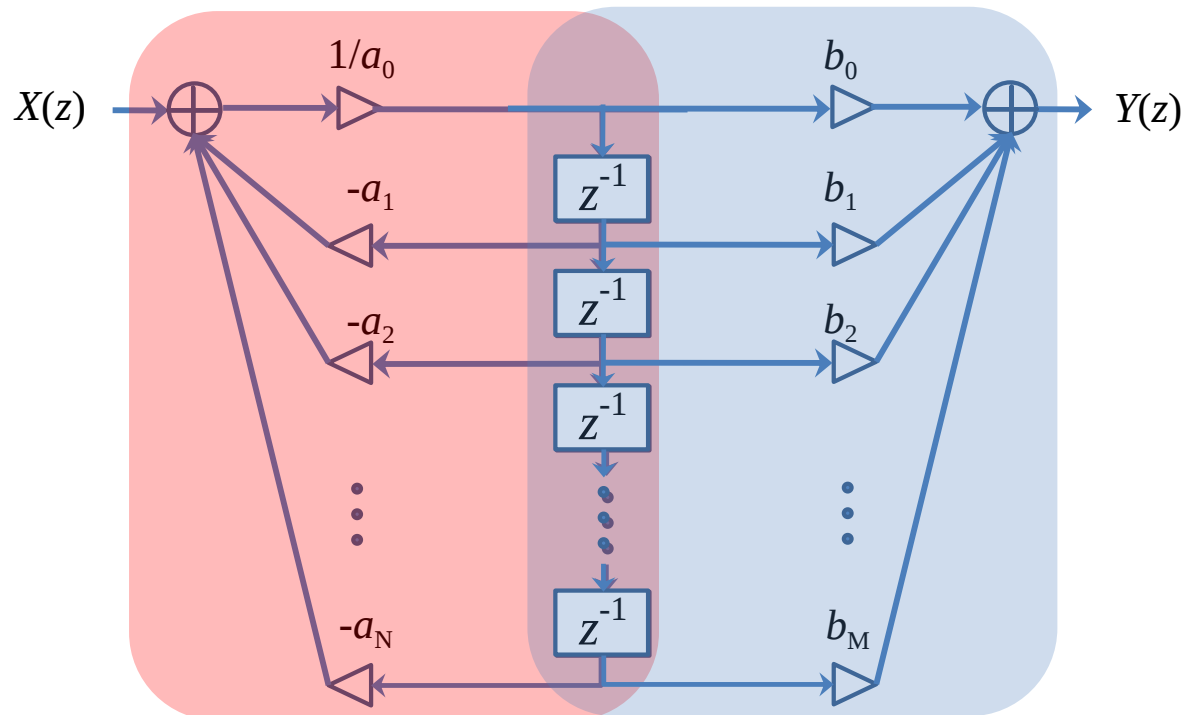
Função de Transferência $H(z) = H_{\text{MA}}(z)H_{\text{AR}}(z)$

Representação em Diagrama de Blocos



$$\text{Função de Transferência } H(z) = H_{\text{AR}}(z)H_{\text{MA}}(z)$$

Representação em Diagrama de Blocos (Canônica)



$M = N$ no caso mostrado acima.

Função de Transferência $H(z)$

Implementação FIR vs IIR

- ▶ Sistemas com $h[n]$ **FIR** admitem implementação via $H(z) = H_{\text{MA}}(z)$.
- ▶ Sistemas com $h[n]$ **IIR** requerem implementação via $H(z) = H_{\text{AR}}(z)$.
- ▶ Há sistemas que admitem implementação via $H_{\text{MA}}(z)$ e/ou $H_{\text{AR}}(z)$, e.g. Média-Móvel.

– FIR:

$$H_{\text{MA}}(z) = \frac{1}{M_2 + 1} \sum_{k=0}^{M_2} z^{-k}$$

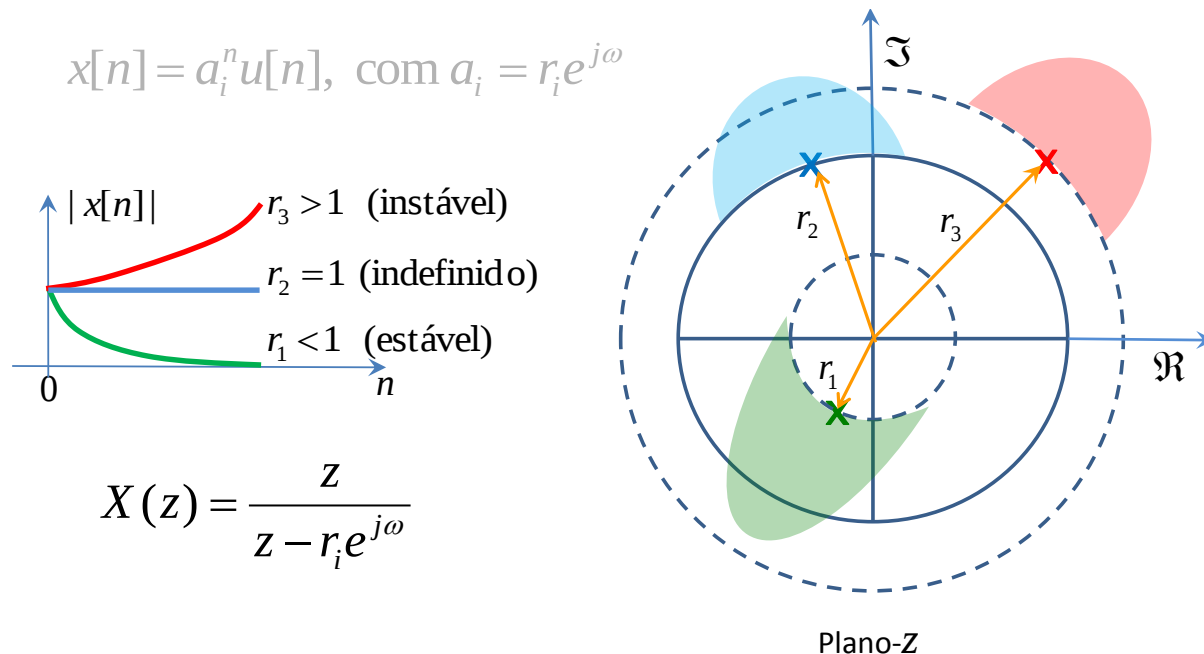
– FIR (realização recursiva):

$$H_{\text{ARMA}}(z) = \frac{1}{M_2 + 1} \frac{1 - z^{-(M_2+1)}}{1 - z^{-1}}.$$

Estabilidade de $H(z)$

Critério Geral

- A RDC de $H(z)$ tem que conter a circunferência unitária, i.e., $z = e^{j\omega}$. Para sistemas:
- **Causais Estáveis:** Os pólos de $H(z)$ tem que estar no interior do círculo unitário.
 - **Não-Causais Estáveis com $h[n]$ Lateral Esquerda:** Os pólos de $H(z)$ tem que estar no exterior do círculo unitário (exceção: pólos em $z = 0$).
 - **FIR Causais:** São sempre estáveis, visto que todos os pólos estão em $z = 0$.
 - **Causais ou Não-Causais:** se os pólos de $H(z)$ estiverem sobre a circunferência unitária, a estabilidade é indefinida.



Estabilidade de $H(z)$

Formalização (via Propriedades de Séries de Laurent)

- Uma série $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$, com $|f_n(z)| < \infty$, $\forall n \geq 0$ converge absolutamente se

$$\rho(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)} \right| < 1$$

- Para a transformada- z de $h[n]$ (causal), tem-se que $f_n(z) = h[n]z^{-n}$. Então,

$$\rho(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{h[n+1]z^{-n}z^{-1}}{h[n]z^{-n}} \right| < 1$$

$$\rho(z) = \left| z^{-1} \right| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{h[n+1]}{h[n]} \right| < 1$$

- Para exponenciais $a^n u[n]$ real ou complexa, $\frac{h[n+1]}{h[n]}$ é a base a .
- O resultado acima (caso causal) pode ser generalizado para séries não-causais e bi-laterais.
- **Causal:** $\rho_R(z) < 1$ **Não-Causal:** $\rho_L(z) > 1$

Estabilidade de $H(z)$

Na Prática (Sistemas Causais)

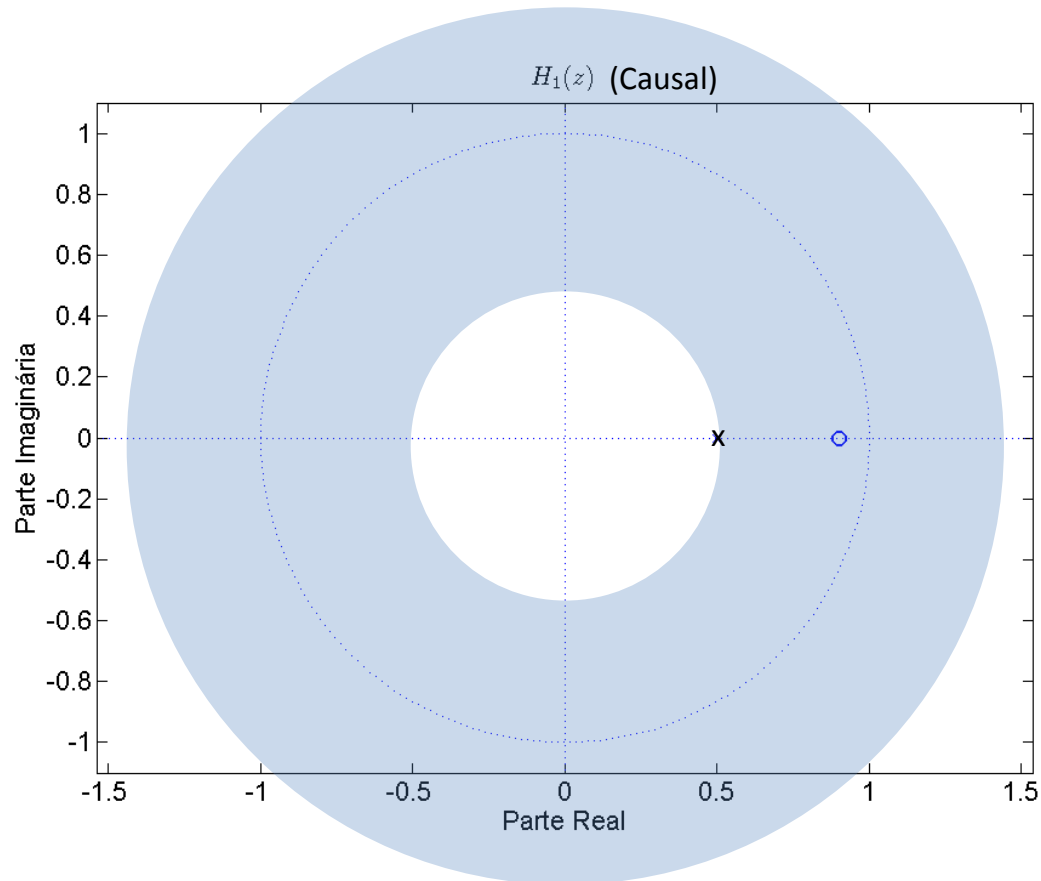
- ▶ **Sistemas FIR são SEMPRE ESTÁVEIS.**
- ▶ **Sistemas IIR (com recursão): Estáveis se todos os pólos de $H(z)$ estão dentro do círculo unitário.**
- ▶ Há algoritmos de verificação de estabilidade que prescindem do cálculo explícito das raízes do denominador de $H(z)$.

Definição

- ▶ **Do Slide 62:** $h[n] = (h_1 * h_2)[n] = \delta[n] \xleftrightarrow{Z} H(z) = H_1(z)H_2(z) = 1$
- ▶ Se $H_1(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$, então $H_2(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$.
- ▶ Troca de zeros com pólos entre $H_1(z)$ e $H_2(z)$.
- ▶ **Implicações:**
 - Para $H(z)$ existir as RDCs de $H_1(z)$ e $H_2(z)$ têm que se sobrepor.
 - Se $H_1(z)$ é estável, causal e com M zeros, $H_2(z)$ só será estável e causal se todos os zeros de $H_1(z)$ estiverem no interior do círculo unitário (tal $H_1(z)$ é dito ser de fase-mínima).

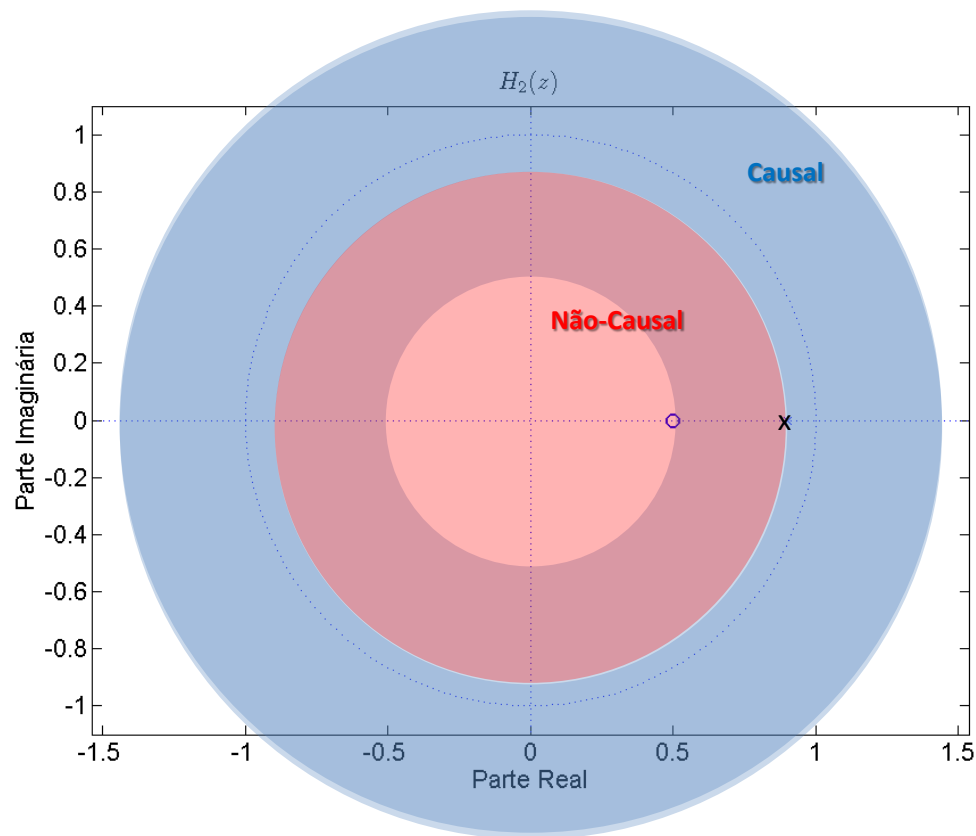
Exemplos: Sistemas Inversos

$$H_1(z) = \frac{1-0,9z^{-1}}{1-0,5z^{-1}}$$



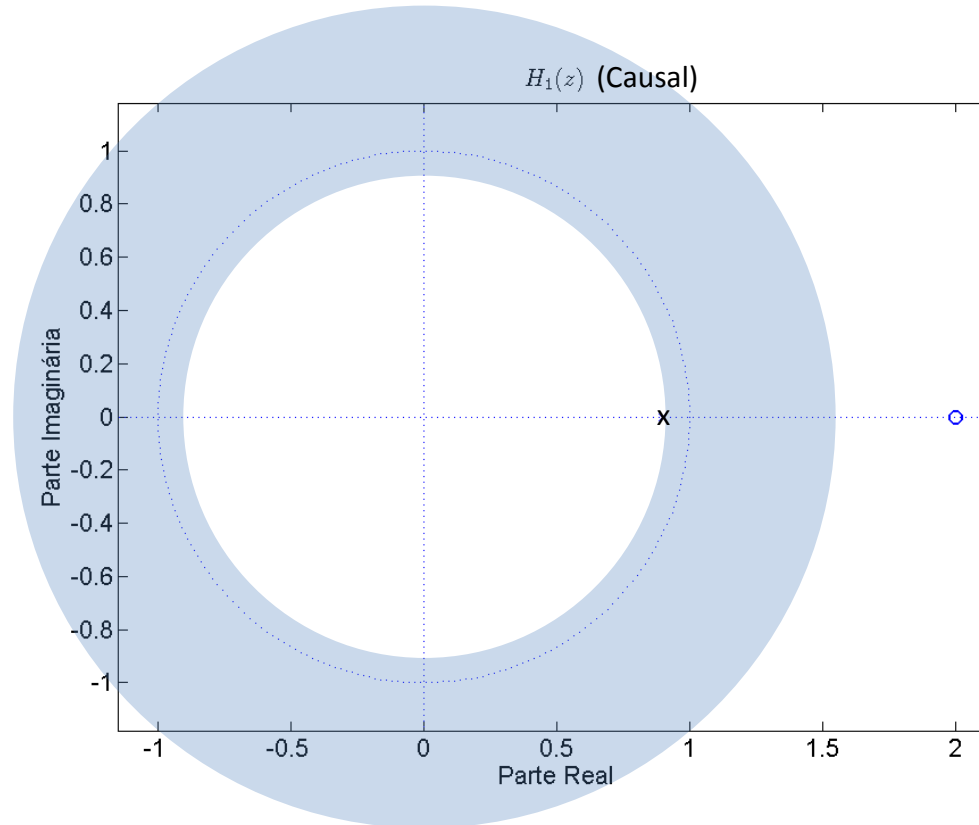
Exemplos: Sistemas Inversos

$$H_2(z) = \frac{1}{H_1(z)}$$



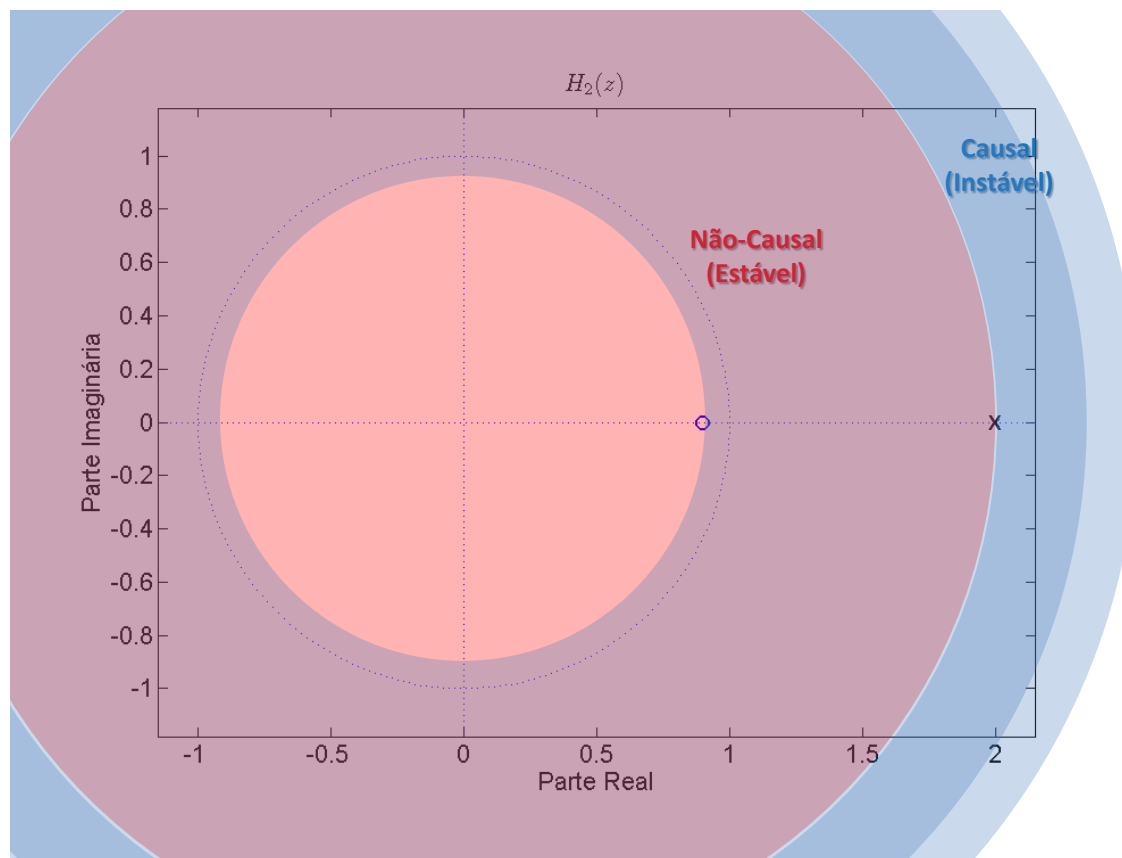
Exemplos: Sistemas Inversos

$$H_1(z) = \frac{1-2z^{-1}}{1-0,9z^{-1}}$$



Exemplos: Sistemas Inversos

$$H_2(z) = \frac{1}{H_1(z)}$$



Transformada-z Inversa

Expressão Formal

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz$$

- c : curva fechada simples, no sentido anti-horário, inteiramente contida na RDC de $X(z)$ e envolvendo a origem do plano complexo- z .

Métodos de Inversão

- Inspeção
- Expansão em Frações Parciais
- Expansão em Série de Potências

Transformada-z Inversa

Método de Inspeção

- $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$, com $|z| > |a|$
- $x[n] = a^n u[n]$
- Em geral: tentar expressar $X(z)$ como uma composição de termos cujas transformadas inversas são conhecidas
- Verificar **Tabela de Pares Comuns** $x[n] \xleftrightarrow{z} X(z)$

Transformada-z Inversa

Método de Expansão em Frações Parciais (EFP)

$$Q = \frac{N}{\underbrace{P_1 P_2 P_3}_{\text{não-nulo}}} = \frac{\alpha}{P_1} + \frac{\beta}{P_2} + \frac{\gamma}{P_3}$$
$$Q = \frac{\alpha P_2 P_3 + \beta P_1 P_3 + \gamma P_1 P_2}{P_1 P_2 P_3}$$
$$\alpha P_2 P_3 + \beta P_1 P_3 + \gamma P_1 P_2 = N$$
$$P_1 = 0: \quad \alpha = \frac{N}{P_2 P_3} = P_1 Q|_{P_1=0}$$
$$P_2 = 0: \quad \beta = \frac{N}{P_1 P_3} = P_2 Q|_{P_2=0}$$
$$P_3 = 0: \quad \gamma = \frac{N}{P_1 P_2} = P_3 Q|_{P_3=0}$$

Transformada-z Inversa

Método de Expansão em Frações Parciais

$$\blacktriangleright X(z) = \frac{b_0 \prod_{m=1}^M (1 - c_m z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$$

- c_m são Zeros não-nulos de $X(z)$
- d_k são Pólos não-nulos de $X(z)$

Se $M < N$ e todos pólos de primeira ordem

$$\blacktriangleright X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{(1 - d_k z^{-1})}, \text{ com } A_k = (1 - d_k z^{-1})X(z)|_{z=d_k}$$

Para $M \geq N$ e pólos de multiplicidade maior que 1

$\blacktriangleright$ Expressão acima com termos adicionais

Transformada-z Inversa

Observações: Método de EFP ($M < N$)

- $X(z)$ é obtido como um somatório de N funções de primeira ordem (apenas um pólo).
- $x[n]$ é obtido como um somatório das Transformadas-z inversas de cada parcela (por inspeção)
- A RDC individual de cada parcela tem que sobrepor à RDC de $X(z)$
- No caso de pares de pólos complexo-conjugados, agrupar em funções de segunda-ordem.

Transformada-z Inversa

Método de Expansão em Série de Potências (ESP)

- Se $X(z)$ já é expresso como um somatório de termos em potências de z , a solução é trivial.
 - Útil para seqüências de suporte temporal finito.
- Se $X(z)$ é expresso como uma **função racional de z** , proceder uma divisão polinomial longa.
 - Se pela RDC $x[n]$ é uma seqüência lateral direita: escrever polinômios em z^{-1} (em ordem crescente de potências de z^{-1})
 - Se pela RDC $x[n]$ é uma seqüência lateral esquerda: escrever polinômios em z (em ordem crescente de potências de z)

Transformada-z Inversa

ESP: Exemplo de Divisão Polinomial

➤ $X(z) = 1 / 1 - az^{-1}$, com $|z| > |a|$

$$\begin{array}{r} 1 + 0z^{-1} \quad | \quad 1 - az^{-1} \\ -1 + az^{-1} \quad | \quad 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \dots \\ \hline 0 + az^{-1} \\ -az^{-1} + a^2z^{-2} \\ \hline 0 + a^2z^{-2} \quad \dots \end{array}$$

➤ $x[n] = a^n u[n]$

Transformada-z Inversa

ESP: Exemplo de Divisão Polinomial

➤ $X(z) = 1 / 1 - az^{-1}$, com $|z| < |a|$

$$\begin{array}{r} 0 + z \\ - z + a^{-1}z^2 \\ \hline 0 + a^{-1}z^2 \\ - a^{-1}z^2 + a^{-2}z^3 \\ \hline 0 + a^{-3}z^3 \quad \dots \end{array} \quad \begin{array}{l} -a + z \\ \hline -a^{-1}z - a^{-2}z^2 + \dots \end{array}$$

➤ $x[n] = -a^n u[-n - 1]$

Resposta em Frequência (RF)

Do Slide 80

- $x[n] = e^{j\omega n}$ é auto-função de um sistema LTI $h[n]$.

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)} \\ &= e^{j\omega n} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} \right) \end{aligned}$$

Definindo-se

$$H(e^{j\omega}) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} \right)$$

Tem-se

$$y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

- $H(e^{j\omega})$ é complexo e função contínua em $\omega \in \mathbb{R}$ (não é função de n).
- $H(e^{j\omega})$ é o auto-valor correspondente é chamado **Resposta em Frequência**

Interpretação de $H(e^{j\omega})$

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\Theta(\omega)}$$

- ▶ $|H(e^{j\omega})|$: o quanto o sistema atenua a componente $e^{j\omega n}$
- ▶ $\Theta(\omega)$: o quanto o sistema atrasa a fase da componente $e^{j\omega n}$
 - ◇ Atraso na fase: DEFASAMENTO (ou diferença) entre as fases das componentes de entrada e saída!

Nomenclatura

- ▶ $M(\omega) = |H(e^{j\omega})|$: MAGNITUDE da RF ou Resposta de Magnitude;
- ▶ $\Theta(\omega)$: FASE da RF ou Resposta de Fase.

Atrasos de FASE e de GRUPO

$$H(e^{j\omega}) = M(\omega)e^{j\Theta(\omega)}, \quad (\text{Representação Polar})$$

Definição: Atraso de Fase

$$F(\omega) = -\frac{\Theta(\omega)}{\omega}$$

- Interpretação: $F(\omega)$ mede o atraso (em unidade de tempo) sofrido por uma exponencial complexa de frequência ω ao passar por um sistema.

Definição: Atraso de Grupo

$$G(\omega) = -\frac{d\Theta(\omega)}{d\omega}$$

- Interpretação: $G(\omega)$ mede o atraso sofrido pelo grupo de componentes exponenciais no entorno da frequência ω ao passar por um sistema. **É a inclinação da função de fase para um dado ω .**

Atrasos de FASE e de GRUPO

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}, \quad M(\omega) = 1, \quad \Theta(\omega) = -\omega$$

Atraso de Fase: $F(\omega) = -\frac{-\omega}{\omega} = 1, \quad \forall \omega$

Atraso de Grupo: $G(\omega) = -\frac{d\omega}{d\omega} = 1, \quad \forall \omega$

Conclusão: $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}$ é uma representação complexa (frequencial) para o atrasador unitário $h[n] = \delta[n - 1]$. Em geral:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} \leftrightarrow h[n] = \delta[n - n_0]$$

Interpretação de $H(e^{j\omega})$

Propriedades de $H(e^{j\omega})$

- ▶ $H(e^{j\omega})$ uma Função CONTÍNUA em ω .
- ▶ Como $e^{j\omega} = e^{j(\omega+2\pi k)}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$:

$$H(e^{j(\omega+2\pi k)}) = H(e^{j\omega})$$

- Logo, $H(e^{j\omega})$ é PERIÓDICA com período 2π .
- $H(e^{j\omega})$ só precisa ser especificada em um intervalo de tamanho 2π :

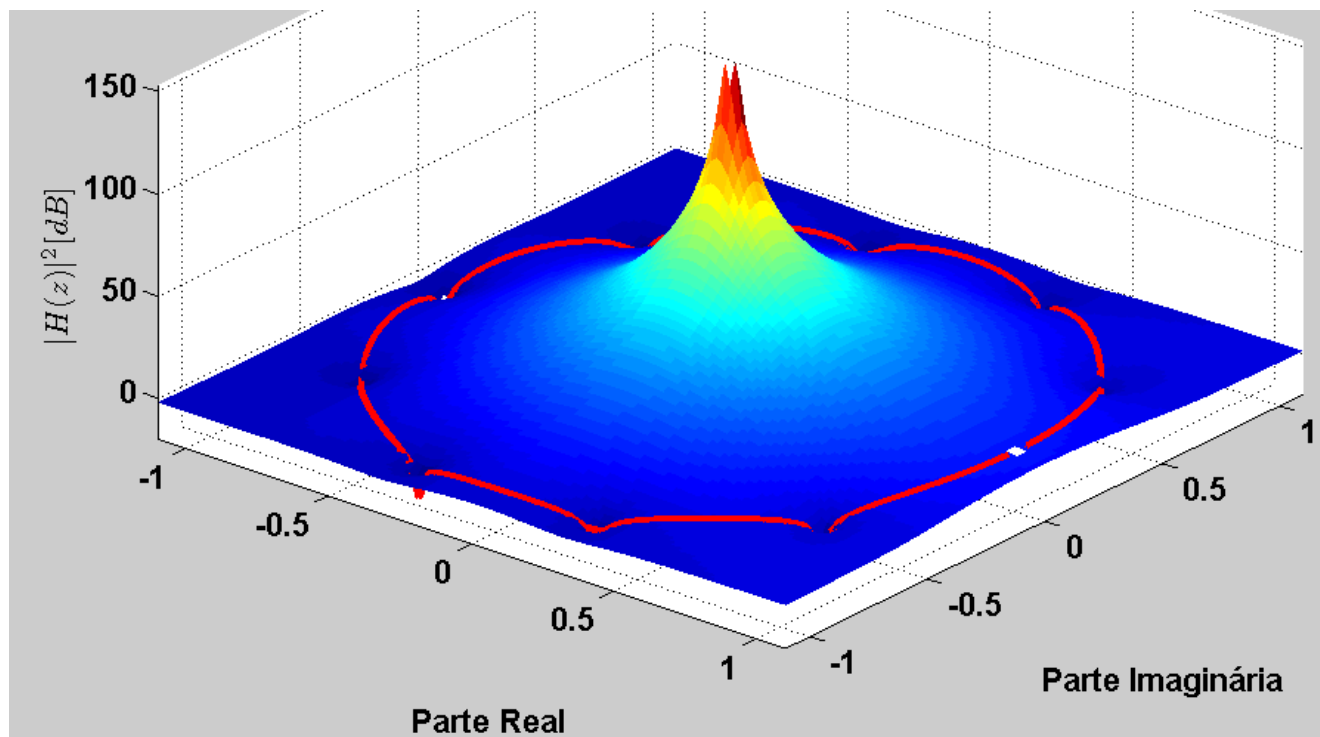
$$0 \leq \omega < 2\pi \quad \text{ou} \quad -\pi < \omega \leq \pi.$$

- Baixas frequências: no entorno de $0 \pm 2\pi k$.
- Altas frequências: no entorno de $\pm\pi \pm 2\pi k$.

$H(e^{j\omega})$ e a Transformada- z

$$h[n] \xleftrightarrow{Z} H(z)$$

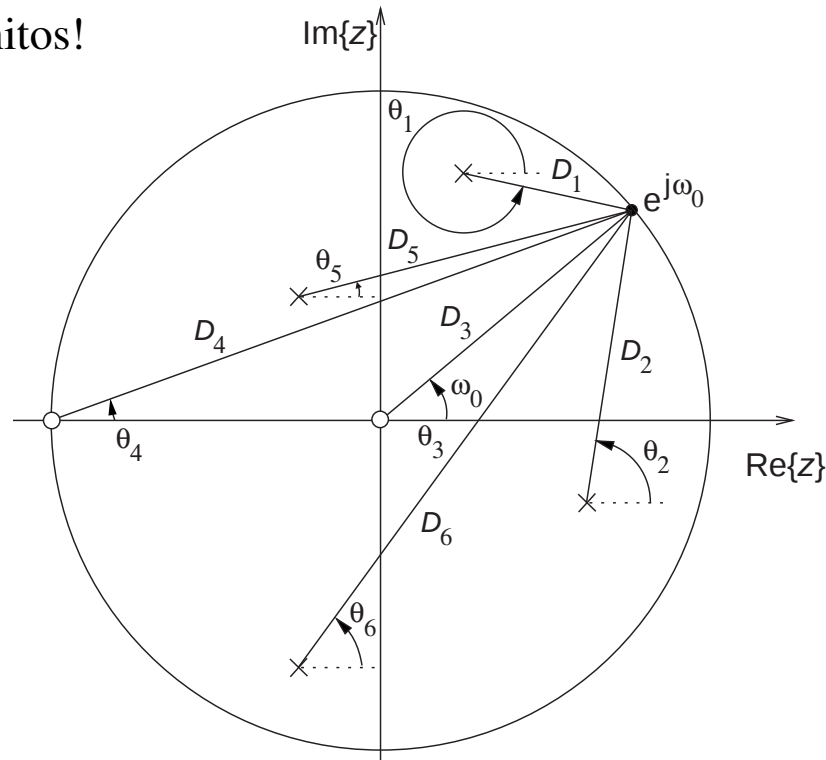
- ▶ Se a RDC de $H(z)$ incluir $|z| = 1$: $H(e^{j\omega})$ é a avaliação de $H(z)$ na **circunferência unitária**.
- ▶ O critério acima implica que $h[n]$ tem que ser BIBO-ESTÁVEL.



$H(e^{j\omega})$ e a Transformada- z

Interpretação Geométrica

► Para pólos e zeros finitos!



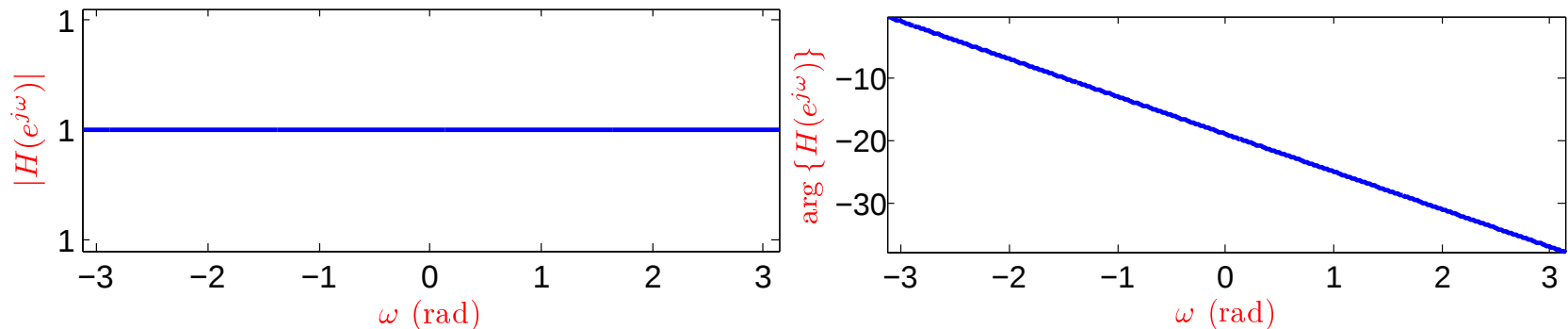
► Pode-se mostrar que:

$$|H(e^{j\omega_0})| = K \frac{D_3 D_4}{D_1 D_2 D_5 D_6} \quad \text{e} \quad \Theta(\omega_0) = \theta_3 + \theta_4 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_5 - \theta_6$$

Exemplos de $H(e^{j\omega})$

Atrasador Temporal

- ▶ $h[n] = \delta[n - n_0] \xleftrightarrow{Z} H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0}$.
- ▶ $|H(e^{j\omega})| = 1$ enquanto $\Theta(\omega) = -\omega n_0$
- ▶ Atraso de grupo (slide 140): $G(\omega) = n_0$;
- ▶ Note que $H(z)$ só tem pólos na origem. Interpretação gráfica: cada pólo contribui
 - Um multiplicador $D_i = 1$ à magnitude de $H(e^{j\omega})$.
 - Uma parcela $\theta_i = -\omega$ à fase de $H(e^{j\omega})$.
- ▶ Exemplo $n_0 = 6$



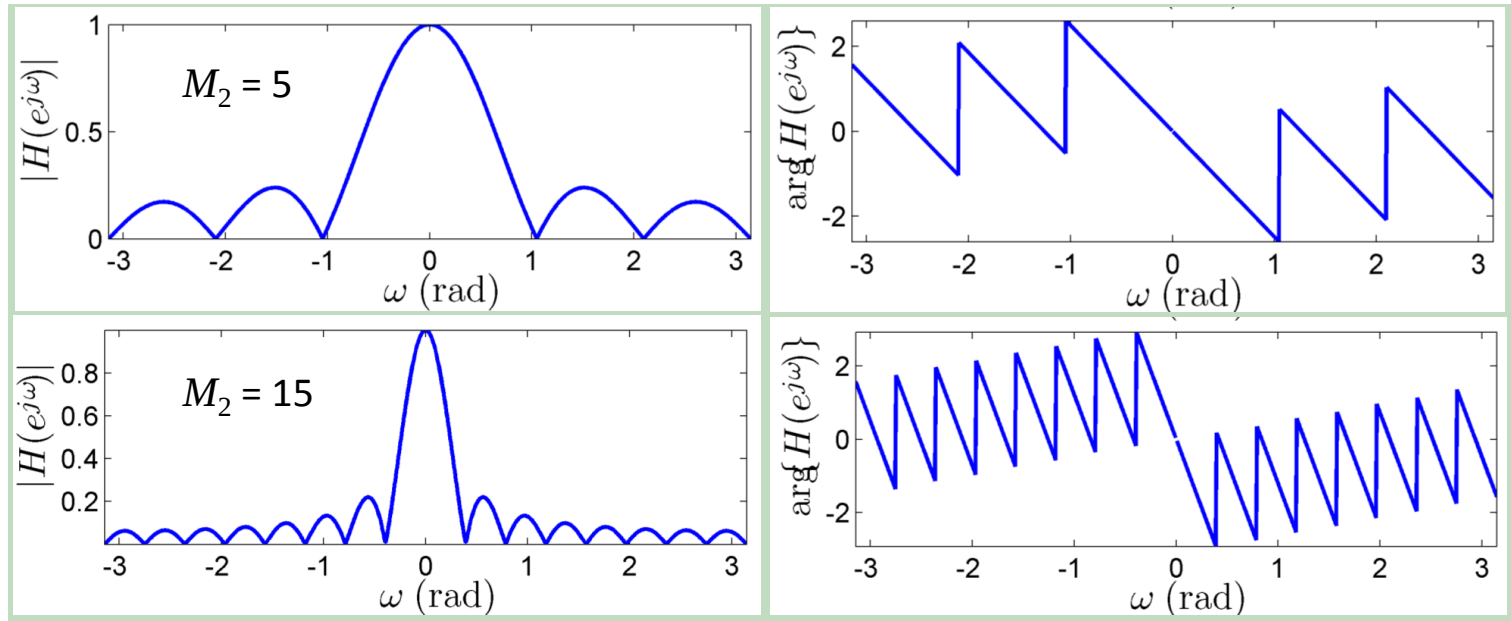
Exemplos de $H(e^{j\omega})$

Sistema Média-Móvel Causal

► $h[n]$ é FIR, logo o sistema é estável.

► $H(z) = \frac{1-z^{-(M_2+1)}}{1-z^{-1}} \rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{1-e^{-j\omega(M_2+1)}}{1-e^{-j\omega}}$.

► A RDC de $H(z)$ inclui a circunferência unitária devido ao cancelamento zero-pólo em $z = 1$.



Sistema Média-Móvel Causal

Atraso de Grupo de $H(e^{j\omega})$

- ▶ Para ordem M_2 (ou $M_2 + 1$ coefs.): $G(\omega, M_2) = \frac{M_2}{2}, \forall \omega$.
- ▶ Em geral, para qualquer sistema FIR de ordem M , com FASE LINEAR:

$$G(\omega, M) = \frac{M}{2}, \forall \omega$$

- ▶ Aumento da ordem M do sistema $\Rightarrow$ aumento do atraso do sinal na saída do sistema.

Sistema Média-Móvel Causal: Discussão

Quando $M2 \rightarrow \infty$

- ▶ $h[n]$ se torna uma sequência lateral direita infinitamente longa.
- ▶ $H(e^{j\omega})$ vai tender para um **Impulso Contínuo** na origem.

Dualidade: Tempo $\times$ Frequência

- ▶ Sequências $h[n]$ de **duração LONGA/CURTA** $\Leftrightarrow H(e^{j\omega})$ com **concentração de energia em faixa ESTREITA/EXTENSA** de frequências.
 - $h[n] = \delta[n] \longleftrightarrow H(e^{j\omega}) = 1, \forall \omega$
 - $h[n] = u[n] \longleftrightarrow H(e^{j\omega}) = \delta(\omega \pm 2\pi k), \text{ com } k \in \mathbb{Z}$

Existência de $H(e^{j\omega})$

- ▶ $h[n] = u[n]$ é absolutamente somável?
- ▶ $h[n] = \cos(\pi n/4)u[n]$ é absolutamente somável? Não tem pólos sobre a circunferência unitária?
- ▶ Para os casos acima $H(e^{j\omega})$ existe?

Transformada de Fourier de Sinais a Tempo Discreto

Também chamada de DTFT

Escopo de Aplicação

- ▶ Sinais discretos $x[n]$, finitos (amplitude) e, em geral, não-periódicos.

Representação de Fourier de $x[n]$

- ▶ Equação de Síntese

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

- ▶ Equação de Análise

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

- ▶ Notação: $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$.

DTFT: Propriedades Fundamentais de $X(e^{j\omega})$

$$X(e^{j\omega}) \in \mathbb{C}$$

- ▶ $X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\Theta(\omega)}$, com $\Theta(\omega) = \arg\{X(e^{j\omega})\}$
 - ◊ $X(e^{j\omega})$ é chamado de **Espectro de Fourier**.
 - ◊ $|X(e^{j\omega})|$ e $\Theta(\omega)$ são funções reais em ω : Espectros de Magnitude e de Fase
- ▶ $X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$:
 - ◊ $X_R(e^{j\omega}) = \Re\{X(e^{j\omega})\}$ e $X_I(e^{j\omega}) = \Im\{X(e^{j\omega})\}$

Periodicidade

- ▶ $X(e^{j\omega})$ é **PERIÓDICA** em ω com período 2π .

Relação com a Transformada- z

- ▶ Seja $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$. Se a RDC de $X(z)$ incluir a circunferência unitária $|z| = 1$, a convergência da DTFT de $x[n]$ é garantida.

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) = X(z = e^{j\omega})$$

DTFT: Interpretações

Decomposição via Projeções

- **Equação de Análise:** Para uma dada frequência ω , $X(e^{j\omega})$ pode ser visto como a projeção de $x[n]$ sobre a componente $e^{-j\omega n}$ (exponencial complexa discreta).

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- **Equação de Síntese:** $x[n]$ é composto por uma combinação de infinitas funções exponenciais discretas, $e^{j\omega n}$, pesadas por $X(e^{j\omega})/2\pi$.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

DTFT: Sobre a Convergência Uniforme

Existência de $X(e^{j\omega})$

- ▶ $X(e^{j\omega})$ converge **Uniformemente** se o sinal $x[n]$ for **Absolutamente Somável**.

Observações

- ▶ O critério para convergência **uniforme** não é atendido para certos sinais úteis, para os quais $X(e^{j\omega})$ não-existiria. Ex.:

$$\diamond x[n] = u[n] \quad \text{ou} \quad x[n] = K, \text{ com } K \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad x[n] = e^{j\omega_0 n}$$

Relaxamento da Convergência Uniforme

- ▶ $X(e^{j\omega}) \rightarrow \infty$ para um número finito de valores de ω (dentro de um período)
- ▶ $X(e^{j\omega})$ pode ser expresso em função de $\delta(\omega)$:

$$\delta(\omega) = 0, \quad \text{para } \omega \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) d\omega = 1$$

DTFT: Relaxamento da Convergência Uniforme

Estudo de Caso: $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ (Periódico)

► Se $x[n]$ é periódico, com período N , então

$$\omega_0 = \frac{2\pi k}{N}, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \text{ e } N \in \mathbb{Z}.$$

► Tem-se que

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 n} e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_0 - \omega)n}$$

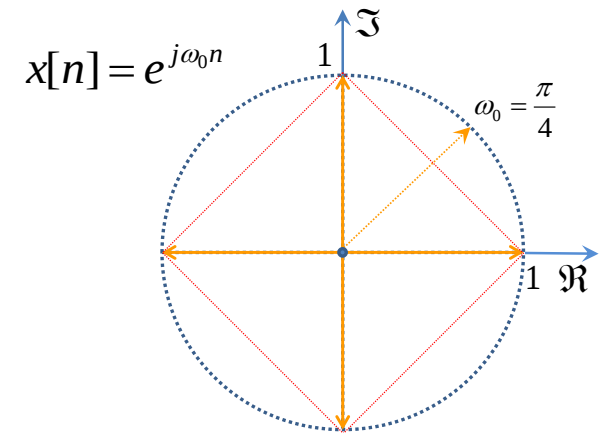
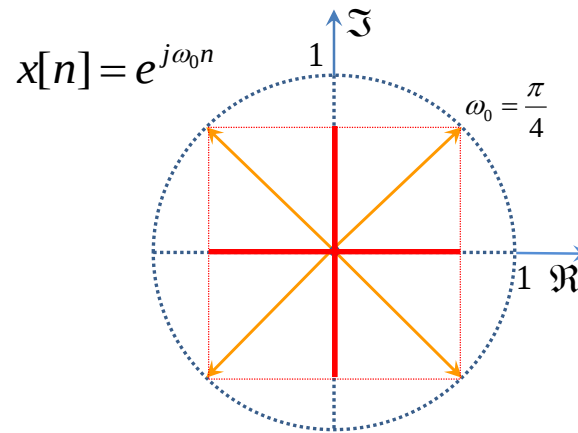
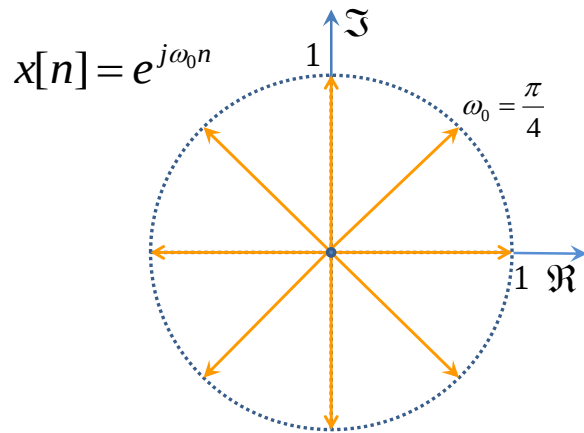
► Para $\omega \neq \omega_0 + 2\pi r$, com $r \in \mathbb{Z}$: $X(e^{j\omega}) = 0$

◊ A projeção de $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ sobre a componente $e^{-j\omega n}$ vai ser sempre nula.

► Para $\omega = \omega_0 + 2\pi r$: $X(e^{j\omega}) \rightarrow \infty$

Estudo de Caso: $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ (Periódico)

Interpretação Gráfica com $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$ rad/amostra e $\omega = 0$ rad/amostra



► Os termos em quadratura se cancelam, exceto quando $\omega = \omega_0 + 2\pi r$, com $r \in \mathbb{Z}$.

$$e^{j\omega_0 n} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r)$$

► **Verificação formal:** aplicação de $X(e^{j\omega})$ na fórmula de síntese.

Implicações

- ▶ Para a classe de seqüências PERIÓDICAS

$$x[n] = \sum_k c_k e^{j\omega_k n}, \quad \forall n$$

- ▶ Segue que

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_k 2\pi c_k \delta(\omega - \omega_k + 2\pi r)$$

- ▶ **Espectro de Fourier de $x[n]$:**

- ◇ É periódico em ω .
- ◇ Dentro de um período: **é não-nulo em um número finito de frequências ω_k .**
- ◇ Pode ser representado pela **Série de Fourier.**

SÉRIE de Fourier a Tempo Discreto

Escopo de Aplicação

- ▶ Sinais PERIÓDICOS: $x[n] = x[n + N]$, $\forall n$ e com $N \in \mathbb{Z}$.

Série de Fourier de $x[n]$

- ▶ Equação de Síntese

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi k}{N}n}$$

- ▶ Equação de Análise

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$$

- ▶ c_k é uma sequência periódica com período N , i.e. $c_k = c_{k+N}$.
- ▶ $2\pi c_k$ é a **ÁREA** dos impulsos de $X(e^{j\omega})$ presentes em $\delta(\omega - \omega_k + 2\pi r)$, sendo $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$.

DTFT: Pares Comuns

TABLE 2.3 FOURIER TRANSFORM PAIRS

Sequence	Fourier Transform
1. $\delta[n]$	1
2. $\delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
3. 1 $(-\infty < n < \infty)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega + 2\pi k)$
4. $a^n u[n]$ $(a < 1)$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
5. $u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega + 2\pi k)$
6. $(n + 1)a^n u[n]$ $(a < 1)$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$
7. $\frac{r^n \sin \omega_p (n + 1)}{\sin \omega_p} u[n]$ $(r < 1)$	$\frac{1}{1 - 2r \cos \omega_p e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$
8. $\frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases}$
9. $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{\sin[\omega(M + 1)/2]}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$
10. $e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$
11. $\cos(\omega_0 n + \phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [\pi e^{j\phi} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + \pi e^{-j\phi} \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$

Fonte: Oppenheim (com correção de erro no item 10.)

DTFT: Função $\text{sinc}(t)$

Definição (Função SINC Normalizada)

$$\text{sinc}(t) = \frac{\text{sen}(\pi t)}{\pi t}, \quad \text{com } t \in \mathbb{R}$$

Propriedades

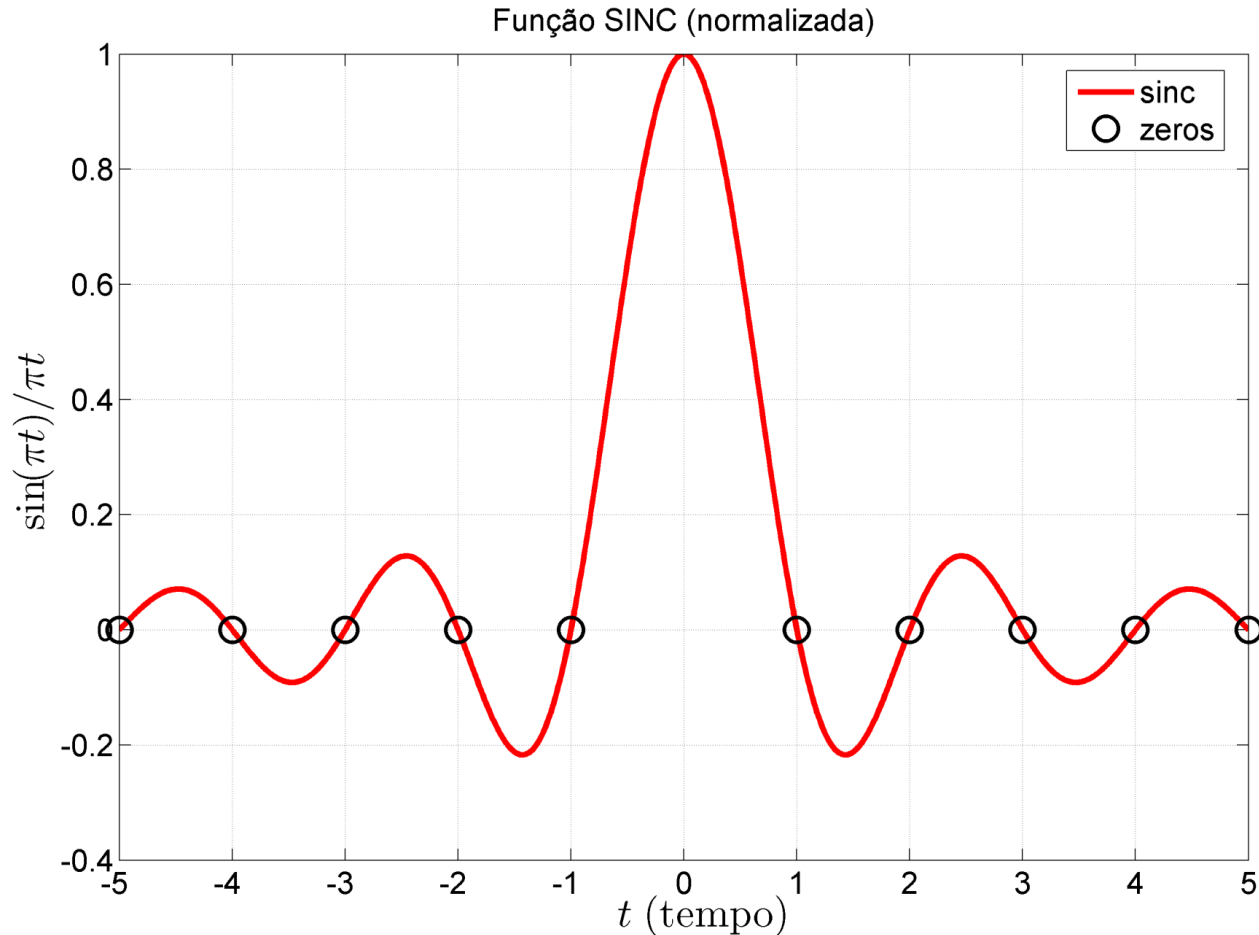
$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t) dt = 1$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{1}{a} \text{sinc} \left(\frac{t}{a} \right) \right) = \delta(t)$$

► Os zeros $\text{sinc}(t)$ ocorrem em valores inteiros não-nulos de t .

DTFT: Função $\text{sinc}(t)$

Representação Gráfica



DTFT: Função $\text{sinc}[n - k]$

SINC com Argumentos Inteiros

- Pode-se mostrar que:

$$\text{sinc}[n - k] = \begin{cases} 1, & \text{se } n = k \\ 0, & \text{se } n \neq k \end{cases}$$

$$\text{sinc}[n - k] = \delta[n - k]$$

- Útil na computação de $x[n]$ partindo de $X(e^{j\omega})$ (síntese).
- Explica como um sinal discreto pode ser obtido da integração de funções contínuas em ω .

Definições Iniciais

- ▶ Seqüência (ou função) complexa simétrico-conjugada: $x_e[n] = x_e^*[-n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n])$
- ▶ Seqüência (complexa) anti-simétrico-conjugada: $x_o[n] = -x_o^*[-n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n])$
- ▶ Para qualquer seqüência (ou função) complexa: $x[n] = x_e[n] + x_o[n]$
- ▶ Sendo função complexa, o espectro $X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$, com:

$$X_e(e^{j\omega}) = X_e^*(e^{-j\omega}) \text{ e } X_o(e^{j\omega}) = -X_o^*(e^{-j\omega})$$

No mais,

$$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} \left(X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega}) \right)$$

$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} \left(X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega}) \right)$$

- ▶ Obs.: $X_e(e^{j\omega}) \neq \mathcal{F}\{x_e[n]\}$.

DTFT: Propriedades de Simetria

TABLE 2.1 SYMMETRY PROPERTIES OF THE FOURIER TRANSFORM

Sequence $x[n]$	Fourier Transform $X(e^{j\omega})$
1. $x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
2. $x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
3. $\mathcal{R}e\{x[n]\}$	$X_e(e^{j\omega})$ (conjugate-symmetric part of $X(e^{j\omega})$)
4. $j\mathcal{I}m\{x[n]\}$	$X_o(e^{j\omega})$ (conjugate-antisymmetric part of $X(e^{j\omega})$)
5. $x_e[n]$ (conjugate-symmetric part of $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega}) = \mathcal{R}e\{X(e^{j\omega})\}$
6. $x_o[n]$ (conjugate-antisymmetric part of $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega}) = j\mathcal{I}m\{X(e^{j\omega})\}$
<i>The following properties apply only when $x[n]$ is real:</i>	
7. Any real $x[n]$	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ (Fourier transform is conjugate symmetric)
8. Any real $x[n]$	$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$ (real part is even)
9. Any real $x[n]$	$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$ (imaginary part is odd)
10. Any real $x[n]$	$ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) $ (magnitude is even)
11. Any real $x[n]$	$\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$ (phase is odd)
12. $x_e[n]$ (even part of $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega})$
13. $x_o[n]$ (odd part of $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega})$

Fonte: Oppenheim

Propriedades e Teoremas da DTFT

Considerações Iniciais e Notação

► Geral: $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$

► Para duas seqüências:

$$x_1[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(e^{j\omega})$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(e^{j\omega})$$

Linearidade

► Para a e b escalares:

$$\text{► } ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

Deslocamento Temporal

$$\text{► } x[n - n_0] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

Propriedades da DTFT

Modulação em Freqüência

$$\blacktriangleright e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X\left(\frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega_0}}\right) = X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

Diferenciação na Freqüência

$$\blacktriangleright nx[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} -j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

Reversão Temporal

$$\blacktriangleright x[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{-j\omega}), \text{ se } x[n] \in \mathbb{C}$$

$$\blacktriangleright x[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X^*(e^{j\omega}), \text{ se } x[n] \in \mathbb{R}$$

Convolução Linear de Seqüências

$$\blacktriangleright x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(e^{j\omega}) X_2(e^{j\omega})$$

Propriedades da DTFT

Teorema de Parseval

- Conservação de Energia:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

- $|X(e^{j\omega})|^2$ é chamado de espectro de densidade de energia.

Modulação em Amplitude (Janelamento Temporal)

$$x_1[n]x_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

- O termo da direita é uma **Convolução Periódica (caso contínuo)**.
- Implicações importantes para a análise de sinais com duração finita: **Resolução Tempo-Frequência**.

DTFT: Propriedades e Teoremas

TABLE 2.2 FOURIER TRANSFORM THEOREMS

Sequence	Fourier Transform
$x[n]$	$X(e^{j\omega})$
$y[n]$	$Y(e^{j\omega})$
1. $ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
2. $x[n - n_d]$ (n_d an integer)	$e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega})$
3. $e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
4. $x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$ $X^*(e^{j\omega})$ if $x[n]$ real.
5. $nx[n]$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
6. $x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
7. $x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega - \theta)})d\theta$
Parseval's theorem:	
8. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$	
9. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$	

Fonte: Oppenheim

Transformada de Fourier de Sinais a Tempo Contínuo

Escopo de Aplicação da CTFT

- ▶ Sinais a tempo contínuo $x(t)$, finitos na amplitude e, em geral, não-periódicos.

Representação de Fourier de $x(t)$

- ▶ Equação de Síntese

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

- ▶ Equação de Análise

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

- ▶ Notação: $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\Omega)$.

Transformada de Fourier de Sinais a Tempo Contínuo

Propriedade: Modulação em Amplitude

$$x_1(t)x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} [X_1(j\Omega) * X_2(j\Omega)]$$

$$\frac{1}{2\pi} [X_1(j\Omega) * X_2(j\Omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\Theta) X_2(j(\Omega - \Theta)) d\Theta$$

- O produto de dois sinais contínuos no tempo é proporcional à convolução de suas respectivas transformadas de Fourier

Sinais Periódicos: Representação via SÉRIE de Fourier

► $x(t)$ é periódico, com período $T = 2\pi/\Omega = 1/f$.

► **Equação de Síntese**

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\Omega kt}$$

► **Equação de Análise**

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\Omega kt} dt$$

Representação de Estado

Motivação

- ▶ Representação de um sistema via EDs: 1 Entrada e 1 Saída (SISO).
- ▶ E se um sistema (causal) tiver Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas (MIMO)?
 - ◇ Usar Representação de Estado!

Representação de Estado (RE)

- ▶ Inclui informação sobre o estado interno do sistema.
- ▶ Permite saber da dinâmica do sistema pela análise das **variáveis de estado**.
- ▶ Variáveis de estado: descrevem completamente a resposta futura do sistema, conhecendo-se o estado atual, o sinal de entrada e a equação de estado.

Representação de Estado

RE: Forma Geral

$$\begin{cases} \mathbf{s}[n+1] = f(\mathbf{s}[n], \mathbf{x}[n], n) & \text{(Equação de Estado)} \\ \mathbf{y}[n] = g(\mathbf{s}[n], \mathbf{x}[n], n) & \text{(Equação de Saída)} \end{cases}$$

► Notação:

- ◇ n : Instante de tempo (discreto)
- ◇ $\mathbf{s}[n] = [s_1[n] \ \cdots \ s_N[n]]^T$: Vetor de Estados (de dimensão $N \times 1$):
- ◇ $\mathbf{x}[n] = [x_1[n] \ \cdots \ x_E[n]]^T$: Vetor de Entrada (de dimensão $E \times 1$):
- ◇ $\mathbf{y}[n] = [y_1[n] \ \cdots \ y_S[n]]^T$: Vetor de Saída (de dimensão $S \times 1$):
- ◇ N : Ordem da equação de estado

Representação de Estado

Sistema MIMO Linear Variante no Tempo

$$\begin{cases} \mathbf{s}[n+1] = \mathbf{A}[n]\mathbf{s}[n] + \mathbf{B}[n]\mathbf{x}[n] \\ \mathbf{y}[n] = \mathbf{C}[n]\mathbf{s}[n] + \mathbf{D}[n]\mathbf{x}[n] \end{cases}$$

$\mathbf{A}[n]$: matriz $N \times N$; $\mathbf{B}[n]$: matriz $N \times E$;

$\mathbf{C}[n]$: matriz $S \times N$; $\mathbf{D}[n]$: matriz $S \times E$.

Sistema Linear Invariante no Tempo

► As matrizes $\mathbf{A}[n]$, $\mathbf{B}[n]$, $\mathbf{C}[n]$ e $\mathbf{D}[n]$ são constantes para todo n .

Sistema LTI SISO

► $E = S = 1$.

► (Matriz) $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{b}$ (vetor); (Matriz) $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{c}^T$ (vetor); (Matriz) $\mathbf{D} \rightarrow d$ (escalar).

Representação de Estado

Teorema

- ▶ Um sistema linear discreto descrito por uma ED de ordem N , sempre pode ser colocado na forma de uma RE de ordem N .

Propriedades

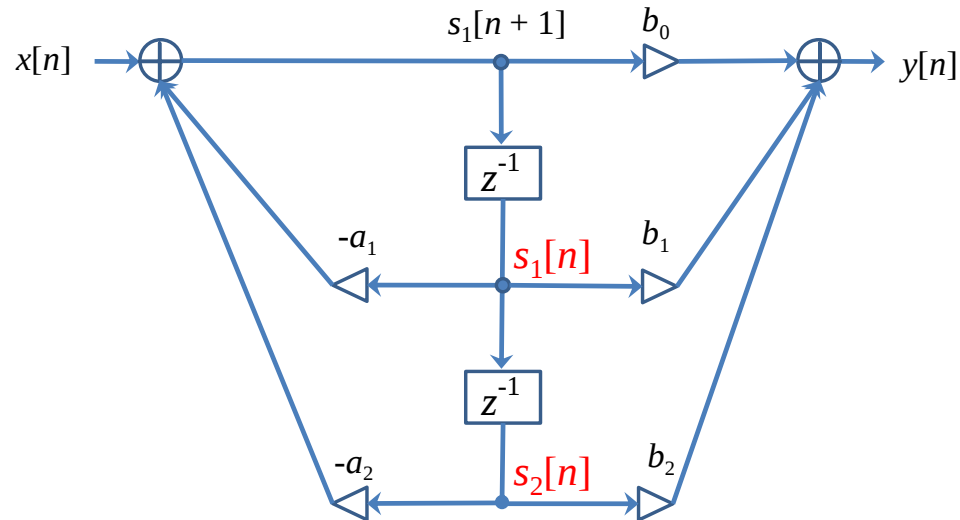
- ▶ A cada conjunto de N condições iniciais conhecidas de uma ED de ordem N existe uma única solução $s[n]$ para a equação de estado correspondente.
- ▶ A representação de estado não é única.

Na Prática

- ▶ Quem seria o vetor de estados de um sistema LTI?

RE: Exemplo Prático

Estudo de Caso: Sistema SISO de Segunda-Ordem ($N = 2$)



► **Escolha Típica:** Associar os estados às saídas dos atrasadores unitários.

► Do diagrama:

$$\diamond s_1[n+1] = -a_1 s_1[n] - a_2 s_2[n] + x[n]$$

$$\diamond s_2[n+1] = s_1[n]$$

$$\begin{aligned} \diamond y[n] &= b_1 s_1[n] + b_2 s_2[n] + b_0 s_1[n+1] \\ &= (b_1 - b_0 a_1) s_1[n] + (b_2 - b_0 a_2) s_2[n] + b_0 x[n] \end{aligned}$$

RE: Exemplo Prático

Equações de Estado

► Do diagrama:

$$\diamond s_1[n+1] = -a_1 s_1[n] - a_2 s_2[n] + x[n]$$

$$\diamond s_2[n+1] = s_1[n]$$

$$\diamond y[n] = (b_1 - b_0 a_1) s_1[n] + (b_2 - b_0 a_2) s_2[n] + b_0 x[n]$$

► Em forma vetorial:

$$\begin{cases} \mathbf{s}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{s}[n] + \mathbf{b}x[n] \\ y[n] = \mathbf{c}^T \mathbf{s}[n] + dx[n] \end{cases}$$

Com

$$\mathbf{s}[n] = \begin{pmatrix} s_1[n] \\ s_2[n] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = [1 \ 0]^T, \quad \mathbf{c}^T = [(b_1 - b_0 a_1) \ (b_2 - b_0 a_2)], \quad d = b_0$$

Solução da Equação de Estado Linear

Sistema Linear Não-Forçado (Homogêneo)

$$\mathbf{s}[n+1] = \mathbf{A}[n]\mathbf{s}[n], \quad \mathbf{s}[0] = \mathbf{s}_0$$

Matriz de Transição de Estado $\Phi(n, l)$

- Leva o estado $\mathbf{s}[l]$ (instante l) ao estado $\mathbf{s}[n]$ (em $n \geq l$): $\mathbf{s}[n] = \Phi(n, l)\mathbf{s}[l]$.
- **Definição:** $\Phi(n, l)$ é Matriz de Transição se satisfaz às seguintes propriedades:

$$\Phi(n+1, l) = \mathbf{A}[n]\Phi(n, l), \quad \text{se } n > l$$

$$\Phi(l, l) = \mathbf{I} \quad (\text{Matriz Identidade})$$

Solução da Equação de Estado

$$\mathbf{s}[n] = \Phi(n, 0)\mathbf{s}_0, \quad n \geq 0$$

Solução do Sistema (Homogêneo)

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}[n]\mathbf{s}[n] = \mathbf{C}[n]\Phi(n, 0)\mathbf{s}_0, \quad n \geq 0$$

Exemplo: Solução de Sistema Homogêneo

Sistema LTI Homogêneo

$$\mathbf{s}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{s}[n], \quad \mathbf{s}[0] = \mathbf{s}_0$$

Solução da Equação de Estado

$$\begin{array}{lll} n = 0 : & \mathbf{s}[1] & = \mathbf{A}\mathbf{s}[0] = \mathbf{A}\mathbf{s}_0 \\ n = 1 : & \mathbf{s}[2] & = \mathbf{A}^2\mathbf{s}_0 \\ n = 2 : & \mathbf{s}[3] & = \mathbf{A}^3\mathbf{s}_0 \\ & \vdots & \vdots \\ n = p : & \mathbf{s}[p+1] & = \mathbf{A}^{p+1}\mathbf{s}_0 \end{array}$$

Em geral:

$$\mathbf{s}[n] = \mathbf{A}^n \mathbf{s}_0$$

Matriz de Transição

$$\Phi(n, 0) = \mathbf{A}^n, \quad n > 0$$

Em geral:

$$\Phi(n, l) = \mathbf{A}^{n-l}, \quad n > l$$

RE: RI e Função de Transferência

Sistema SISO, Inicialmente Relaxado: $s[0] = 0$

Pode-se mostrar que:

► Resposta Impulsiva:

$$h[n] = d\delta[n] + \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} u[n-1]$$

► Função de Transferência:

$$H(z) = d + z^{-1} \mathbf{c}^T (\mathbf{I} - z^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}$$

ou

$$H(z) = d + \mathbf{c}^T (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}$$

RE: Pólos de $H(z)$

Os pólos de $H(z)$ são os auto-valores de $\mathbf{A}$

- Se $H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$, então $D(z)$ é dado por

$$D(z) = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) \quad (\text{Equação Característica I})$$

- Os auto-valores λ e os correspondentes auto-vetores $\mathbf{v}$ de $\mathbf{A}$ satisfazem

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad \text{ou} \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

- A solução não-trivial do sistema acima é

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \quad (\text{Equação Característica II})$$

- ECs I e II são equivalentes, exceto por uma troca de sinal. Logo, as raízes de $D(z)$ são os auto-valores de $\mathbf{A}$.

A Representação de Estado Não é Única!

- Seja $\mathbf{T}$ (matriz não-singular $N \times N$) uma transformação linear aplicada ao estado $\mathbf{s}[n]$:

$$\hat{\mathbf{s}}[n] = \mathbf{T}\mathbf{s}[n]$$

- Pode-se mostrar que:

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} \quad \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{T}\mathbf{b}$$

$$\hat{\mathbf{c}}^T = \mathbf{c}^T\mathbf{T}^{-1} \quad \hat{d} = d$$

Decomposição Diagonal

- A matriz $\mathbf{A}$ com auto-valores distintos pode escrita como

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$$

- As colunas de $\mathbf{P}$ são formadas pelos auto-vetores de $\mathbf{A}$.
- A matriz $\mathbf{\Lambda}$ é **diagonal**, sendo os elementos da diagonal os auto-valores correspondentes aos auto-vetores em $\mathbf{P}$.

RE: Estabilidade Assintótica

Definição

- O sistema em tempo discreto de ordem N

$$\mathbf{s}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{s}[n], \quad \mathbf{s}[0] = \mathbf{s}_0$$

é assintoticamente estável se $\mathbf{s}[n]$ **converge para o vetor nulo** para todo $\mathbf{s}_0 \in \mathbb{R}^N$.

Teorema

- O sistema LTI $\mathbf{s}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{s}[n]$ é assintoticamente estável se e somente se

$$|\lambda_i| < 1, \quad \forall i = 1, \dots, N$$

onde λ_i são os autovalores da matriz $\mathbf{A}$.

- É coerente com o fato de os pólos de $H(z)$ serem os auto-valores de $\mathbf{A}$.
- Estabilidade assintótica $\Rightarrow$ estabilidade BIBO.

Teorema da Amostragem

MOTIVAÇÃO

- ▶ Escopo de aplicação de um processador digital de sinais:
 - ◇ Sinais Digitais (domínio e imagem discretizados)
- ▶ Como obter uma representação DIGITAL de um sinal ANALÓGICO sem perda de informação?
 - ◇ Discretização da **IMAGEM** $\Rightarrow$ Perda **IRREVERSÍVEL!**
 - ◇ E quanto à discretização do **DOMÍNIO** (com imagem contínua/analógica)?

O Teorema da Amostragem fornece a resposta!

Teorema da Amostragem – Preâmbulo

Estudo de Caso: Sinais Analógicos de 1 Dimensão

- ▶ Domínio (tempo) e Imagem (amplitude) CONTÍNUOS
- ▶ Notação: $x_c(t)$, com $t \in \mathbb{R}$ e $x_c(t)$ pertencente a um sub-conjunto de $\mathbb{R}$.
 - ◊ O subescrito “c” se refere a “contínuo”!

Espectro de Fourier de $x_c(t)$

- ▶ Notação: $X_c(j\Omega)$, com Ω sendo a frequência, medida em radiano por segundo.
- ▶ $x_c(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_c(j\Omega)$ (Transformada de Fourier de Sinais de Tempo CONTÍNUO)

$$X_c(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) e^{-j\Omega t} dt$$

- ▶ Em geral, $X_c(j\Omega)$ é contínuo e **NÃO-PERIÓDICO** em Ω .
- ▶ **Exceção:** Para $x_c(t)$ PERIÓDICO, $X_c(j\Omega)$ não-nulo é “DISCRETO” (Expresso via Impulsos $\delta(\Omega)$ deslocados em frequência)

Teorema da Amostragem – Preâmbulo

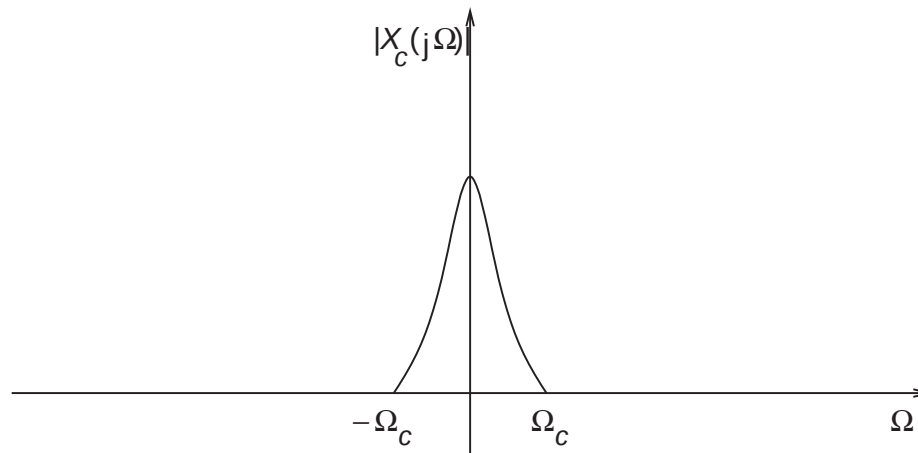
Limitação em Banda

► $x_c(t) \in \mathbb{R}$ é **Limitado em Banda** se

$$X_c(j\Omega) = 0, \text{ para } |\Omega| > \Omega_C$$

onde Ω_C é chamada frequência de corte.

► **Lembrete:** se $x_c(t) \in \mathbb{R}$, a magnitude de seu espectro é simétrica em relação a $\Omega = 0$.



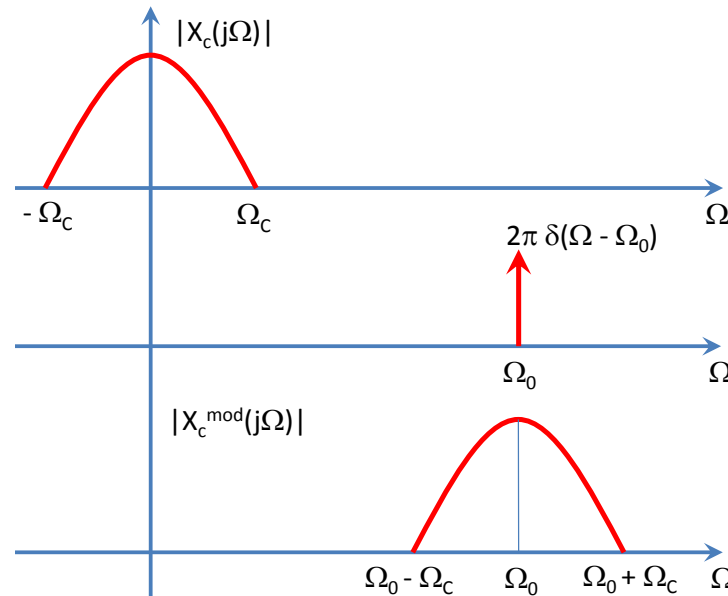
Teorema da Amostragem – Preâmbulo

Convolução com Espectro Impulsivo

$$X_c^{\text{mod}}(j\Omega) = X_c(j\Omega) * 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0) = X_c(j(\Omega - \Omega_0))$$

► Ω_0 é a frequência de modulação.

► Graficamente:



► **Lembrete:** $e^{j\Omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$.

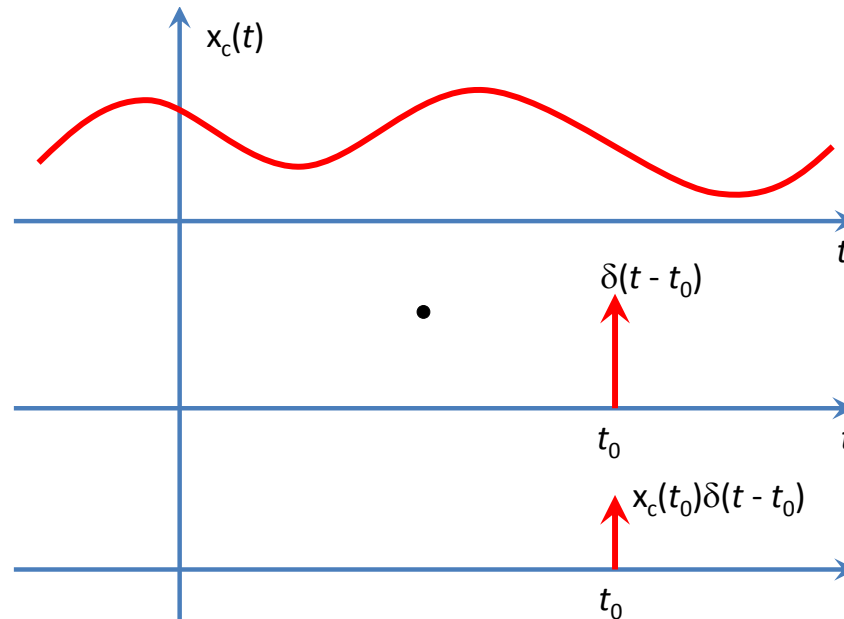
Amostrador IDEAL

Objetivo e Solução

- **Objetivo:** Medir (precisão infinita) o valor de $x_c(t)$ em dado instante $t = t_0$.
- **Solução:** Multiplicar $x_c(t)$ por $\delta(t - t_0)$:

$$x_c(t)\delta(t - t_0) = x_c(t_0)\delta(t - t_0)$$

- Graficamente:



Amostrador Ideal PERIÓDICO

Objetivo: Obter $x[n] = x_c(nT)$

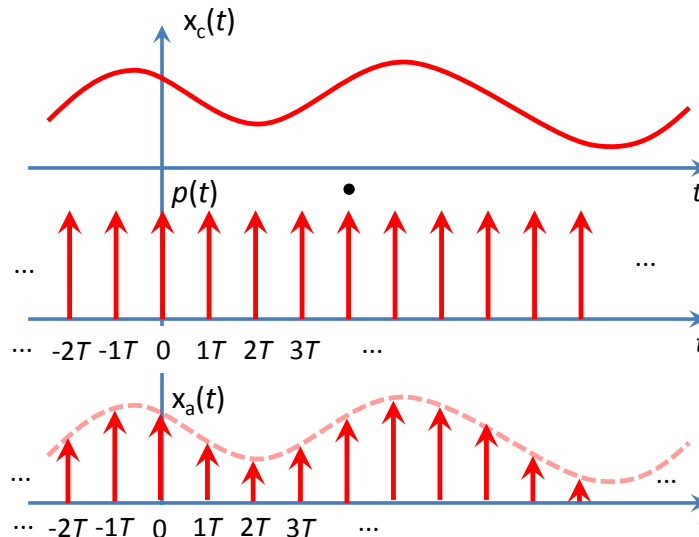
- Formar $x[n]$ pela amostragem de $x_c(t)$ a cada T unidades de tempo, i.e., $t = nT$, com $n \in \mathbb{Z}$.

Solução

- Multiplicar $x_c(t)$ por um **TREM de IMPULSOS**: $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$:

$$x_a(t) \triangleq x_c(t)p(t) = x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t - nT)$$

- Graficamente:



Espectro de $p(t)$

Solução

► Como $p(t)$ é periódico, com período fundamental T (frequência fundamental $\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$):

1. Escrever $p(t)$ via **SÉRIE de Fourier**;
2. Então, obter a Transformada de Fourier desse $p(t)$.

► **Passo 1** (ver Slide 169):

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\Omega_s t} \quad \text{com} \quad c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p(t) e^{-jk\Omega_s t} dt$$

► **A integral é computada sobre 1 período!** E cada período só contém 1 impulso.

◇ Escolha mais simples: período simétrico a $t = 0$.

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\Omega_s t} dt = \frac{1}{T} \quad \text{e} \quad p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jk\Omega_s t}$$

Espectro de $p(t)$

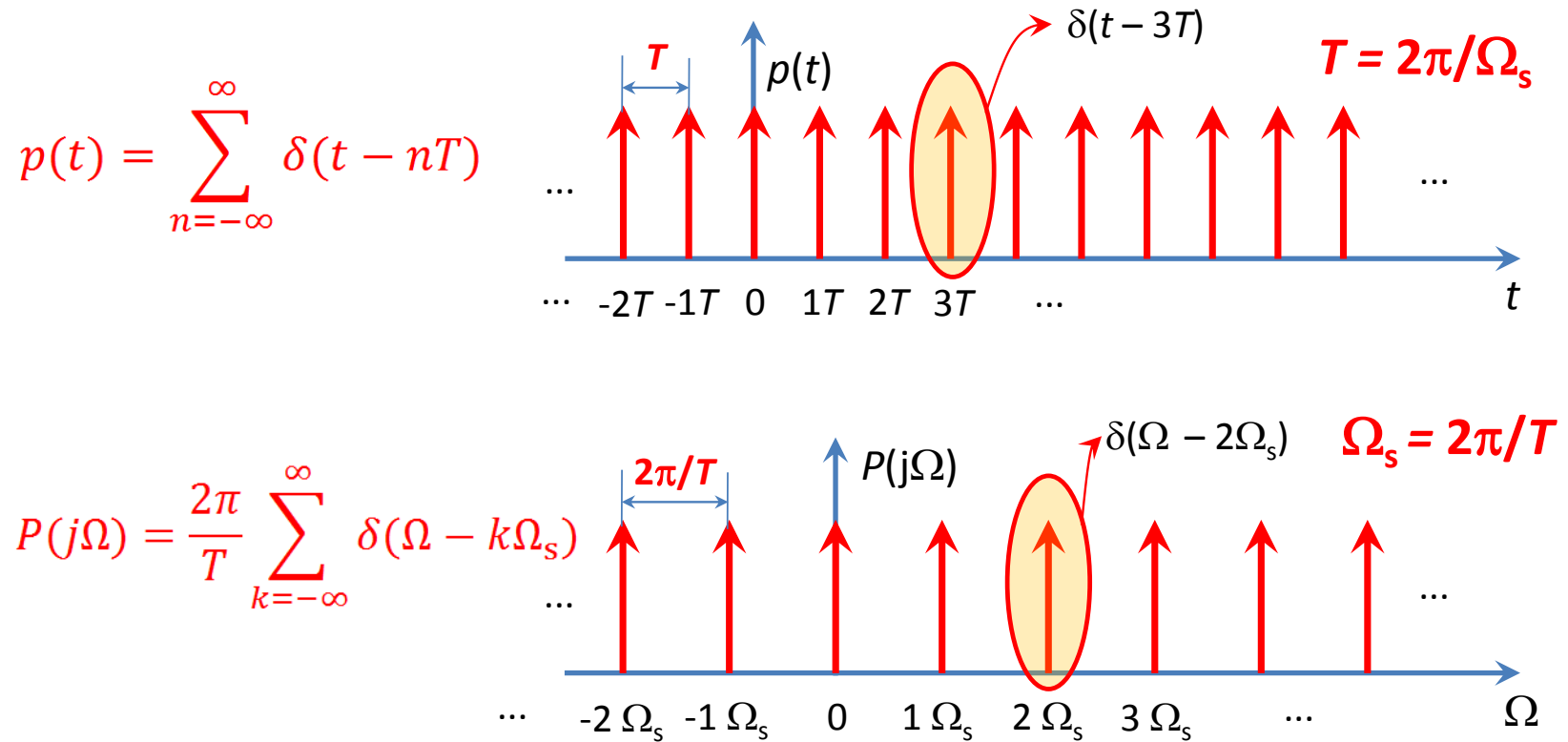
Solução (Continuação)

$$p(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega_s t}$$

► **Passo 2:** Como $e^{j\Omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$, tem-se que

$$P(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s)$$

Graficamente: $p(t)$ e $P(j\Omega)$



Sobre $p(t)$ e $P(j\Omega)$

Observações

► $p(t)$ e $P(j\Omega)$ são ambos PERIÓDICOS.

► Valores não-nulos de $p(t)$:

Conjunto DISCRETO de Instantes nT , $\forall n \in \mathbb{Z}$.

► Valores não-nulos de $P(j\Omega)$:

Conjunto DISCRETO de Frequências $k\Omega_s$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

► Notar a ANALOGIA com as propriedades do Espectro de Fourier de **Sinais Discretos**:

◇ $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$ (**Periódico em ω**)

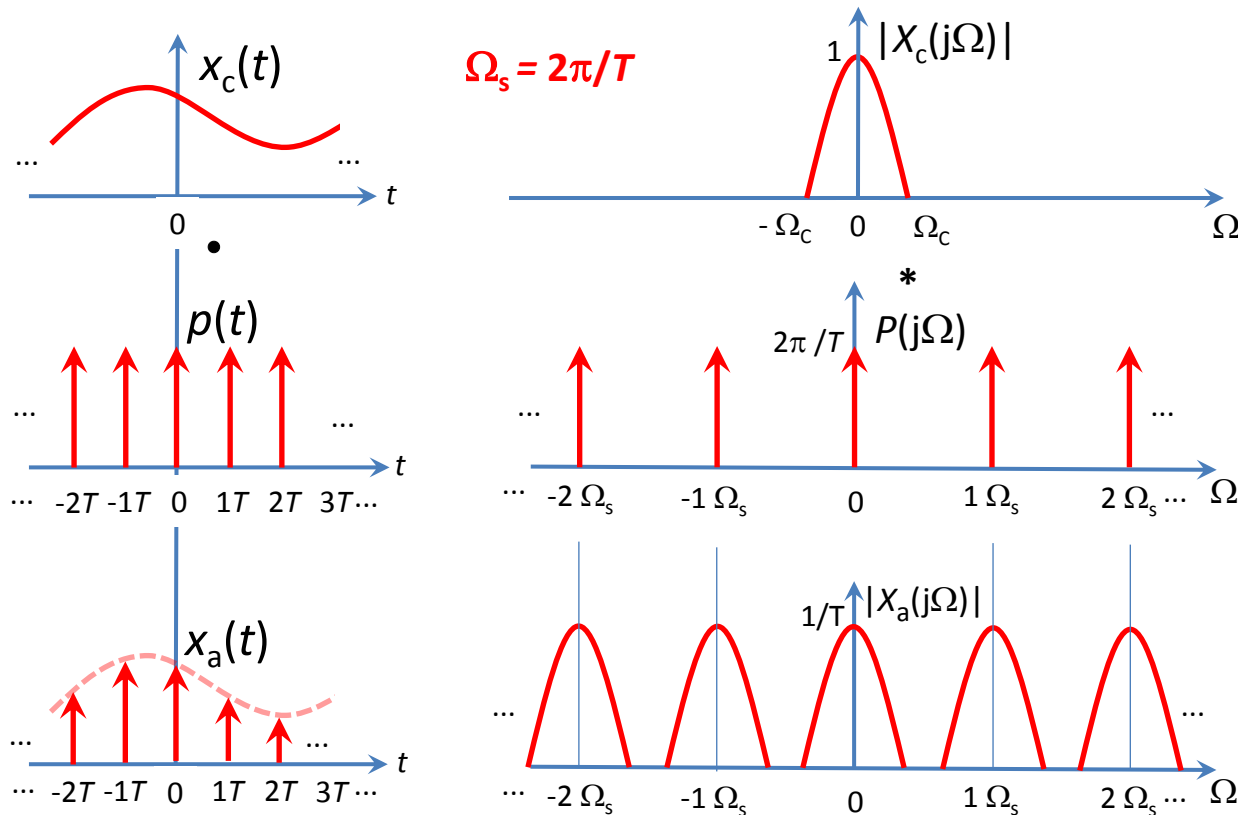
◇ Se, além de discreto, $x[n]$ é **periódico**: $X(e^{j\omega})$ (**Periódico e “Discreto” em ω**)

Espectro de $x_a(t)$

$$x_a(t) \triangleq x_c(t)p(t), \quad \text{logo} \quad X_a(j\Omega) = (X_c(j\Omega) * P(j\Omega))/2\pi$$

Estudo de Caso: $x_c \in \mathbb{R}$ com Banda Limitada

► Interpretação Gráfica



Sobre o Espectro $X_a(j\Omega)$

$$X_a(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) * P(j\Omega)$$

Conclusão Importante

- O efeito espectral do processo de amostragem de $x_c(t)$ via $p(t)$ é **Criar Réplicas** do espectro $X_c(j\Omega)$, centradas a cada múltiplo inteiro da frequência de amostragem Ω_s !

Observações

- Os valores possivelmente não-nulos de $x_a(t)$ ocorrem em instantes “discretos” de t .
- Logo, **faz sentido que $X_a(j\Omega)$ seja periódico em Ω** , o que é coerente com a natureza do espectro de sinais discretos.

E quanto à relação entre $X_a(j\Omega)$ e $X(e^{j\omega})$?

Espectros de $x_a(t)$ e $x[n] = x_c(nT)$

Formalização

$$x_a(t) = x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Aplicando a Transformada de Fourier (tempo contínuo):

$$X_a(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-j\Omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) e^{-j\Omega T n}$$

Comparando-se $X_a(j\Omega)$ com

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

Observa-se que:

$$X_a(j\Omega) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T} = X(e^{j\Omega T})$$

Como a relação entre $X_a(j\Omega)$ e $X_c(j\Omega)$ é:

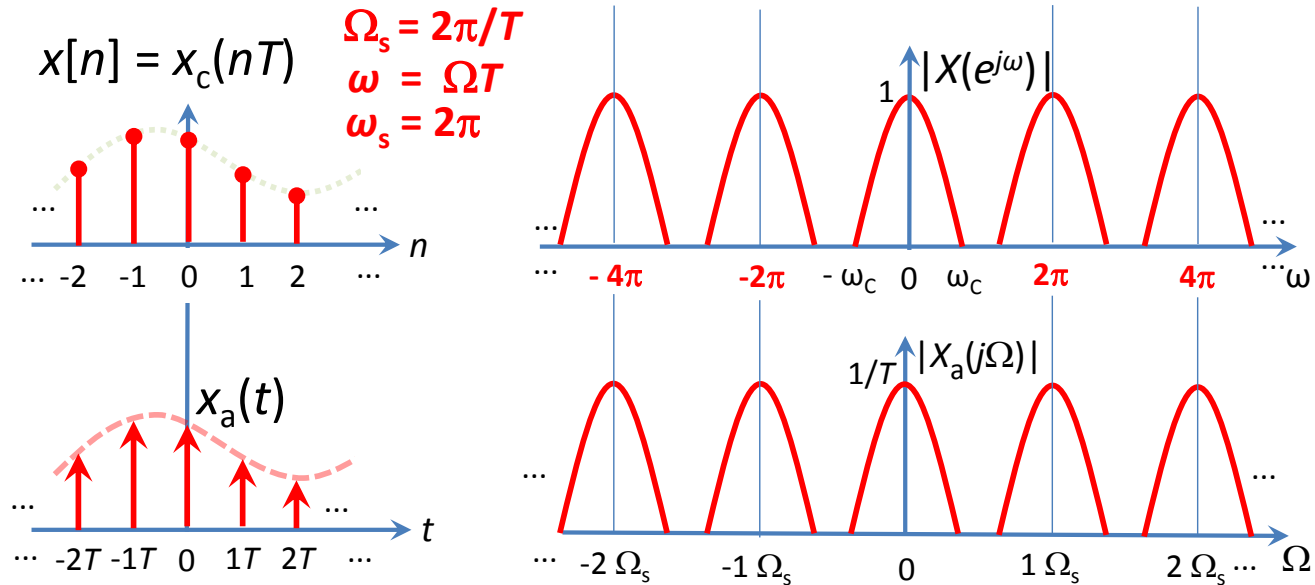
$$X_a(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - k\Omega_s))$$

Tem-se que:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right)$$

Espectros de $x_a(t)$ e $x[n] = x_c(nT)$

Graficamente



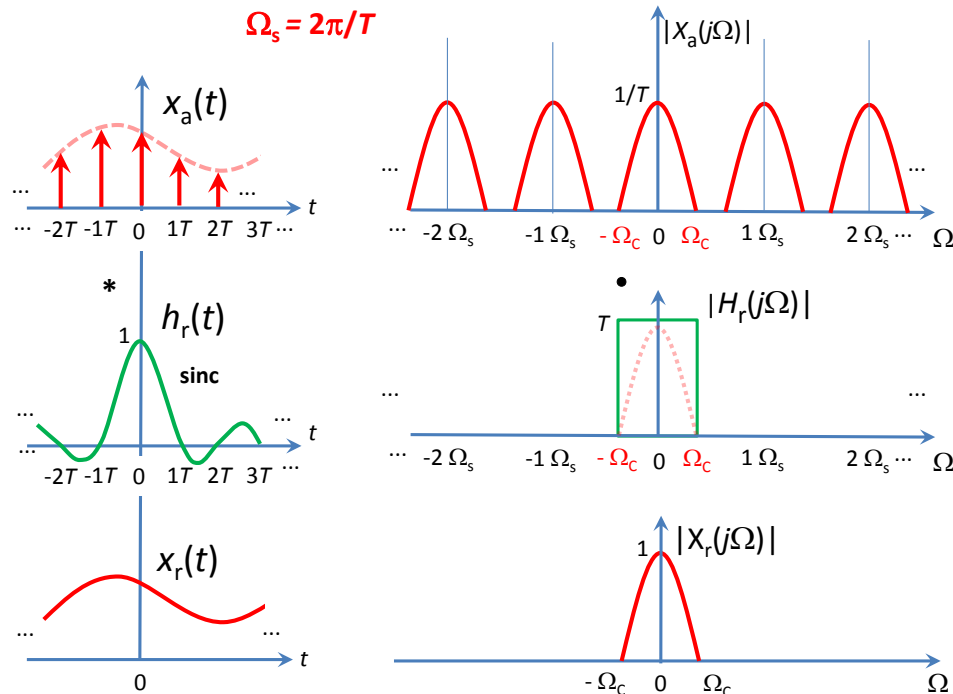
- O valor de T determina a proporção entre as escalas frequenciais em ω e Ω , respectivamente, de $X(e^{j\omega})$ e $X_a(j\Omega)$.

Reconstrução de $x_c(t)$ via $x_a(t)$

- Descartar de $X_a(j\Omega)$ as réplicas de $X_c(j\Omega)$ centradas em frequências múltiplas de Ω_s , **EXCETO** aquela centrada na origem.
- **SOLUÇÃO:** Submeter $x_a(t)$ a um sistema (filtro) ANALÓGICO passa-baixas ideal

$$H_r(j\Omega) = \begin{cases} T, & \text{se } |\Omega| < \Omega_c, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

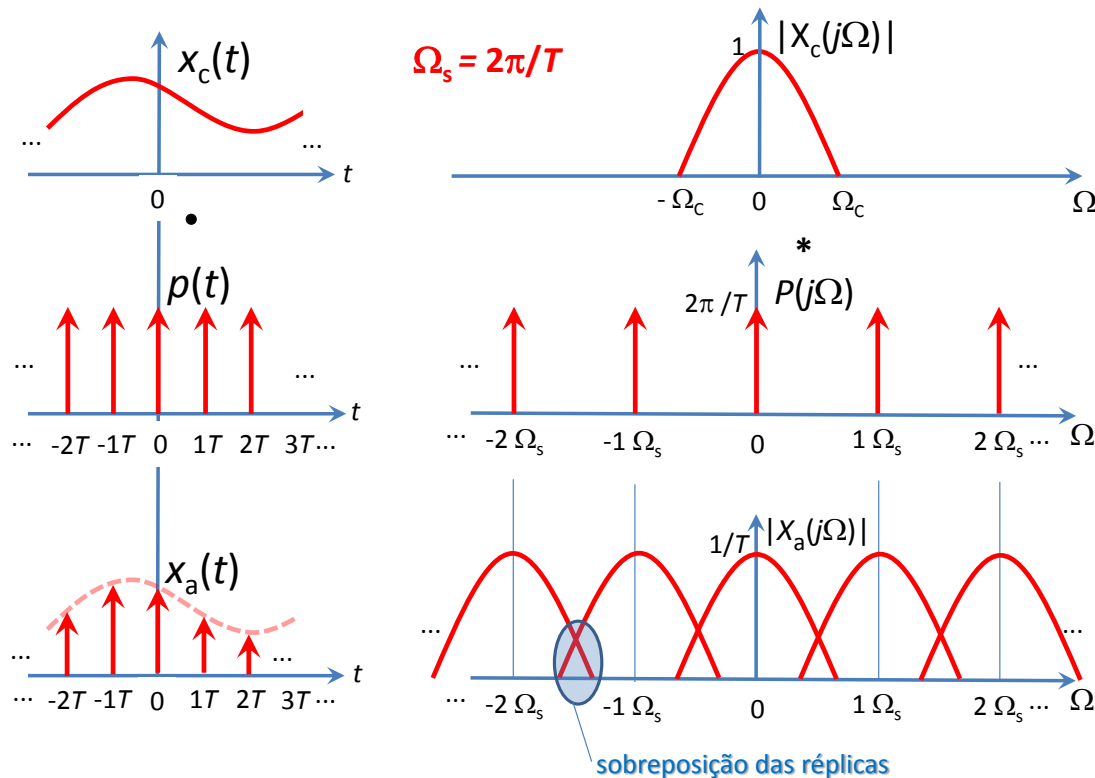
- Graficamente:



Reconstrução de $x_c(t)$ via $x_a(t)$

Como Garantir Reconstrução Perfeita (RP)?

- Réplicas de $X_c(j\Omega)$ em $X_a(j\Omega)$ SEM SOBREPOSIÇÃO frequencial!
- CONDIÇÃO SUFICIENTE: $2\Omega_C < \Omega_s$ ou $\Omega_C < \frac{\Omega_s}{2}$



Teorema da Amostragem

Se um sinal $x_c(t)$ no tempo contínuo tem largura de faixa limitada, isto é, sua transformada de Fourier $X_c(j\Omega)$ é tal que $X_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| > \Omega_C$, então $x_c(t)$ pode ser completamente recuperado a partir do sinal no tempo discreto $x[n] = x_c(nT)$ se e somente se a frequência de amostragem Ω_s satisfizer $\Omega_s > 2\Omega_C$.

A condição $\Omega_s > 2\Omega_C$ é chamada de **Critério de Nyquist**

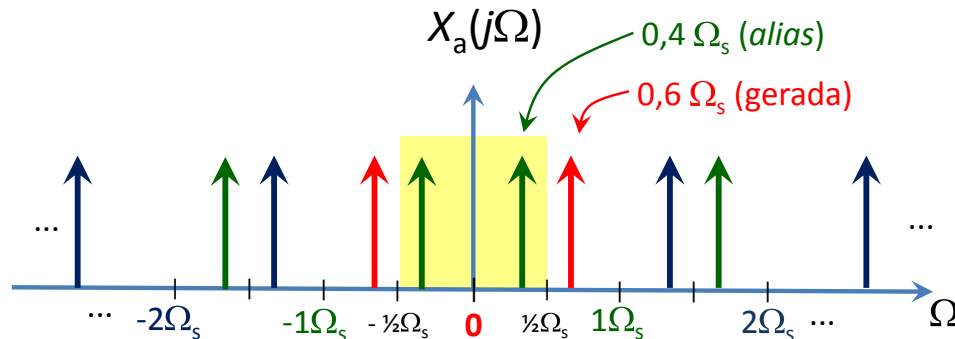
Aliasing

E se o critério $\Omega_s > 2\Omega_C$ não for observado?

- ▶ Ocorre um efeito chamado de **ALIASING**!
- ▶ Do Inglês: *alias* = “pseudônimo”, “apelido”, “conhecido(a) como” ou “impostor(a)”.
- ▶ Do Latim: *alius / alii* = “outro / outros”, como em *et al.*, ou ainda “alienígena”.
- ▶ *Aliasing* decorre da sobreposição das réplicas de $X_c(j\Omega)$ em $X_a(j\Omega)$.

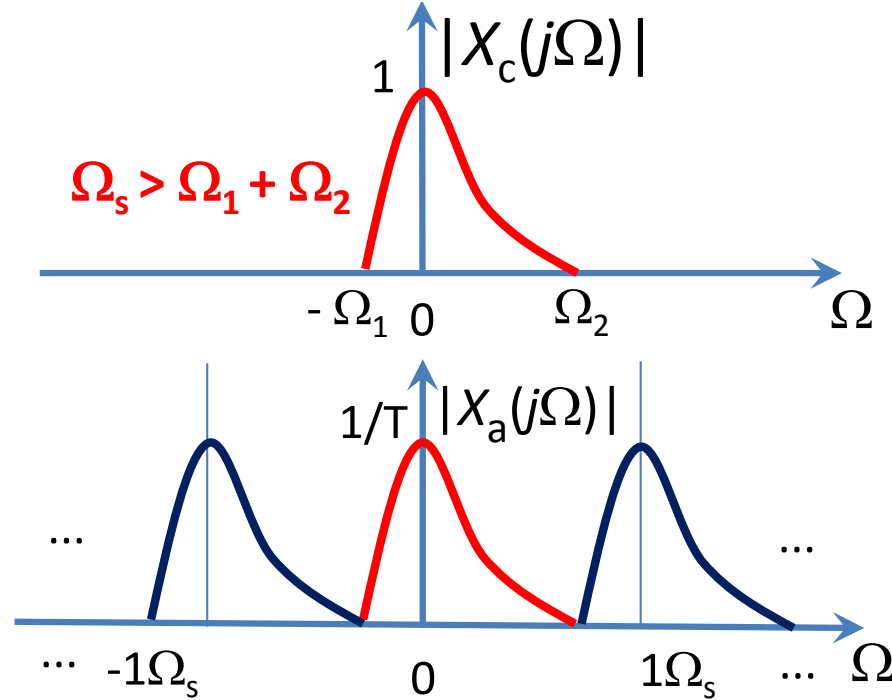
Estudo de Caso: 1 Tom Senoidal Puro

- ▶ $x_c(t) = \cos(\Omega_0 t)$, com $\Omega_0 = 0,6\Omega_s$.
- ▶ Logo, $\Omega_s < 2\Omega_0$ (o critério para Reconstrução Perfeita é violado)



Critério de Nyquist e *Aliasing*

Estudo de Caso 2: Sinal Complexo



- Por propriedade, a magnitude do espectro de sinais complexos pode ser **ASSIMÉTRICA** w.r.t. $\Omega = 0$.
- Considerar para o Critério de Nyquist: $\Omega_C = \Omega_2 + \Omega_1$

Amostragem: Aspectos Práticos

Frequência de Amostragem em Hz

- $\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$ é dada em radianos por segundo. Expressa em Hz (ciclos/segundo), a frequência de amostragem é tipicamente denotada por $f_s = \frac{1}{T}$, onde T é o período de amostragem. Logo,

$$f_s = \frac{\Omega_s}{2\pi}$$

- **Ex.:** Amostrar a 1000 amostras por segundo implica $T = 1/1000$ s e $f_s = \frac{1}{T} = 1$ kHz.

Normalização de Ω_s e f_s

- É comum expressar Ω_s e f_s de forma normalizada.
 - ◇ **Para $T = 1$** (unidade arbitrária de tempo) tem-se: $\Omega_s = 2\pi$ e $f_s = 1$.
 - ◇ O Matlab usa $f_s = 1$, caso não especificada de outra forma.

Amostragem: Aspectos Práticos

Especificação e Projeto de um Sistema de Amostragem

- ▶ Altamente dependente dos **OBJETIVOS** da aplicação de DSP em questão!
- ▶ **Informação necessária:** **Largura de banda** ($2\Omega_C$) do sinal (real) analógico a ser amostrado.
 - ◇ Pode ser inferida (ou estimada) do processo físico que gera o sinal, assim como do sistema de transdução (para sinal elétrico).
- ▶ **Opção 1:**
 - ◇ Se se pode garantir que $|X_c(j\Omega)| = 0$, para $\Omega > \Omega_C$:
 - ◇ Escolher um A/D comercial com taxa de amostragem $f_s > \frac{\Omega_C}{\pi}$.

Como garantir que $|X_c(j\Omega)| = 0$, para $\Omega > \Omega_C$ sempre?

Considerações

- ▶ Na realidade, $x_c(t)$ sempre sofre alguma contaminação por **RUÍDO** de banda larga, e.g., ruído térmico e interferência eletro-magnética nos circuitos elétricos do sistema de transdução.
- ▶ Em outras situações, deseja-se **selecionar** uma faixa de maior interesse de $X_c(j\Omega)$, e.g., a faixa espectral de 0 a 3000 Hz em sinais de voz (faixa dentro da qual há informação suficiente para garantir boa inteligibilidade).

Filtro Anti-Aliasing

- ▶ Visa a garantir que $|X_c(j\Omega)| = 0$, para $\Omega > \Omega_C$.
- ▶ **Opção 2 (Recomendada):**
 - ◇ Passar $x_c(t)$ por um filtro analógico **PASSA-BAIXAS**, com frequência de corte Ω_C .
 - ◇ A filtragem anti-*aliasing* força (idealmente) que $|X_c(j\Omega)| = 0$, para $\Omega > \Omega_C$.
 - ◇ Escolher um A/D com taxa de amostragem SUPERIOR a $2\Omega_C$ ou o equivalente em Hz.
 - ◇ **Lembrete:** Como os filtros anti-*aliasing* não são ideais, incluir uma margem de folga (para cima) na escolha da frequência de amostragem do A/D.

Discussão: Critério de Nyquist

Nomenclatura (Não-Padronizada) e Contexto

- ▶ Taxa de Nyquist (TN) vs Frequência Nyquist (FN).
 - ◇ **Frequência de Nyquist:** Ω_C (maior frequência positiva de $x_c(t)$ real).
 - ◇ **Taxa de Nyquist:** $2\Omega_C$ (frequência que deve ser excedida pela taxa de amostragem).
- ▶ FN e TN podem ser associadas tanto a **Sinais** como a **Sistemas! Exemplo:**
 - ◇ Amostragem de sinal de voz com $\Omega_C = 3$ kHz via um A/D de $f_s = 16$ kHz.
 - ◇ **Sinal:** FN = 3 kHz e TN = 6 kHz
 - ◇ **Sistema:** TN = 16 kHz e FN = 8 kHz.

Escopo de Validade do Teorema da Amostragem

- ▶ Também se aplica a sinais multidimensionais! Ex. Imagem.
- ▶ **O Teorema da Amostragem indica os Limites Teóricos do processo.**
 - ◇ Os filtros anti-*aliasing* e de reconstrução não são ideais.
 - ◇ Também ocorre imprecisão nos instantes de amostragem (distorção de *jitter*).

Mudança de Taxa de Amostragem

Objetivo

- ▶ **Re-Amostrar** um sinal discreto (já amostrado com f_s Hz) com uma nova taxa de amostragem f'_s maior ou menor que f_s .

Abordagem 1

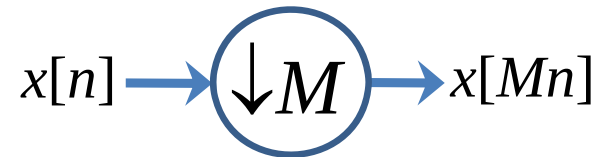
- ▶ Obter $x(t)$ (versão analógica) a partir de $x[n]$ e re-amostrar $x(t)$ com f'_s .
- ▶ **Observar o Critério de Nyquist** para a nova $f'_s < f_s$: incluir um filtro anti-*aliasing* apropriado!
- ▶ **Principal Desvantagem:** Inconveniência do retorno ao domínio analógico:
 - ◊ Necessidade de instrumentação eletrônica analógica;
 - ◊ Inevitabilidade de distorções criadas pelas não-idealidades dos processos de conversão A/D e D/A.

É possível realizar a conversão de taxa inteiramente no domínio discreto?

REDUÇÃO de Taxa de Amostragem por Fator $M \in \mathbb{N}$

Sistema Compressor

$$x_d[n] = x[Mn]$$



- ▶ Toma uma amostra a cada M , i.e. $f_s \rightarrow f_s^d = \frac{f_s}{M}$.
- ▶ Sob quais condições tal redução de taxa pode ser feita?

REDUÇÃO de Taxa de Amostragem por Fator $M \in \mathbb{N}$

Desenvolvimento

- ▶ $x[n] = x(t)|_{t=nT}$, sendo T o período de amostragem original.
- ▶ $x_d[n] = x[Mn] = x(MnT)$.
- ▶ $x_d[n] = x(nMT) = x(t)|_{t=nMT}$.
- ▶ $x_d[n] = x(MnT) = x(Mt)|_{t=nT}$.

Interpretações

- ▶ $x_d[n]$ resulta da amostragem de $x(t)$ com período de amostragem $T' = MT$.
- ▶ $x_d[n]$ resulta da amostragem de $x(Mt)$, i.e., versão comprimida por M de $x(t)$, com período de amostragem T .

REDUÇÃO de Taxa de Amostragem por Fator $M \in \mathbb{N}$

Observações Intuitivas

► Compressão temporal de $x(t)$:

$$x_d(t) = x(Mt) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{M} X \left(j \frac{\Omega}{M} \right) = X_d(j\Omega)$$

$X_d(j\Omega)$ é uma versão do espectro de $x(t)$ alargada M vezes na frequência e achatada M vezes em magnitude!

Teoria

► Pode-se mostrar que:

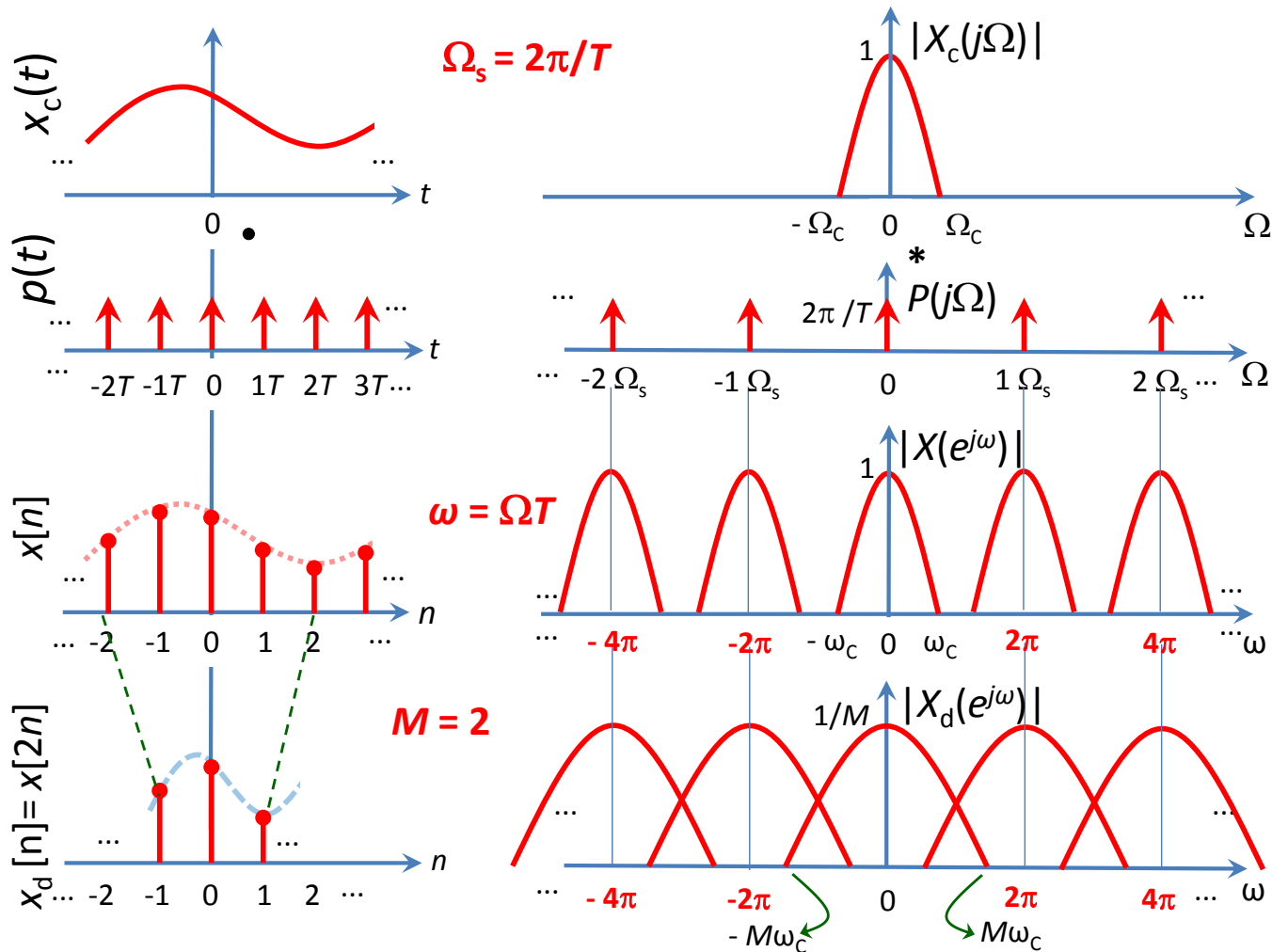
$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} X \left(e^{j(\frac{\omega}{M} - \frac{2\pi i}{M})} \right)$$

ou (em expresso via a Transformada- z dos sinais)

$$X_d(z) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} X \left(z^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2\pi i}{M}} \right)$$

REDUÇÃO de Taxa de Amostragem por Fator $M \in \mathbb{N}$

Graficamente



REDUÇÃO de Taxa de Amostragem por Fator $M \in \mathbb{N}$

Redução de Taxa (por M) SEM *ALIASING*

► Critério:

◇ Considerando $x[n] \in \mathbb{R}$ e seu espectro entre $-\pi$ e π rad/amostra (ou entre $-\frac{f_s}{2}$ e $\frac{f_s}{2}$)

$$M\omega_C < \pi \quad \text{ou} \quad Mf_C < \frac{f_s}{2},$$

◇ onde ω_C é a frequência máxima observada entre 0 e π rad/amostra.

► Garantia de Atendimento do Critério:

◇ Limitar espectro de $x[n]$ via filtragem anti-aliasing DIGITAL.

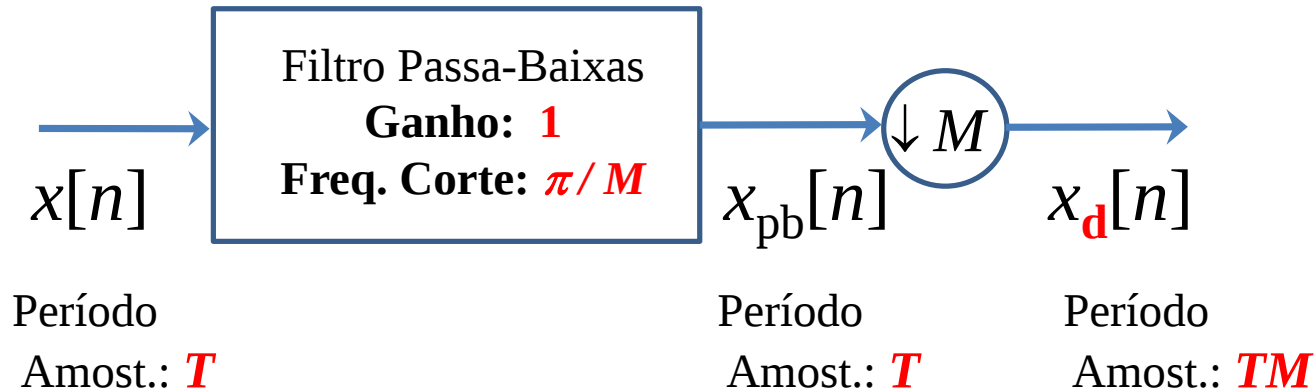
◇ Especificação do filtro (na faixa $\pi < \omega \leq \pi$ rad/amostra):

$$H_{aa}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \text{se } |\omega| < \frac{\pi}{M} \\ 0, & \text{se } \frac{\pi}{M} \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

► Lembrete: O filtro acima é IDEAL (não-realizável)!

REDUÇÃO de Taxa de Amostragem por Fator $M \in \mathbb{N}$

Resumo



► O sistema acima é chamado de DECIMADOR (por M).

AUMENTO de Taxa de Amostragem por Fator $L \in \mathbb{N}$

Aumento de Taxa (por fator L)

► Sobre L :

- ◇ $L > 1$ (aumento da taxa)
- ◇ $L \in \mathbb{N}$

► Objetivo:

- ◇ Tem-se $x[n] = x(nT)$, i.e., amostragem com período T .
- ◇ Mas, o que se quer ter é $x_u[n] = x(nT')$, com $T' = \frac{T}{L}$, i.e., amostragem com período T' mais curto.

► Problema:

- ◇ Só se dispõe de $x[n]$.

AUMENTO de Taxa de Amostragem por Fator $L \in \mathbb{N}$

Estudo de $x_u[n]$

► $x_u[n] = x(t)|_{t=nT/L} = x(t/L)|_{t=nT}$

◇ Amostragem com período original T mas de versão de $x(t)$ expandida no tempo L .

► $x_u(t) = x(t/L) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} LX(j\Omega L) = X_u(j\Omega)$

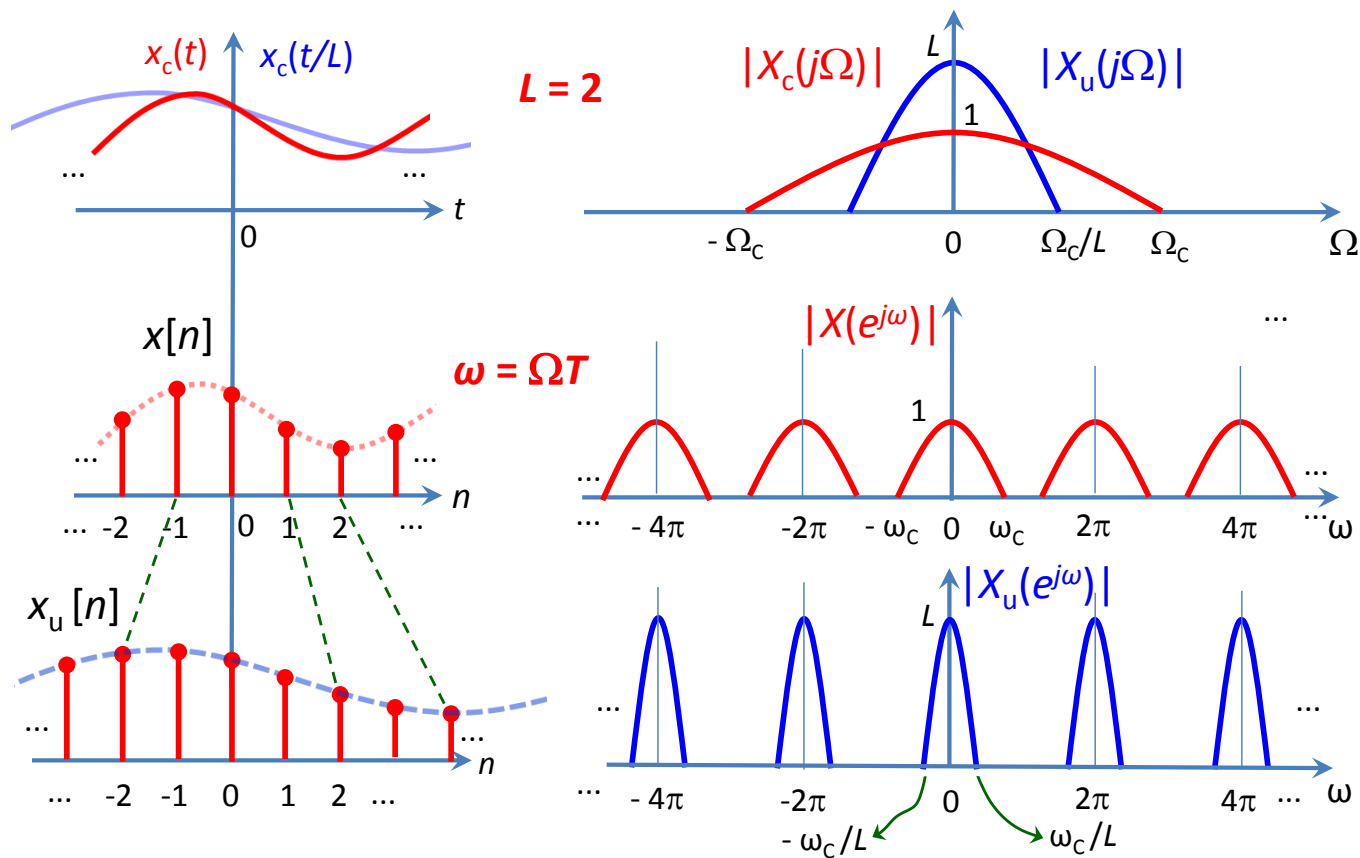
◇ Espectro de $x_u(t)$ é uma versão do de $x(t)$ comprimida por L na frequência e escalada por L na magnitude.

► $X_u(e^{j\omega})$ é formado por réplicas de $X(j\Omega)$:

- ◇ Comprimidas L vezes na frequência e centradas em múltiplos inteiros de 2π rad/amostra.
- ◇ Escaladas em magnitude por L .

AUMENTO de Taxa de Amostragem por Fator $L \in \mathbb{N}$

Interpretação Gráfica ($L = 2$)



AUMENTO de Taxa de Amostragem por Fator $L \in \mathbb{N}$

Sistema Expansor (por L)

$$x[n] \rightarrow \left(\uparrow L \right) \rightarrow x_e[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{L}\right], & \text{se } n/L \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

► Resolve PARCIALMENTE o problema:

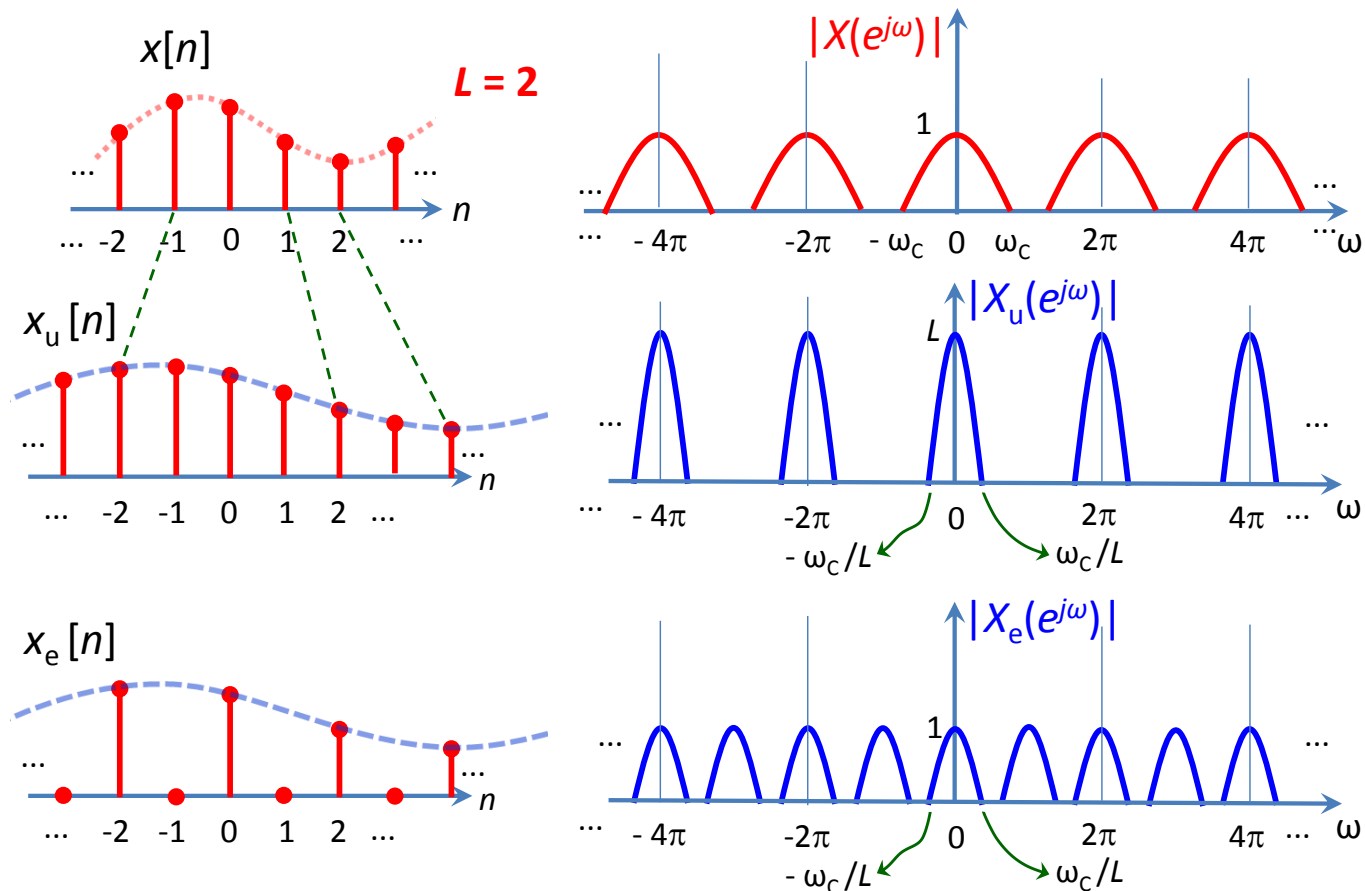
◇ As amostras de $x_e[n]$ e $x[n]$ são idênticas e o sistema insere $L - 1$ amostras NULAS entre cada amostra possivelmente não-nula de $x[\frac{n}{L}]$.

► Relação entre $X(e^{j\omega})$ e $X_e(e^{j\omega})$:

$$X_e(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L}) \quad \text{ou} \quad X_e(z) = X(z^L)$$

AUMENTO de Taxa de Amostragem por Fator $L \in \mathbb{N}$

Sistema Expansor – Interpretação Gráfica ($L = 2$)



AUMENTO de Taxa de Amostragem por Fator $L \in \mathbb{N}$

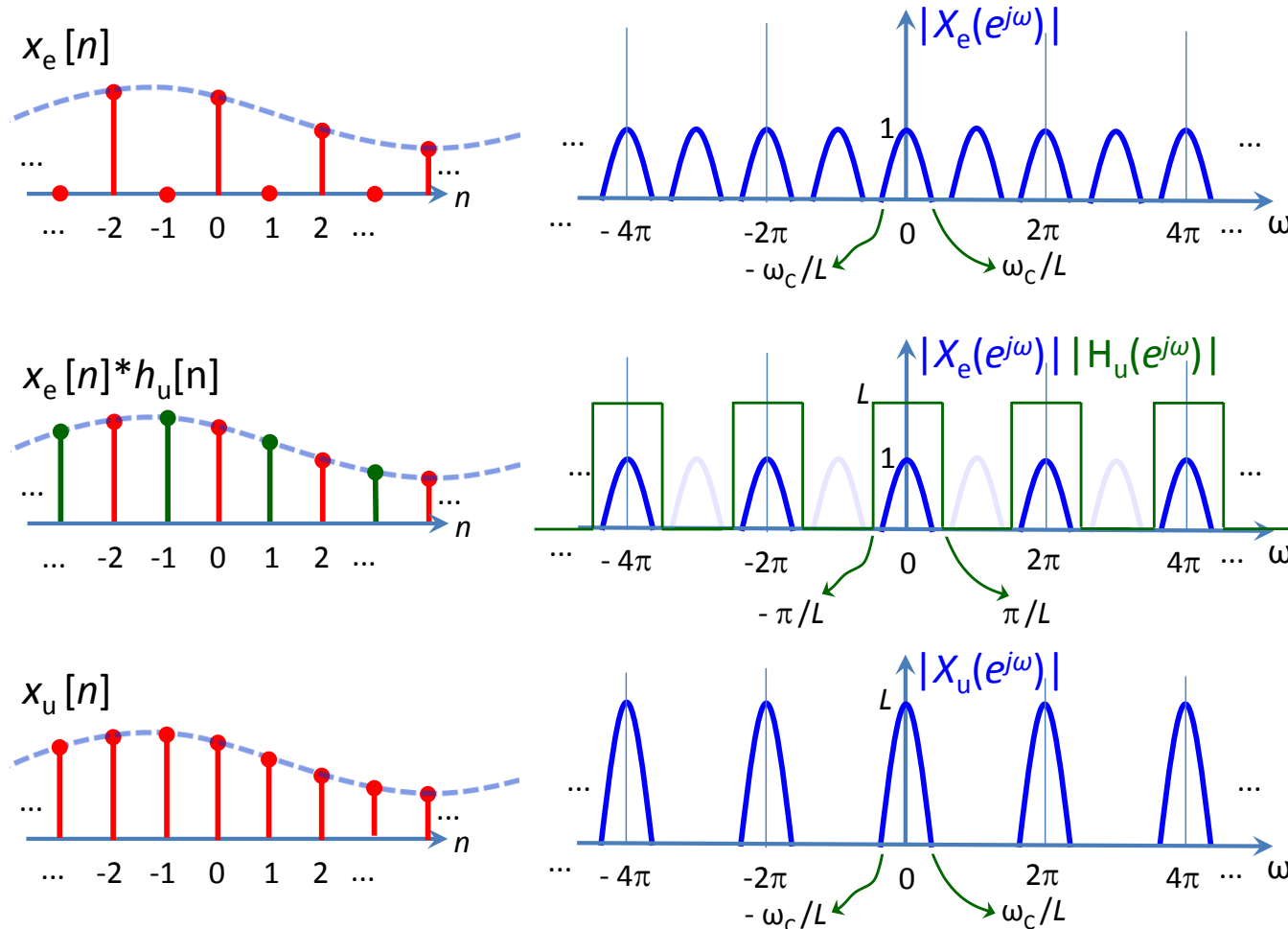
Obtenção de $x_u[n]$ a partir de $x_e[n]$

- ▶ Selecionar em $X_e(e^{j\omega})$ apenas as réplicas centradas em múltiplos inteiros de 2π rad/amostra.
- ▶ Escalar as réplicas por L em magnitude.
- ▶ As tarefas acima podem ser realizadas multiplicando-se $X_e(e^{j\omega})$ por um filtro passa-baixas discreto $H_u(e^{j\omega})$ de ganho L e frequência de corte $\omega_c = \pi/L$ rad/amostra.
 - ◇ Especificação do filtro (na faixa $\pi < \omega \leq \pi$ rad/amostra):

$$H_u(e^{j\omega}) = \begin{cases} L, & \text{se } |\omega| < \frac{\pi}{L} \\ 0, & \text{se } \frac{\pi}{L} \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

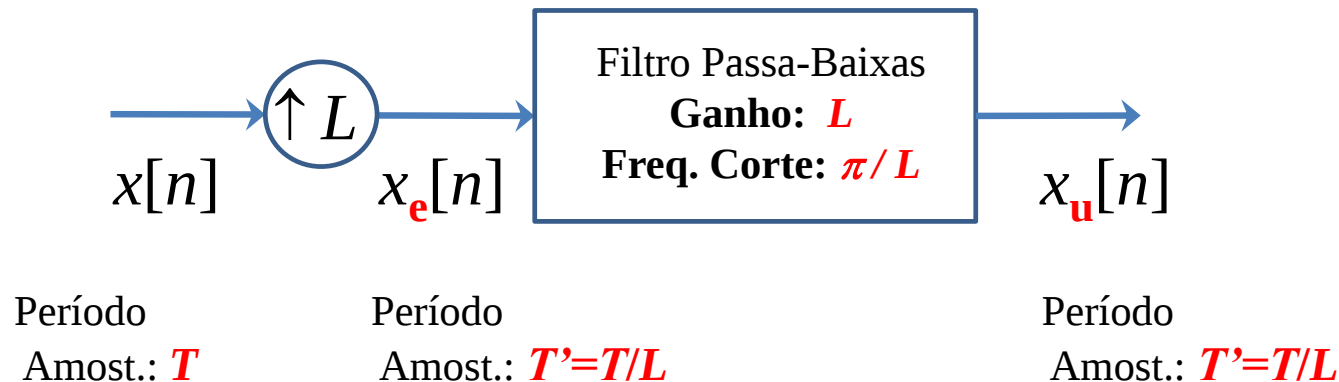
AUMENTO de Taxa de Amostragem por Fator $L \in \mathbb{N}$

De $x_e[n]$ para $x_u[n]$ – Interpretação Gráfica ($L = 2$)



AUMENTO de Taxa de Amostragem por Fator $L \in \mathbb{N}$

Em Suma



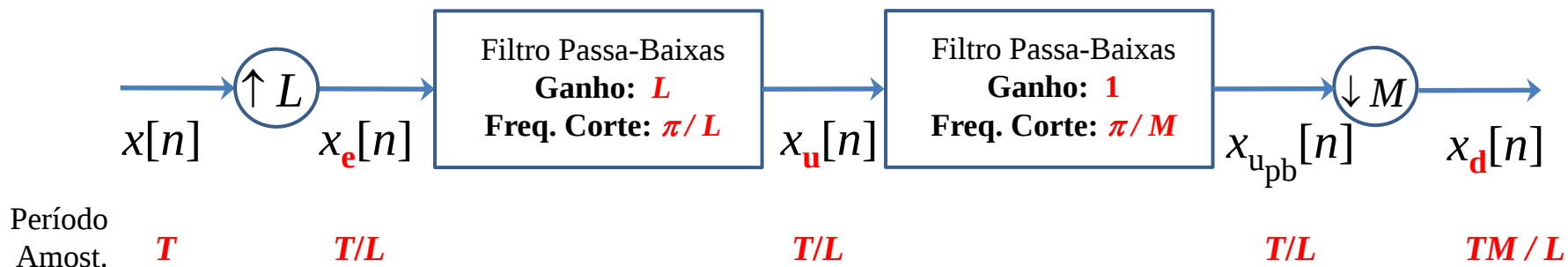
► O sistema acima é chamado de INTERPOLADOR (de L amostras).

MUDANÇA de Taxa de Amostragem por Fator RACIONAL

Solução Geral

- Ligação em SÉRIE de um sistema INTERPOLADOR (de L amostras) com um sistema DE-CIMADOR (por M).

Em Suma



Transformada Discreta de Fourier – DFT

Introdução

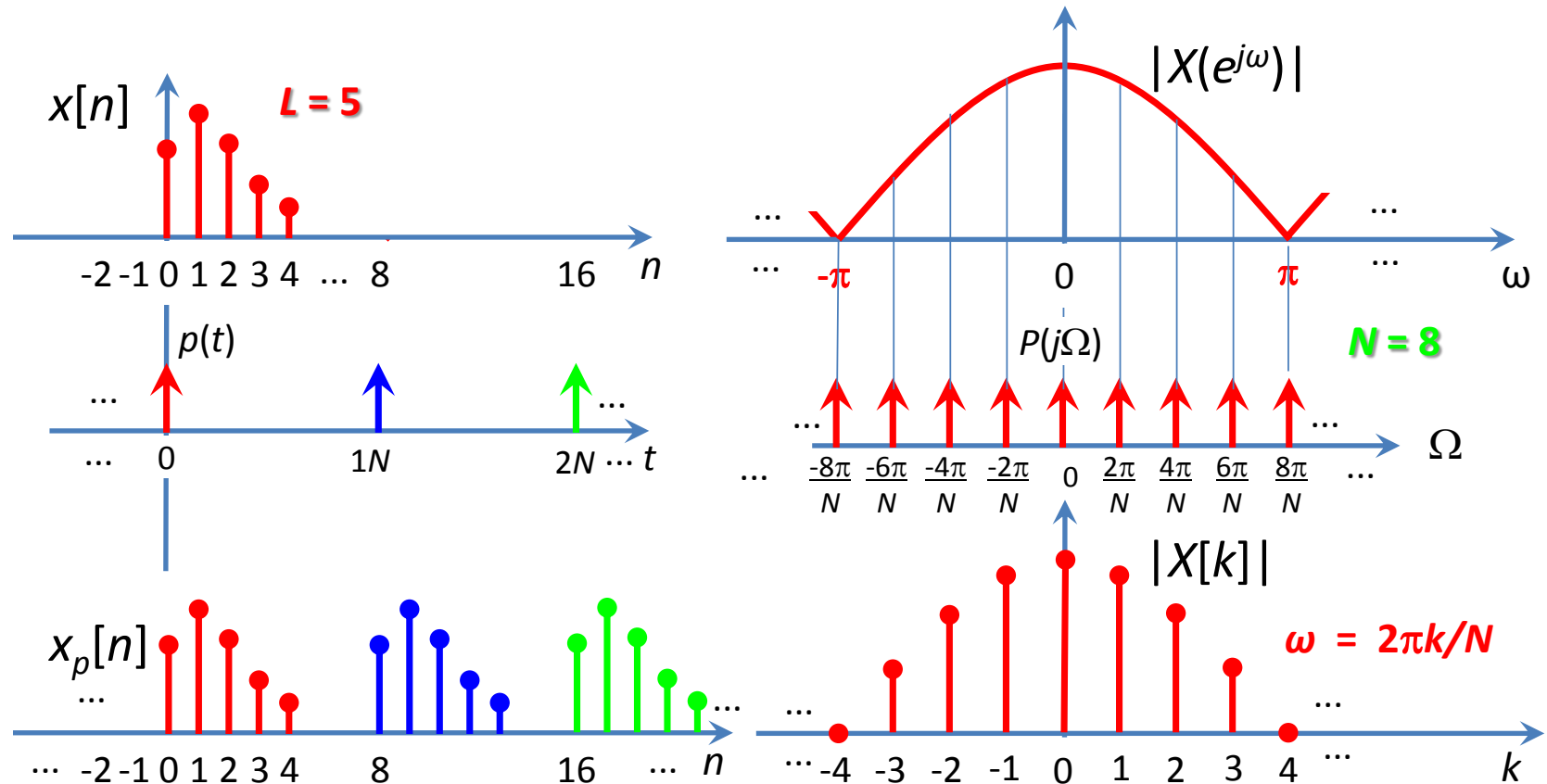
- ▶ $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$: espectro de Fourier de $x[n]$ é periódico, mas **CONTÍNUO** em ω .
- ▶ Sinais contínuos não são convenientes para processamento digital de sinais.

Questões

- ▶ O Teorema da Amostragem nos informa como obter um $x[n]$ (discreto) representativo de um $x(t)$ (contínuo).
- ▶ Seria igualmente possível obter uma versão discretizada do Espectro de Fourier de um sinal?
- ▶ Qual seria o efeito de amostrar $X(e^{j\omega})$ na frequência?

DFT – Amostragem na Frequência

Interpretação Gráfica (Informal)



DFT – Observação Importante

Dualidade: Discretização e Periodicidade

- ▶ $x[n]$ (DISCRETO no tempo) implica $X(e^{j\omega})$ (PERIÓDICO na frequência).
- ▶ $X[k]$ (DISCRETO na frequência) implica $x_p[n]$ (PERIÓDICO no tempo)

Periodicidade e Praticidade

- ▶ Sinais periódicos são formalmente **impráticos** para DSP: **suporte temporal infinito**.
- ▶ Por outro lado: **A informação de interesse está toda contida em 1 período**.

DFT

Escopo

- ▶ $x[n]$ (**DISCRETO no tempo**) e com suporte temporal finito: (L amostras).
- ▶ A DFT oferece $X[k]$, que é uma **SEQÜÊNCIA DISCRETA** na frequência, contendo 1 período do Espectro de Fourier $X(e^{j\omega})$ de $x[n]$.
- ▶ A DFT é largamente utilizada como ferramenta de análise espectral.

Relação entre $x[n]$ e $x_p[n]$

- ▶ $x[n]$: seqüência de COMPRIMENTO FINITO L .
- ▶ $x_p[n]$: seqüência PERIÓDICA com período N associada à $x[n]$, onde $N \geq L$.

$$x_p[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[n - iN] \quad \text{e} \quad x[n] = \begin{cases} x_p[n], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

DFT – Formalização

Equação de Análise (DFT)

$$X[k] = X \left(e^{j\frac{2\pi k}{N}} \right) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Equação de Síntese (DFT)

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi k}{N}n}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Lembrar que, de fato, $x[n]$ deveria ser $x_p[n]$!

Equação de Análise (DFT)

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

- **Projeção de $x[n]$ em uma BASE ortogonal composta de N exponenciais complexas.**
- Para um dado k , que indica a frequência $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$, $X[k]$ é um peso complexo que informa quão “semelhantes” são $x[n]$ e a exponencial complexa $e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$.

Equação de Síntese (DFT)

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi k}{N}n}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

- **Reconstrução de $x[n]$ via uma combinação linear da BASE de exponenciais complexas**, onde $X[k]$ são os pesos de cada componente da base.

DFT – Notação Compacta

Variável W_N

$$W_N \triangleq e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

Equação de Análise (DFT)

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Equação de Síntese (DFT)

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

As equações expressas em função de W_N guardam semelhanças com a notação da Transformada- z !

DFT – Como Transformação Linear

DFT $\Leftrightarrow$ Transformação Linear

$$\text{DFT: } \mathbf{X}_N = \mathbf{W}_N \mathbf{x}_N$$

$$\text{IDFT: } \mathbf{x}_N = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^* \mathbf{X}_N$$

onde

$$\mathbf{X}_N = \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^1 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & \cdots & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

DFT de N Pontos – Seleção de Propriedades

Notação

- ▶ $x[n] \xleftrightarrow{DFT} X[k]$: sinal discreto (periódico) e sua DFT.
- ▶ No caso de dois sinais: $x_1[n] \xleftrightarrow{DFT} X_1[k]$ e $x_2[n] \xleftrightarrow{DFT} X_2[k]$.
- ▶ As variáveis a e b são escalares.
- ▶ $(n)_N$ significa n modulo N , i.e., é o INTEIRO que resta após a divisão de n por N .

- **Linearidade:** $ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{DFT} aX_1[k] + bX_2[k]$

- **Deslocamento CIRCULAR no Tempo:**

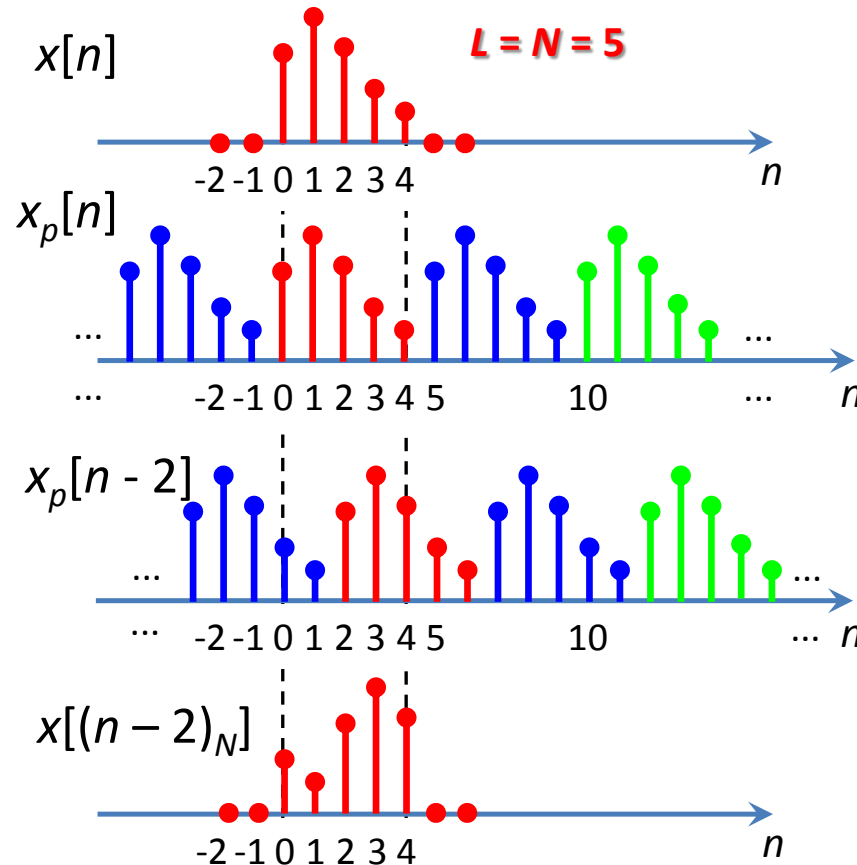
$$x[(n - l)_N] \xleftrightarrow{DFT} W_N^{kl} X[k]$$

- **Deslocamento CIRCULAR na Freqüência:**

$$W_N^{-nl} x[n] \xleftrightarrow{DFT} X[(k - l)_N]$$

DFT de N Pontos – Deslocamento Temporal Circular

Interpretação Gráfica



- O deslocamento LINEAR de uma sequência N -periódica $x_p[n]$, associada a uma sequência $x[n]$ de N pontos, corresponde a um deslocamento CIRCULAR de $x[n]$.

DFT – Convolução Circular

Definição

$$x_1[n] \circledast x_2[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k]x_2[(n-k)_N], \quad 0 \leq n \leq N-1$$

onde $(n-k)_N \triangleq (n-k)$ módulo N .

Ainda:

$$x_1[n] \circledast x_2[n] = x_2[n] \circledast x_1[n].$$

Tem-se:

$$x_1[n] \circledast x_2[n] \xleftrightarrow{DFT} X_1[k]X_2[k].$$

DFT – Convolução Linear via DFT

Considerações Iniciais

- ▶ $x_1[n]$ e $x_2[n]$ contendo, respectivamente, L e P amostras.
- ▶ **Objetivo:** Obter $y[n] = (x_1 * x_2)[n]$ (convolução linear) via DFT.
- ▶ **Lembrete:** $y[n]$ tem $L + P - 1$ amostras.

Procedimento

- ▶ Fazer $N = L + P - 1$.
- ▶ Computar $X_1[k]$ como a DFT de N pontos de $x_1[n]$;
- ▶ Computar $X_2[k]$ como a DFT de N pontos de $x_2[n]$;
- ▶ Computar $Y[k] = X_1[k]X_2[k]$, i.e. o produto ponto-a-ponto das duas DFTs;
- ▶ Computar $y[n]$ como a DFT inversa de $Y[k]$.

DFT – Convolução Linear via DFT

Observações

- ▶ Computar a DFT de N pontos de uma sequência $x[n]$ de $L < N$ pontos implica preencher $x[n]$ com $N - L$ amostras de valor nulo.
- ▶ Em inglês, tal procedimento é chamado de *zero-padding*.

Interpretação

- ▶ *Zero-padding* aumenta artificialmente o período das versões periódicas das sequências $x_1[n]$ e $x_2[n]$.
- ▶ Dentro do período alargado a “APARÊNCIA” do deslocamento circular é a mesma da do linear.

O produto de duas DFTs NÃO DEIXA de corresponder a uma convolução circular!

DFT – Seleção de Propriedades

- **Reversão Temporal:** $x[N - n] \xleftrightarrow{DFT} X^*[k]$

- **Multiplicação no Tempo:**

$$x_1[n]x_2[n] \xleftrightarrow{DFT} \frac{1}{N}X_1[k] \circledast X_2[k]$$

- **Teorema de Parseval:**

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n]y^*[n] \xleftrightarrow{DFT} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]Y^*[k]$$

$f^*[n]$: complexo conjugado de $f[n]$.

DFT – Convolução por Blocos

Motivação

- ▶ Saída de um sistema LTI com $h[n]$ FIR (de curta-duração) para um sinal de entrada $x[n]$ de longa duração.
- ▶ Há algoritmos rápidos para computar a DFT: *Fast Fourier Transform (FFT)*.
- ▶ A convolução LINEAR no tempo pode ser implementada de modo computacionalmente mais eficiente no domínio da frequência: multiplicação de DFTs.

Problemas

- ▶ Se $x[n]$ é muito longa: a convolução LINEAR (padrão) requereria DUAS DFTs longas.
- ▶ A saída só estaria disponível depois do processamento de todo o sinal de entrada.

Solução: Processamento por Blocos

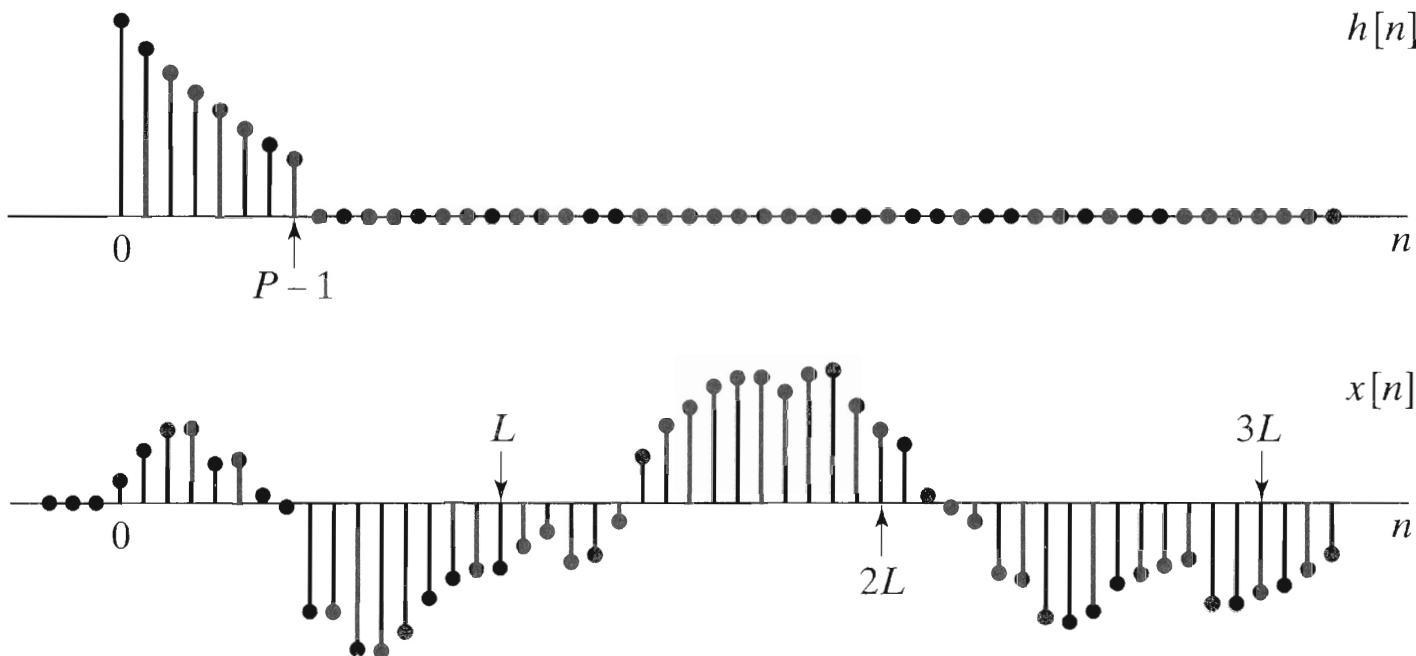
- ▶ *Overlap-and-Add*
Procedimento **independente** do uso da DFT.
- ▶ *Overlap-and-Save*
Nomenclatura um tanto imprecisa.

Convolução por Blocos: *Overlap-and-Add*

Considerações Iniciais

- ▶ Sistema LTI FIR: $h[n]$ com P coeficientes.
- ▶ Sinal: $x[n]$ de longa duração.
- ▶ **Passo 1:** Dividir $x[n]$ em blocos **JUSTAPOSTOS** de L amostras cada.

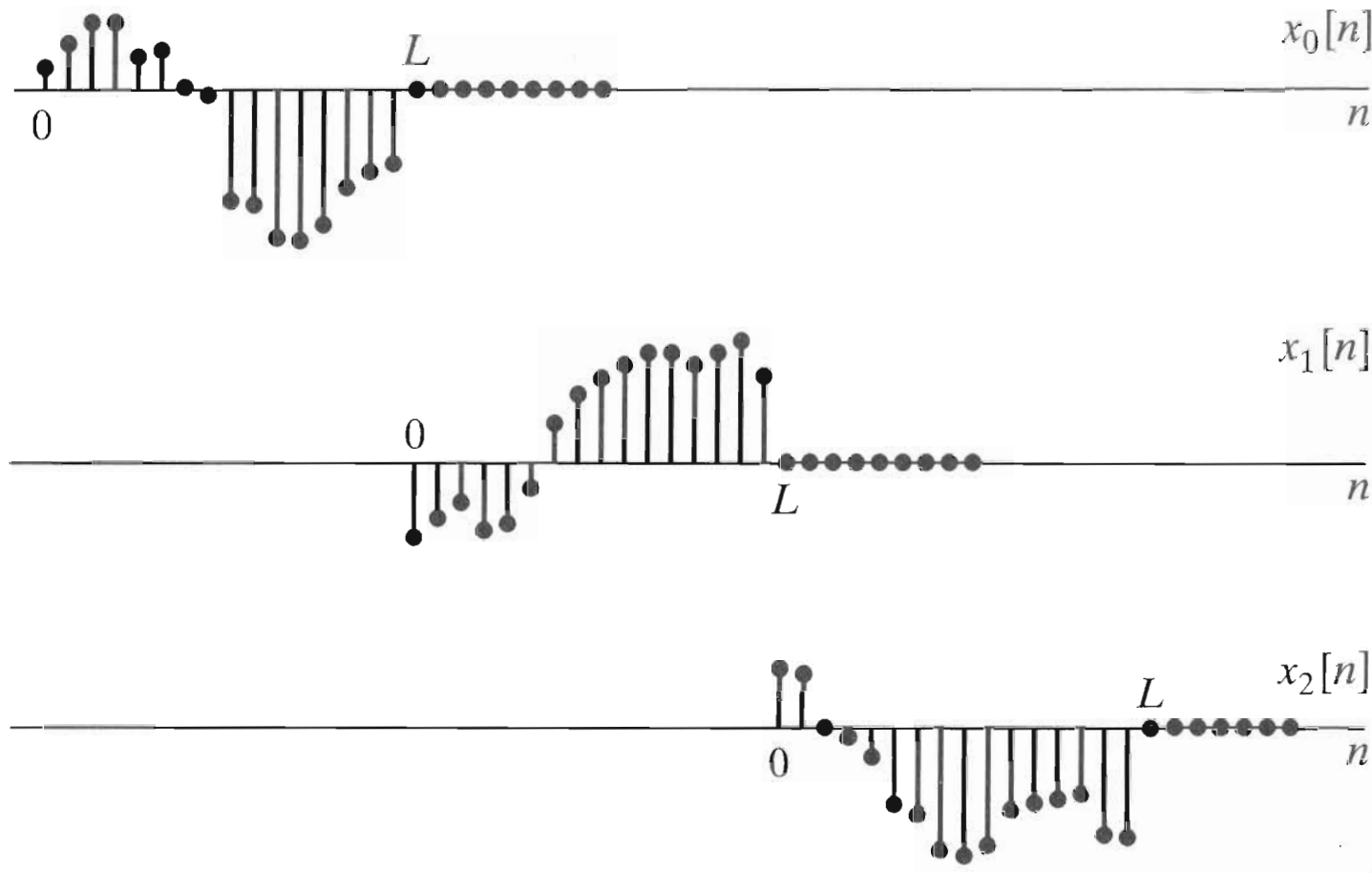
Graficamente



Fonte: Oppenheim.

Convolução por Blocos: *Overlap-and-Add*

Graficamente (Continuação)



Fonte: Oppenheim.

Convolução por Blocos: *Overlap-and-Add*

Interpretação

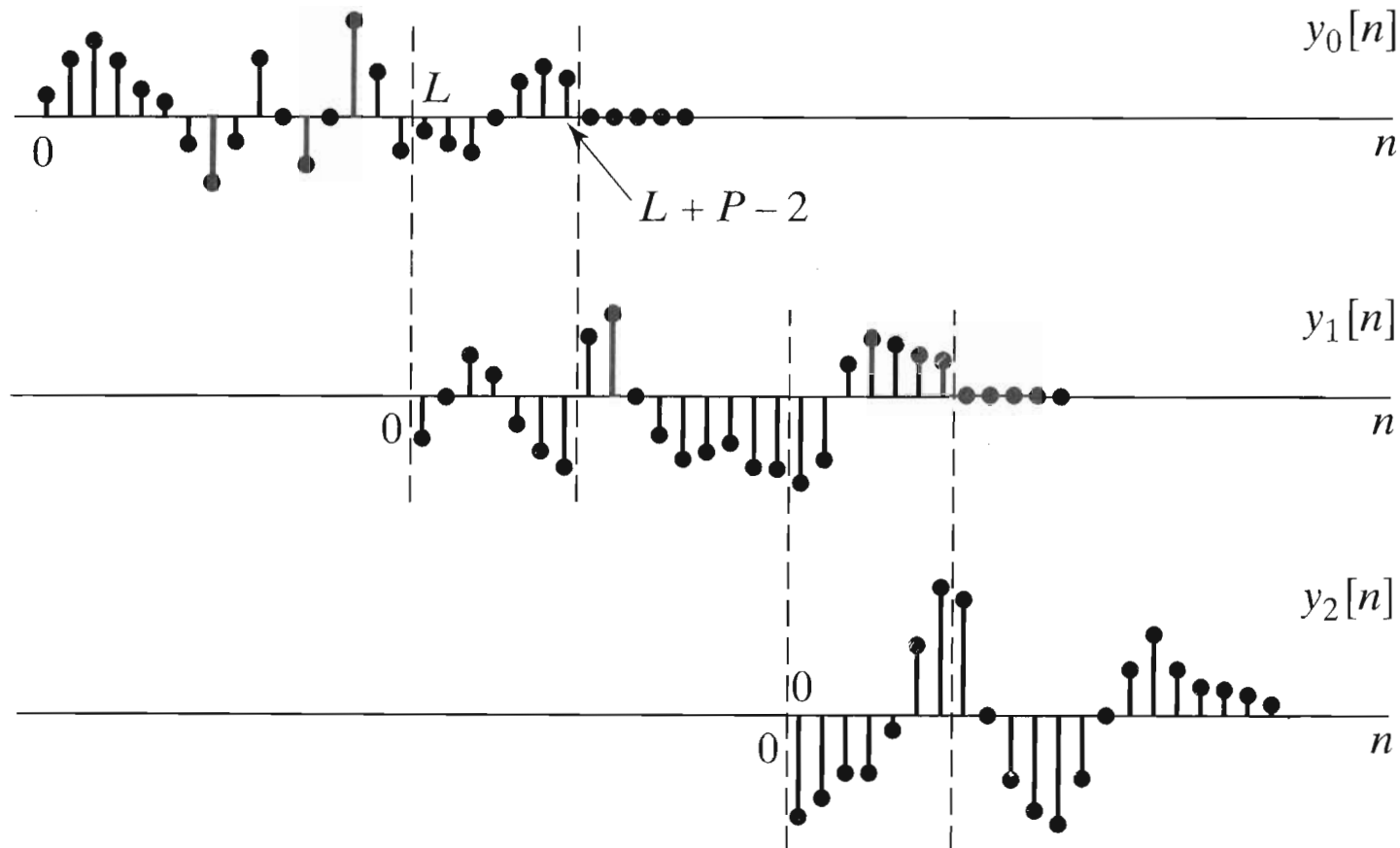
- ▶ $x[n]$ é escrito como uma composição de sub-seqüências $x_r[n]$ de L amostras cada.
- ▶ **Matematicamente:** $x[n] = \sum_{r=0}^{\infty} x_r[n - rL]$.
- ▶ **Lembretes:**
 - Já fizemos antes: $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k]$.
 - A convolução é uma operação LINEAR.

Continuação do Procedimento

- ▶ **Passo 2:** Realizar a convolução LINEAR de cada $x_r[n]$ com $h[n]$.
 - No tempo OU via DFTs de tamanhos $N \geq P + L - 1$.
 - $y_r[n] = (x_r * h)[n]$.
- ▶ **Passo 3:** Somar as sub-seqüências resultantes $y_r[n]$ para obter a saída $y[n]$ desejada.
 - Note que os $y_r[n]$ sofrem sobreposição temporal.
 - Daí a expressão *overlap*.

Convolução por Blocos: *Overlap-and-Add*

Interpretação Gráfica



Fonte: Oppenheim.

Convolução por Blocos: *Overlap-and-Save*

Considerações Iniciais

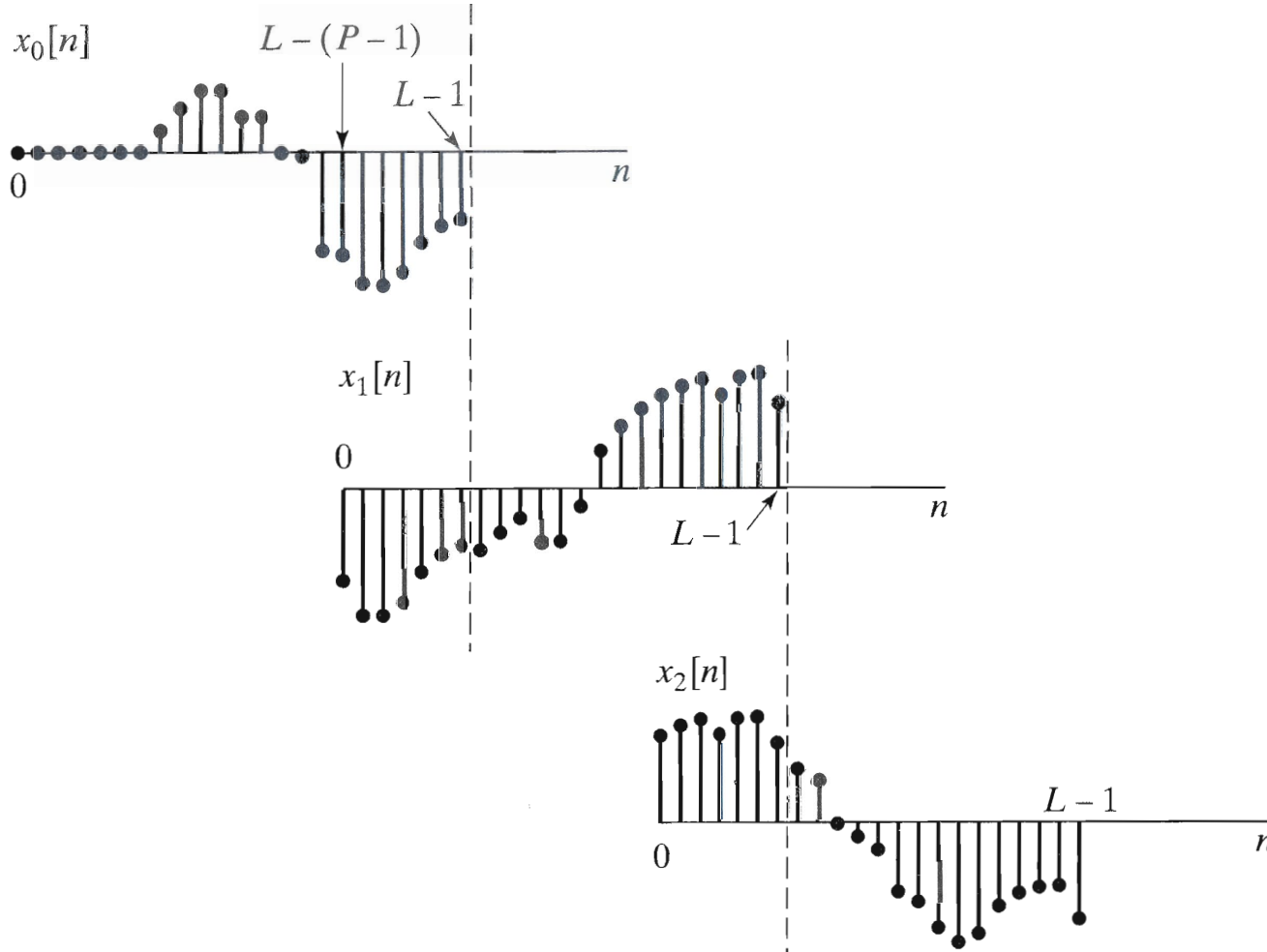
- ▶ Sistema LTI FIR: $h[n]$ com P coeficientes.
- ▶ Sinal: $x[n]$ de longa duração.

Procedimento

- ▶ **Passo 1:** Dividir $x[n]$ em blocos $x_r[n]$ de L amostras cada.
- ▶ **Passo 2:** Realizar a convolução **CIRCULAR** de $L > P$ pontos de cada bloco com $h[n]$.
 - via multiplicação de duas DFTs de L pontos.
 - **Só as ÚLTIMAS $L - P + 1$ amostras correspondem às de uma convolução LINEAR.**
 - As **PRIMEIRAS $P - 1$ amostras** de cada resultado devem ser **DESCARTADAS**.
 - Para compensar a perda acima, no Passo 1, blocos $x_r[n]$ adjacentes têm sobreposição de $P - 1$ amostras.
- ▶ **Passo 3:** Concatenar as sub-sequências para obter o resultado final.

Convolução por Blocos: *Overlap-and-Save*

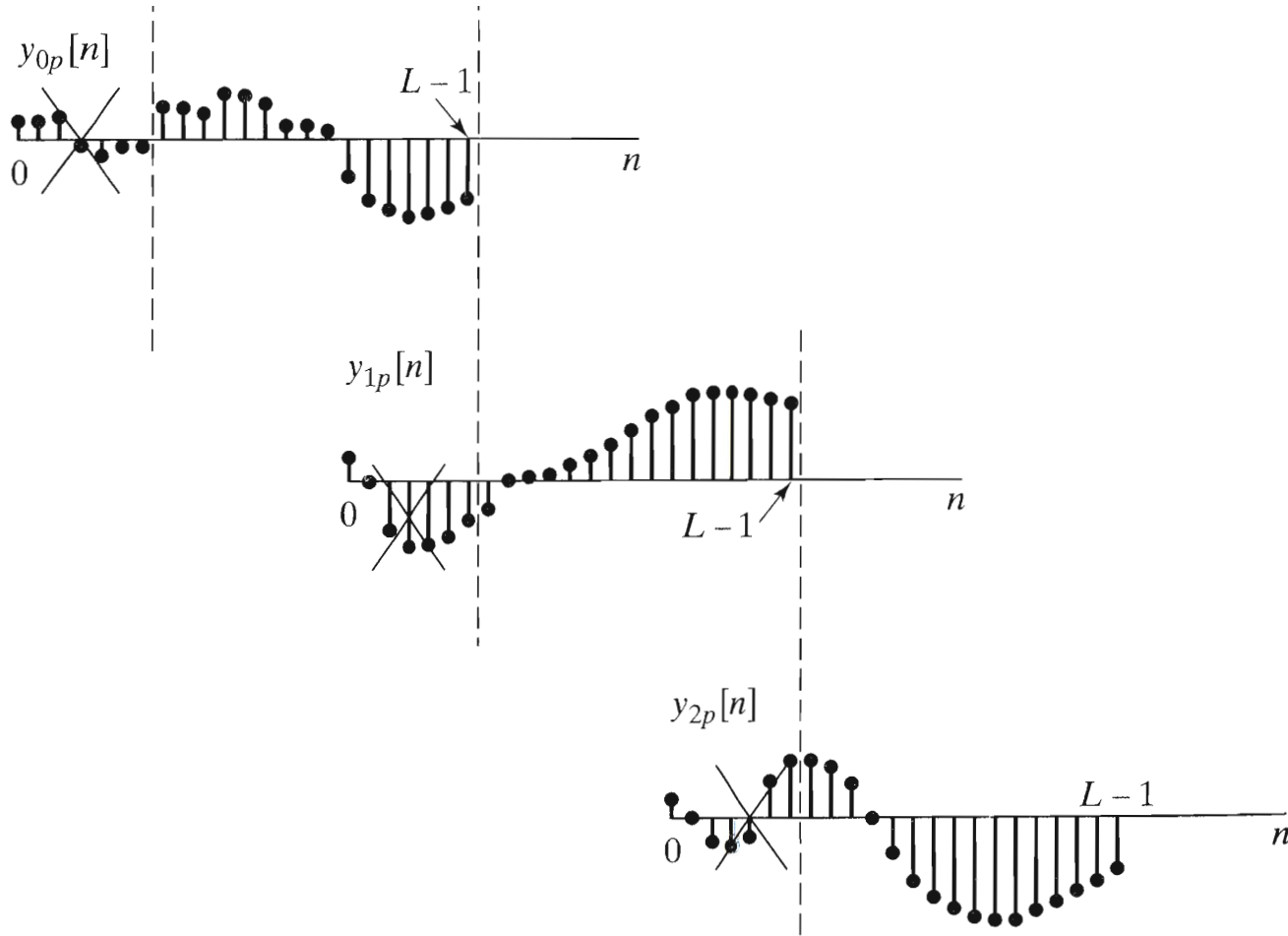
Graficamente (Segmentação de $x[n]$)



Fonte: Oppenheim.

Convolução por Blocos: *Overlap-and-Save*

Graficamente (Descarte das $P - 1$ amostras de $y_r[n]$)



Fonte: Oppenheim.

Transformada Rápida de Fourier - FFT

Considerações Iniciais sobre a FFT

- ▶ A computação direta da DFT de N amostras requer N^2 multiplicações complexas (MCs).
- ▶ Família de algoritmos rápidos para o cálculo da DFT.
- ▶ **Restrição: $N = 2^m$ (potência de 2).**
- ▶ Cálculo **RECURSIVO** de uma DFT de N pontos através de DFTs de metade do tamanho.
- ▶ **Explora propriedades de SIMETRIA E PERIODICIDADE da DFT:**

- Simetria: $W_N^{kn+N/2} = -W_N^{kn}$

- Periodicidade em k e n : $W_N^{k(n+N)} = W_N^{(k+N)n} = W_N^{kn}$

Algoritmos Clássicos: Base-2 ou Radix-2

- ▶ Cooley-Tukey (1965): **Decimação no Tempo.**
- ▶ Sande-Tukey (1966): Decimação na Freqüência.

Transformada Rápida de Fourier - FFT

Algoritmo de Decimação no Tempo

► **IDÉIA:** Re-arranjar o cálculo da DFT entre índices PARES e ÍMPARES.

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left\{ x[2n] W_N^{(2n)k} + x[2n+1] W_N^{(2n+1)k} \right\}, 0 \leq k \leq N-1 \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} g[n] W_{\frac{N}{2}}^{kn} + W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] W_{\frac{N}{2}}^{kn}, \quad (W_N^{2kn} = W_{\frac{N}{2}}^{kn}) \end{aligned}$$

Onde:

$$g[n] = x[2n] \quad \text{e} \quad h[n] = x[2n+1].$$

Mais compactamente:

$$X[k] = G[k] + W_N^k H[k], \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

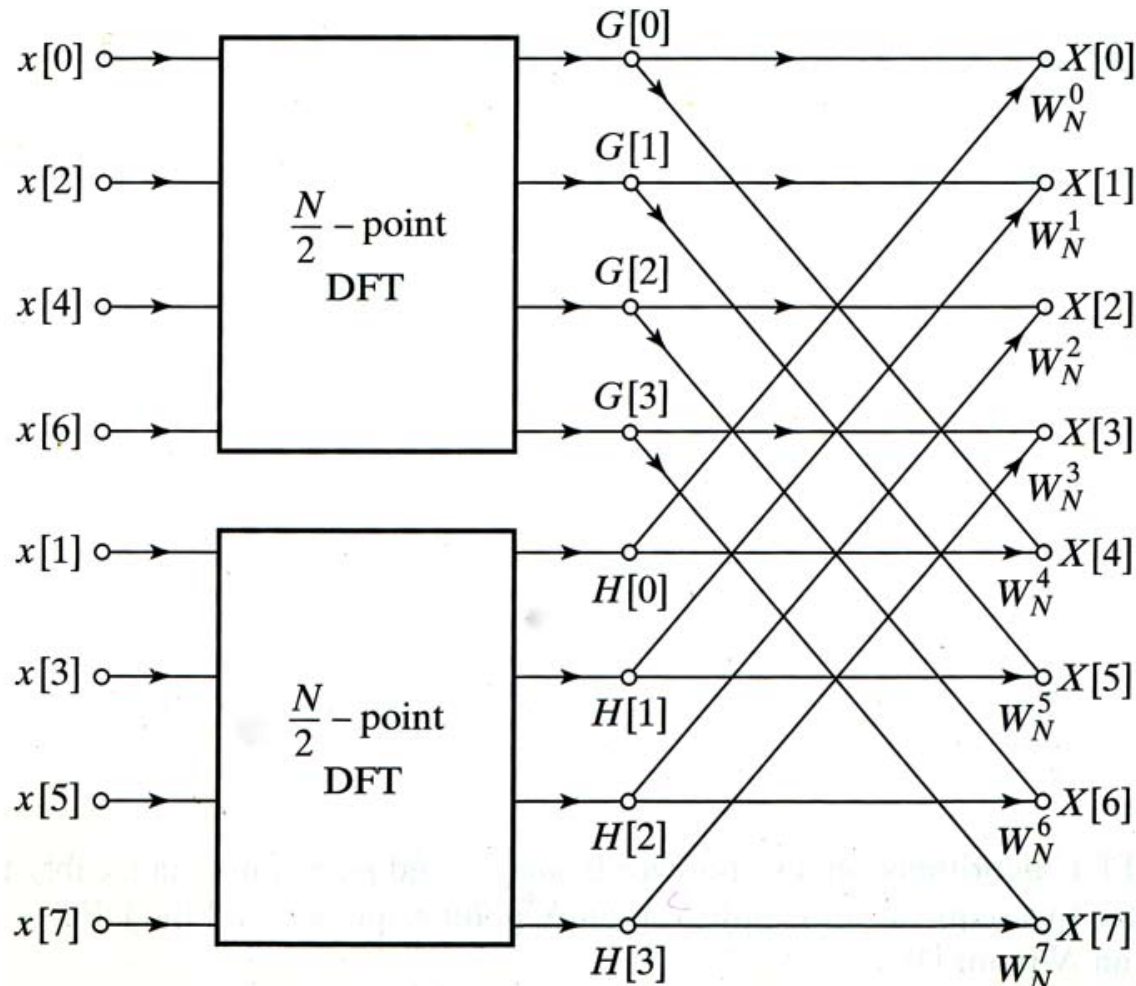
Observações

- $X[k]$ é periódica com período N .
- $G[k]$ e $H[k]$ são DFTs periódicas com período $N/2$.
 - Para $G[k]$ e $H[k]$ a avaliação é $(k)_{N/2}$, i.e., modulo $N/2$.

FFT – Decimação no Tempo

Diagrama de Blocos ($N = 8$)

Obs.: Sinais confluindo em um $\circ$ estão sendo somados.



Fonte: Oppenheim.

FFT – Decimação no Tempo

Mais Observações

- ▶ A ordenação dos índices n em $x[n]$ e k em $X[k]$ foi alterada.
- ▶ $G[k]$ e $H[k]$ requerem, cada uma, $(N/2)^2$ multiplicações complexas (MCs).
- ▶ Os fatores W_N^k contribuem mais N multiplicações.

Redução de Complexidade

- ▶ MCs no cálculo direto: N^2
- ▶ Após o re-arranjo, o número de MCs é:

$$2 \left(\frac{N}{2} \right)^2 + N$$

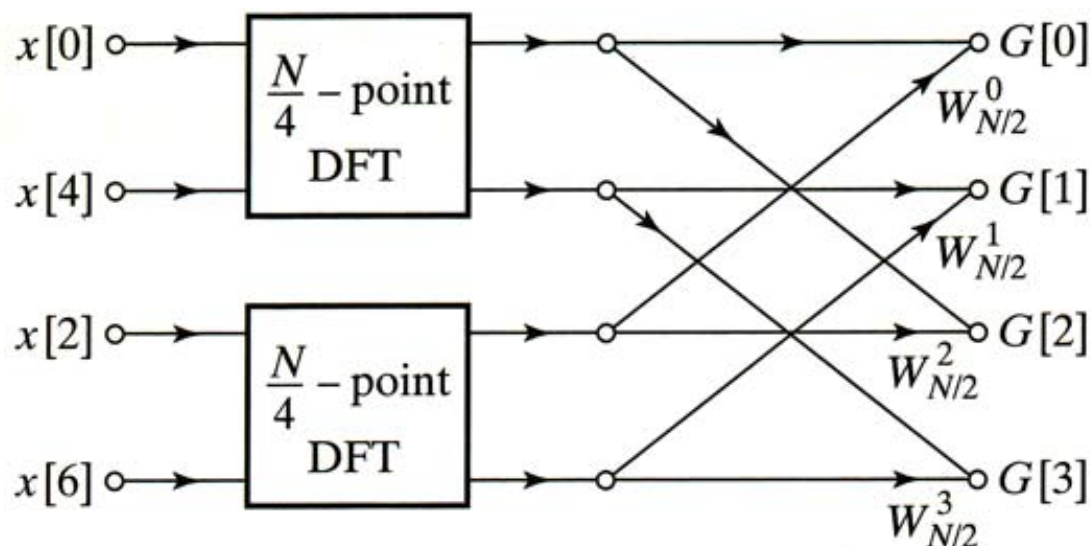
- ▶ Para $N > 2$, já ocorre redução de custo computacional.
- ▶ Em geral, pode-se escrever:

$$\mathcal{M}(N) = 2\mathcal{M} \left(\frac{N}{2} \right) + N$$

FFT – Decimação no Tempo

Recursão

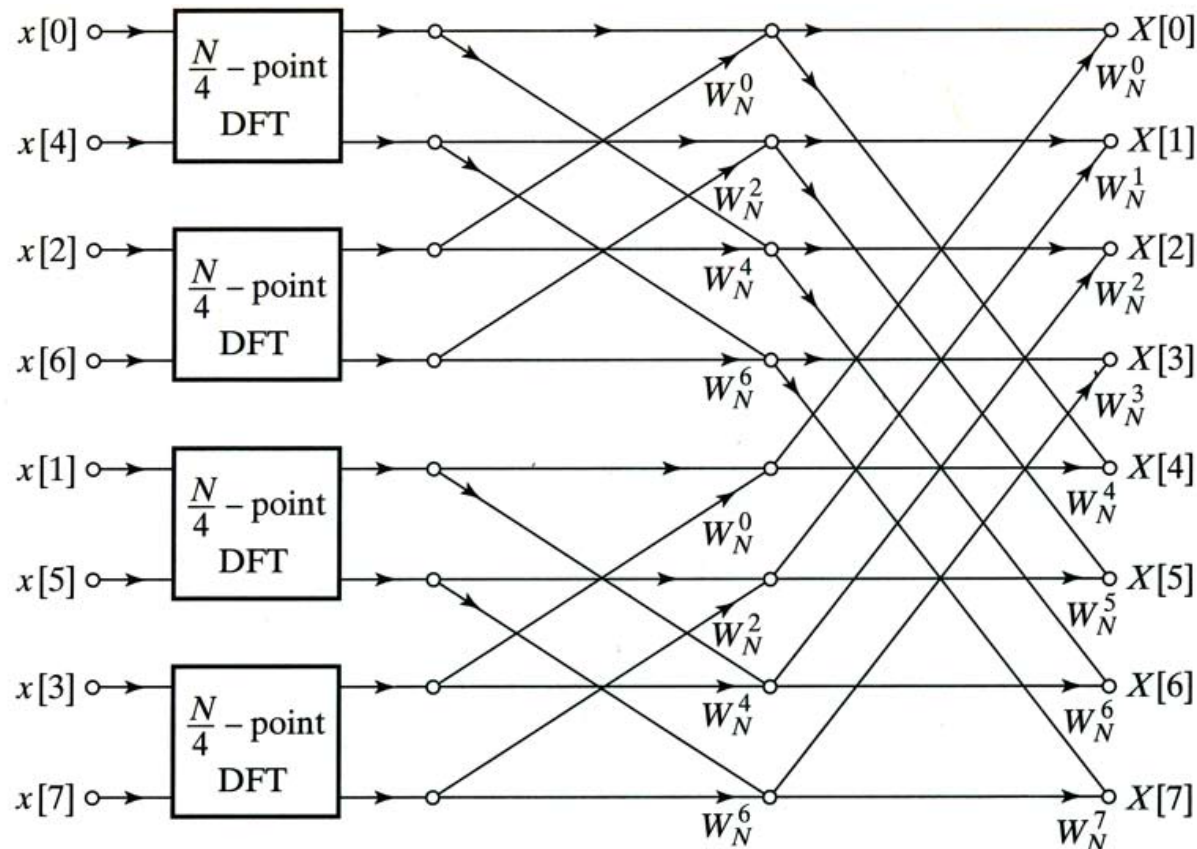
- Utilizar do mesmo artifício (agrupamento par-ímpar) no cálculo de $G[k]$ e $H[k]$.
- Exemplo para $G[k]$:



Fonte: Oppenheim.

FFT – Decimação no Tempo

Diagrama de Blocos Completo ($N = 8$)



Fonte: Oppenheim.

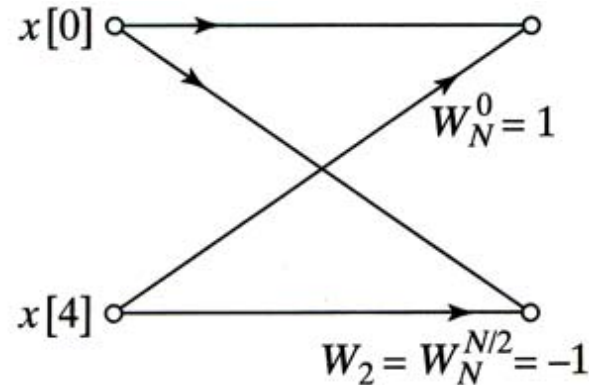
Note a substituição de W_N^k por W_N^{2k} no cálculo de $G[k]$.

FFT – Decimação no Tempo

Interrupção da Recursão

- ▶ Quando a decomposição implicar o cálculo de DFTs de 2 amostras.

DFT de 2 pontos: Diagrama de Blocos

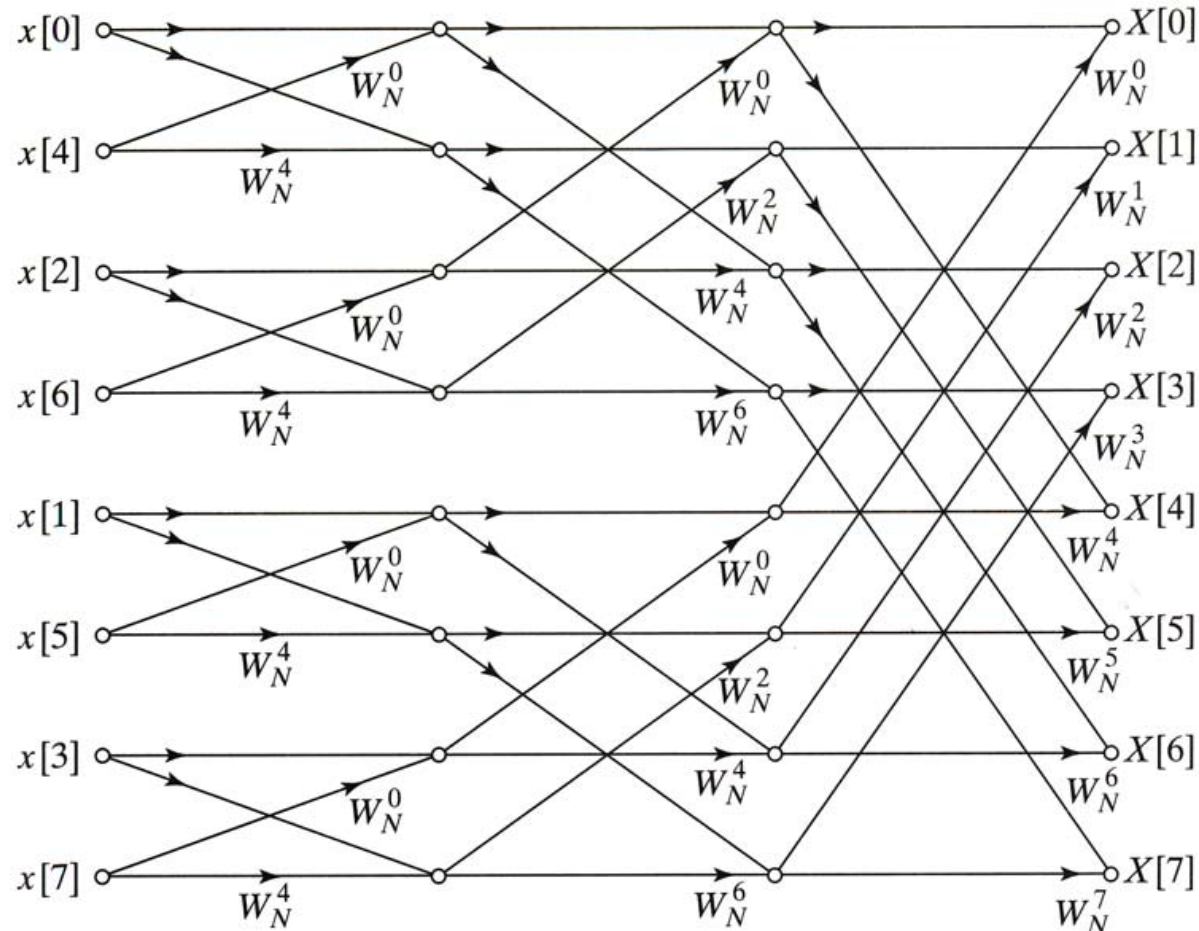


Fonte: Oppenheim.

Note que os multiplicadores são 1 e -1 .

FFT – Decimação no Tempo

Diagrama de Blocos Completo ($N = 8$)



Fonte: Oppenheim.

FFT – Decimação no Tempo

Ordenação dos Índices de $x[n]$ e $X[k]$

- ▶ Para obter $X[k]$ com k em ordem crescente entre 0 e $N - 1$, as amostras de $x[n]$ têm que ser DESORDENADAS temporalmente.
- ▶ A ordenação de $x[n]$ w.r.t. $X[k]$ é dada por um esquema de *Bit-Reversal*. Exemplo:

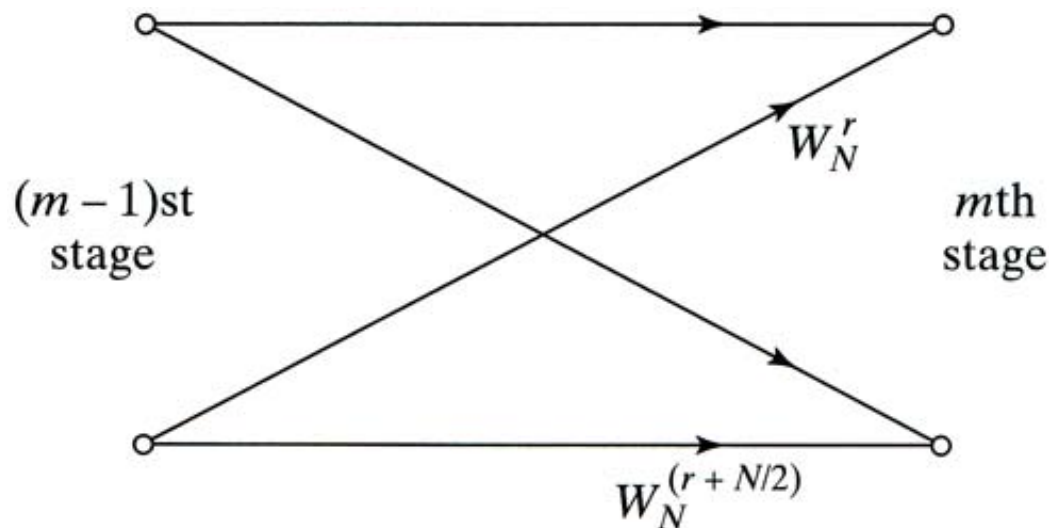
k (decimal)	0	1	2	3	4	5	6	7
k (binário)	000	001	010	011	100	101	110	111
$\tilde{k}$ (bit-reversed)	000	100	010	110	001	101	011	111
n	0	4	2	6	1	5	3	7

Computação *In Place*

- ▶ Para $N = 2^m$ o cálculo da FFT requer m estágios.
- ▶ As N entradas de um estágio só dependem das saídas do estágio imediatamente anterior.
- ▶ O *buffer* de dados que armazena as amostras de $x[n]$ pode ser aproveitado para armazenar os resultados dos estágios intermediários.

FFT – Decimação no Tempo

Célula Elementar de Computação da FFT



Fonte: Oppenheim.

- ▶ O par de multiplicadores são potências de W_N , separadas por $N/2$.
- ▶ Tal célula é chamada de **BORBOLETA**, devido ao seu formato.
- ▶ Algumas potências de W_N são iguais a 1 ou -1. Logo, podem ser desconsideradas como multiplicadores.

FFT – Decimação no Tempo

Custo Computacional da FFT

- Pode-se mostrar que o número de multiplicações complexas é:

$$\mathcal{O}(N \log_2 N).$$

Onde $\mathcal{O}$ significa “da ordem de”.

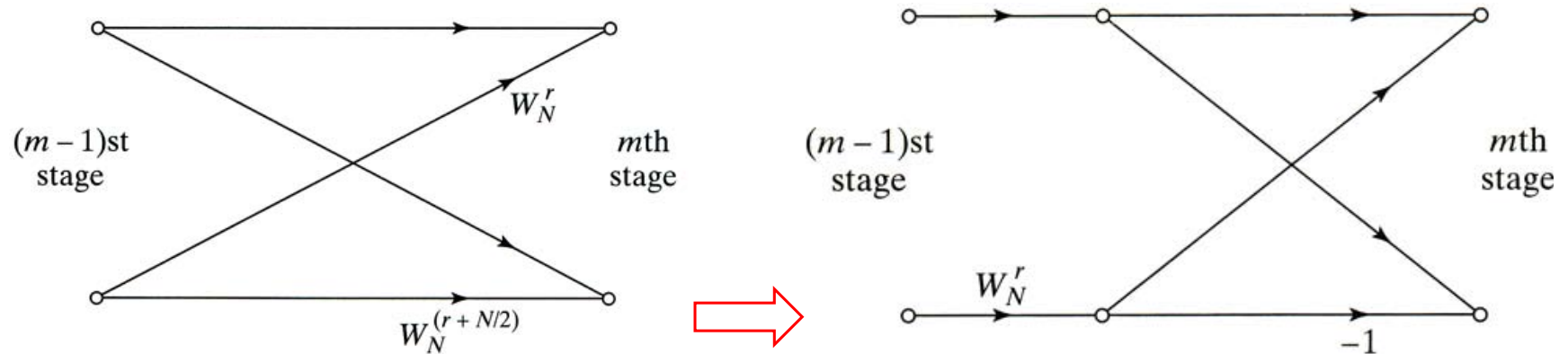
- A FFT também requer $\mathcal{O}(N \log_2 N)$ adições complexas.
- Um cálculo mais acurado deve ainda descontar as multiplicações triviais, i.e., por ± 1 e $\pm j$.

Simplificação Adicional

$$W_N^{r + \frac{N}{2}} = W_N^{\frac{N}{2}} W_N^r = -W_N^r$$

FFT – Decimação no Tempo

Borboleta Mais Eficiente Computacionalmente



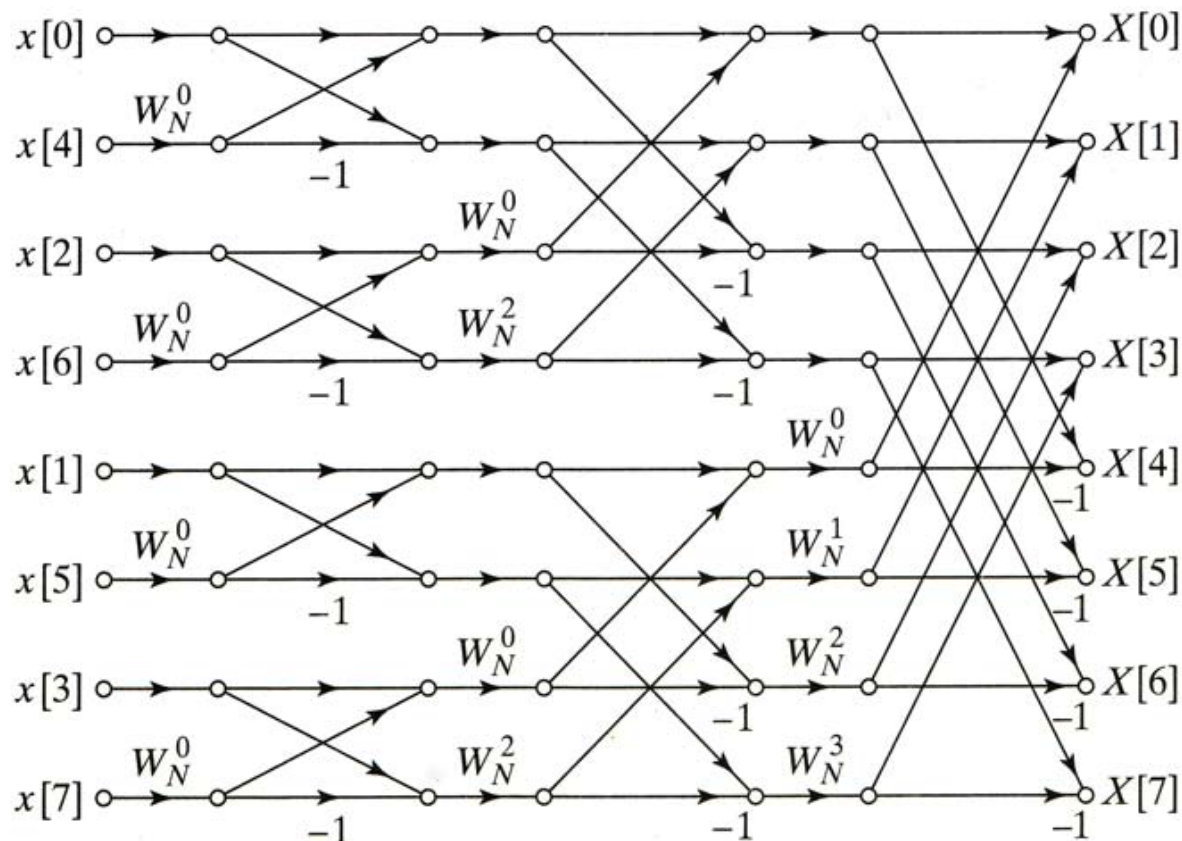
► Pode-se mostrar que o número de multiplicações complexas é:

$$\mathcal{O}\left(\frac{N}{2} \log_2 N\right)$$

► O número de adições complexas é mantido inalterado como $\mathcal{O}(N \log_2 N)$.

FFT – Decimação no Tempo

Diagrama de Blocos Completo ($N = 8$)



Fonte: Oppenheim.

Observações Finais

- ▶ **Ganho computacional da FFT (w.r.t. DFT): CRESCE com N .**
- ▶ Exemplo $N = 2048$:
 - ◇ $\mathcal{O}(N^2)$: 4194304 (≈ 4 milhões) de multiplicações complexas;
 - ◇ $\mathcal{O}(\frac{N}{2} \log_2 N)$: 11264 (≈ 11 mil) multiplicações complexas;
- ▶ O algoritmo de **Decimação na Frequência** pode ser visto como uma versão DUAL daquele de Decimação no Tempo.
- ▶ **Existem diversas variantes de algoritmos de FFT:**
 - ◇ Radix-4
 - ◇ Split-Radix
 - ◇ Otimizações específicas para $x[n] \in \mathbb{R}$, etc.

Filtros Seletores de Frequências

Filtros a Tempo Discreto

- ▶ Filtros podem ser vistos como **SISTEMAS CORRELACIONADORES**.
- ▶ **Lembrete:** a convolução pode ser vista como um processo de correlação.
- ▶ A saída de um filtro para uma dada entrada é uma medida da correlação temporal entre o sinal de entrada e a resposta impulsiva do filtro.

Filtros Seletores de Frequências

- ▶ PERMITEM a transmissão de componentes do sinal de entrada em faixas de frequências específicas do espectro.
- ▶ ATENUAM, ou rejeitam totalmente, as demais componentes frequenciais do sinal de entrada.

Classificação de Filtros Seletores de Frequências

Quanto à Resposta em Frequência

- ▶ Filtro Passa-Baixas (FPB)
- ▶ Filtro Passa-Altas (FPA)
- ▶ Filtro Passa-Faixa(s) (FPF)
- ▶ Filtro Rejeita-Faixa(s) (FRF)

Quanto à Duração da Resposta ao Impulso

- ▶ Filtro FIR (*Finite Impulse Response*)
- ▶ Filtro IIR (*Infinite Impulse Response*)

Projeto de Filtros Seletores de Frequências

Etapas do Projeto

- ▶ 1) Especificação 2) Síntese 3) Implementação

Especificação

- ▶ Definição das **características desejadas** para o filtro:
 - ◇ Perfil do Espectro de Magnitude; Fase Linear ou Não-Linear.
- ▶ Definição das **tolerâncias de erros** aceitáveis em relação à característica ideal.

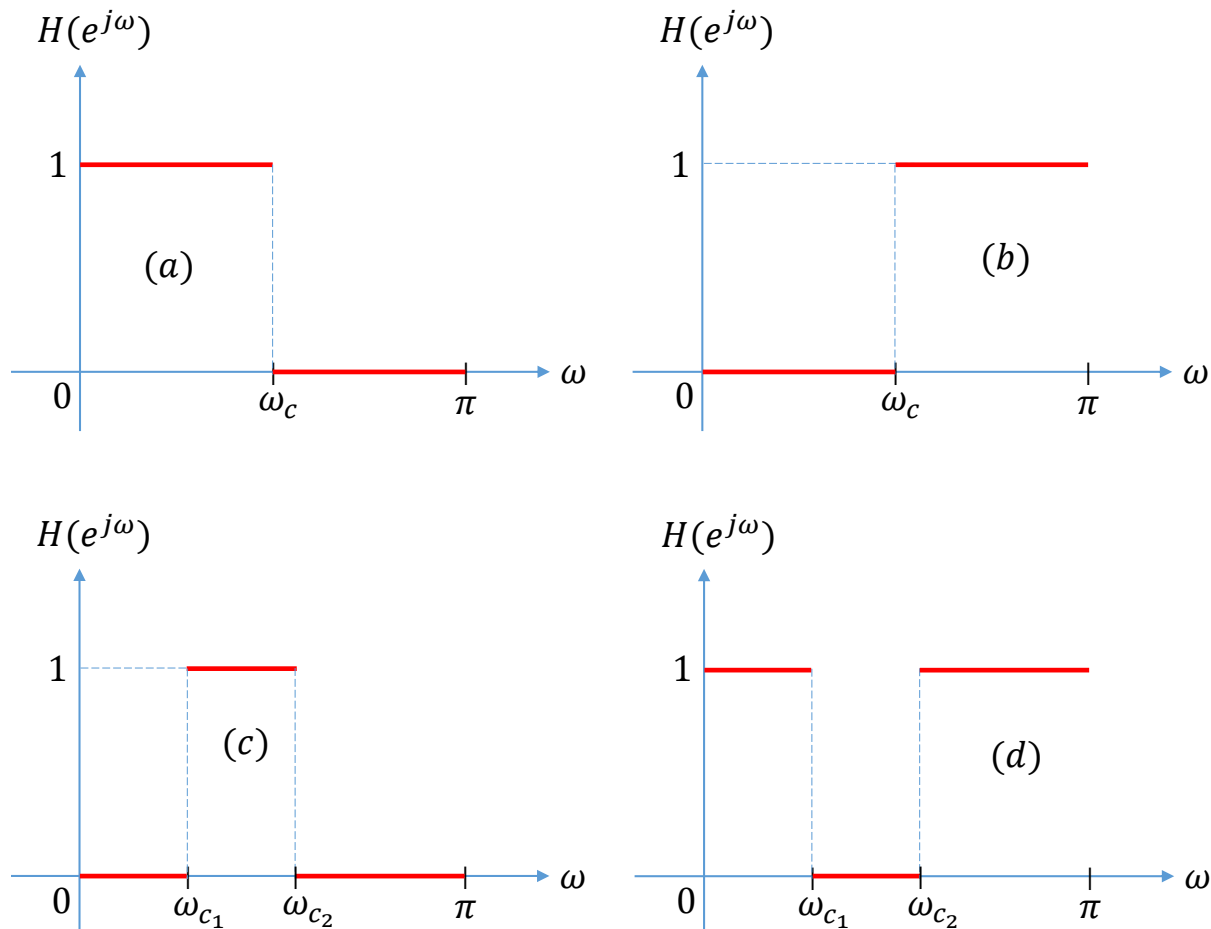
Síntese ou Aproximação

- ▶ Determinação de uma **representação do sistema** (RI, coeficientes de EDs, variáveis de estado, etc.) que atenda à especificação;

Implementação

- ▶ Escolha de uma **forma e/ou estrutura de realização** do filtro aproximado:
 - ◇ Canônica, desacoplada, arranjo série-paralelo de seções de primeira e/ou segunda-ordem.
 - ◇ Representação numérica: ponto-fixo, ponto-flutuante, no. de bits da representação, etc.

Especificações Idealizadas de $H(e^{j\omega})$



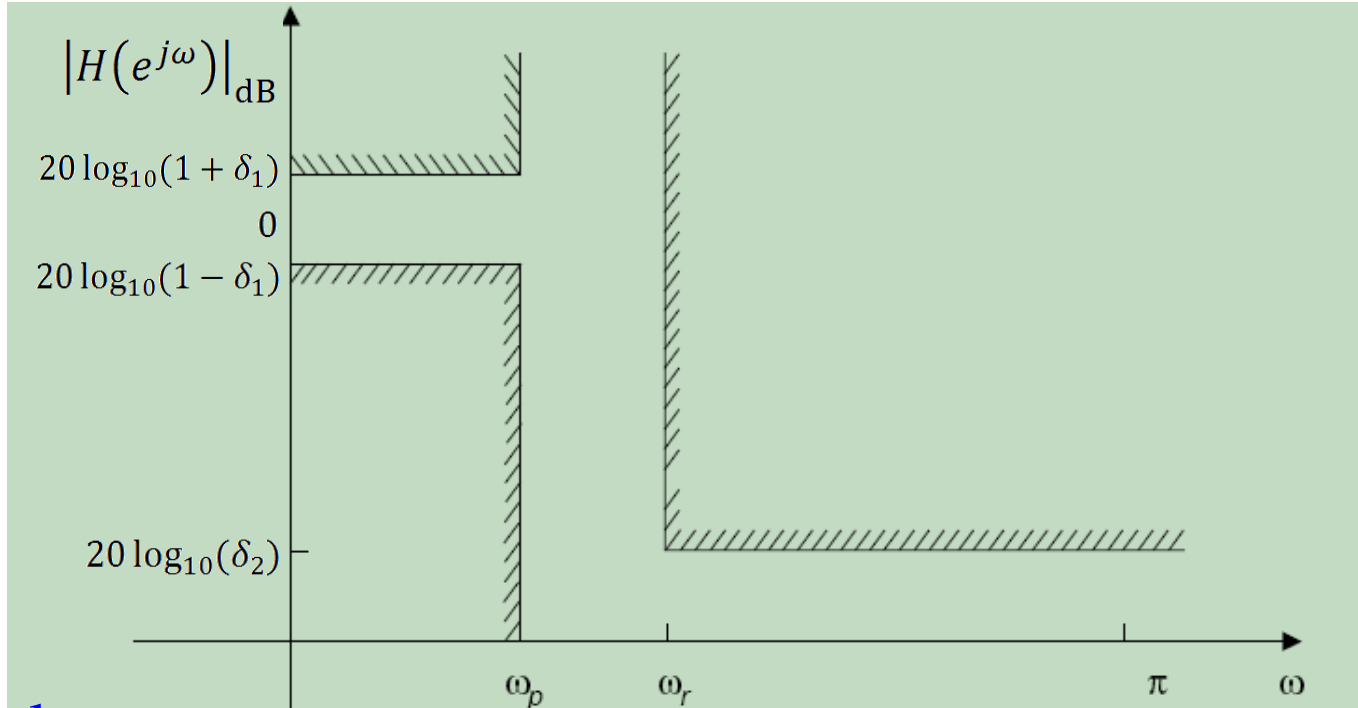
Especificações ideais ($0 \leq \omega \leq \pi$ rad/amostra) de filtros seletivos de coeficientes reais: (a) Passa-Baixas; (b) Passa-Altas; (c) Passa-Faixa; (d) Rejeita-Faixa.

Especificações Idealizadas de $|H(e^{j\omega})|$

Tipo de filtro	Resposta de módulo $ H(e^{j\omega}) $	Resposta ao impulso $h(n)$
Passa-baixas	$\begin{cases} 1, & \text{para } 0 \leq \omega \leq \omega_c \\ 0, & \text{para } \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi}, & \text{para } n = 0 \\ \frac{1}{\pi n} \text{sen}(\omega_c n), & \text{para } n \neq 0 \end{cases}$
Passa-altas	$\begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq \omega < \omega_c \\ 1, & \text{para } \omega_c \leq \omega \leq \pi \end{cases}$	$\begin{cases} 1 - \frac{\omega_c}{\pi}, & \text{para } n = 0 \\ -\frac{1}{\pi n} \text{sen}(\omega_c n), & \text{para } n \neq 0 \end{cases}$
Passa-faixa	$\begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq \omega < \omega_{c1} \\ 1, & \text{para } \omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c2} \\ 0, & \text{para } \omega_{c2} < \omega \leq \pi \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{(\omega_{c2} - \omega_{c1})}{\pi}, & \text{para } n = 0 \\ \frac{1}{\pi n} [\text{sen}(\omega_{c2} n) - \text{sen}(\omega_{c1} n)], & \text{para } n \neq 0 \end{cases}$
Rejeita-faixa	$\begin{cases} 1, & \text{para } 0 \leq \omega \leq \omega_{c1} \\ 0, & \text{para } \omega_{c1} < \omega < \omega_{c2} \\ 1, & \text{para } \omega_{c2} \leq \omega \leq \pi \end{cases}$	$\begin{cases} 1 - \frac{(\omega_{c2} - \omega_{c1})}{\pi}, & \text{para } n = 0 \\ \frac{1}{\pi n} [\text{sen}(\omega_{c1} n) - \text{sen}(\omega_{c2} n)], & \text{para } n \neq 0 \end{cases}$

Obs. Para todos os casos, $h[n]$ é não-causal e com suporte temporal infinito (bi-lateral).

FPB: Especificação Prática de $|H(e^{j\omega})|$



Nomenclatura

- Faixa de Passagem (ou Banda Passante): $0 \leq \omega \leq \omega_p$
- Faixa de Rejeição: $\omega_r \leq \omega \leq \pi$, com $\omega_r > \omega_p$
- Faixa de Transição: $\omega_p < \omega < \omega_r$

Especificações similares podem ser definidas para FPF, FPA e FRF.

Filtros FIR (Causais)

$$H(z) = \sum_{n=0}^M h[n]z^{-n} \quad (\text{filtro com ordem } M \text{ ou } M + 1 \text{ “taps”})$$

Vantagens

- ▶ São sempre estáveis: pólos em $z = 0$.
- ▶ Os zeros do filtro definem as características do filtro.
- ▶ Podem ter RF com FASE LINEAR (atraso de grupo constante).
 - Importante em aplicações como transmissão de dados.

Desvantagens

- ▶ Não têm equivalentes analógicos.
- ▶ Tendem a requerer ordens maiores do que as de filtros IIR, para satisfazer especificações exigentes.

Filtros FIR Causais com FASE LINEAR

$$H(z) = \sum_{n=0}^M h[n]z^{-n} \quad (\text{filtro com ordem } M \text{ ou } M + 1 \text{ “taps”})$$

Condição a Atender para $h[n] \in \mathbb{R}$

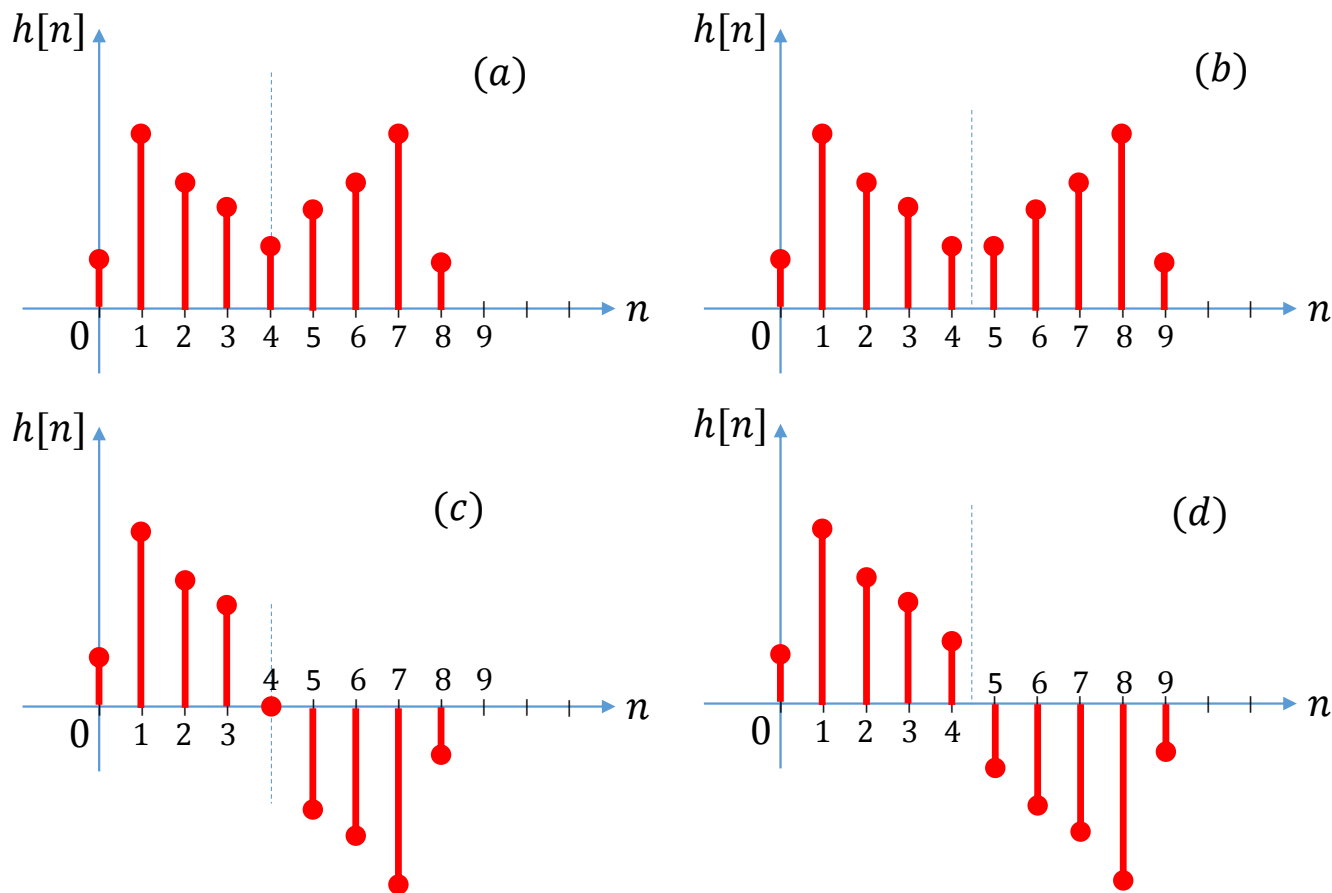
$$h[n] = (-1)^k h[M - n], \quad \text{com } k \in \{0, 1\},$$

Como M pode ser par ou ímpar, há 4 casos possíveis:

- ▶ Tipo I: $k = 0$ e M par.
- ▶ Tipo II: $k = 0$ e M ímpar.
- ▶ Tipo III: $k = 1$ e M par.
- ▶ Tipo IV: $k = 1$ e M ímpar.

Filtros FIR Causais com FASE LINEAR

Tipos de Filtros FIR com Fase Linear



(a) Tipo I; (b) Tipo II; (c) Tipo III; (d) Tipo IV.

Filtros FIR: Métodos de Síntese

Método de Janelamento

- ▶ Especificações IDEAIS $\Rightarrow h[n]$ têm suporte temporal infinito.
- ▶ Solução: Truncar $h[n]$ no tempo para $M + 1$ pontos.
 - ◇ Multiplicar $h[n]$ por uma janela de suporte temporal finito $w[n]$, centrada em $n = 0$.

$$\tilde{h}[n] = w[n]h[n], \quad \text{com } |n| < \frac{M}{2}, \quad (M \text{ par})$$

- ▶ Tornar $\tilde{h}[n]$ causal através de um deslocamento temporal apropriado.

Filtros FIR: Método de Janelamento

Na Frequência

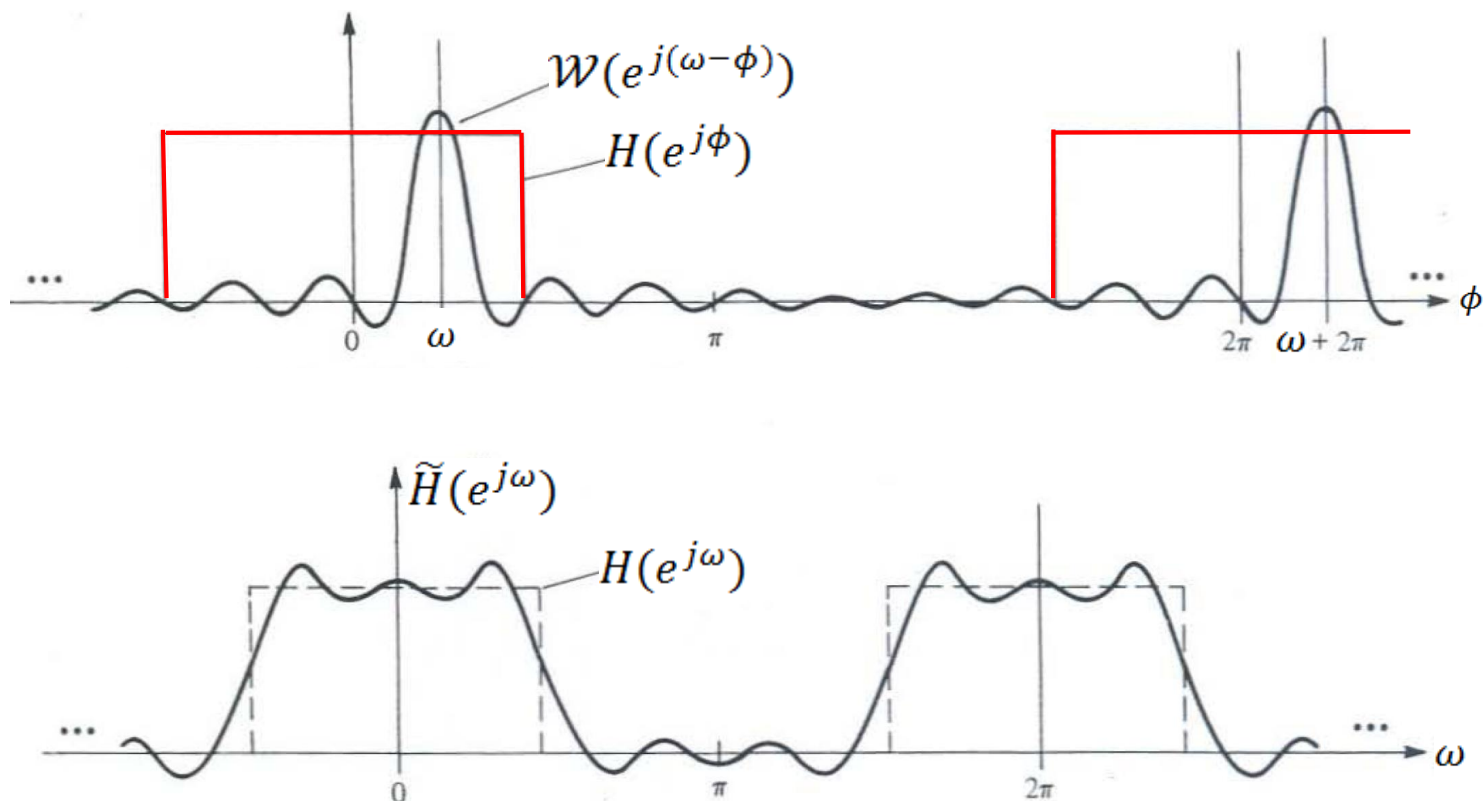
► Convolução Periódica entre $H(e^{j\omega})$ e $\mathcal{W}(e^{j\omega})$.

$$\begin{aligned}\tilde{H}(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega}) * \mathcal{W}(e^{j\omega}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\phi}) \mathcal{W}(e^{j(\omega-\phi)}) d\phi\end{aligned}$$

► O espectro de Fourier da janela vai influenciar $\tilde{H}(e^{j\omega})$.

Filtros FIR: Método de Janelamento

Graficamente



Convolução periódica do espectro de um FPB ideal com o de uma janela.

Filtros FIR: Método de Janelamento

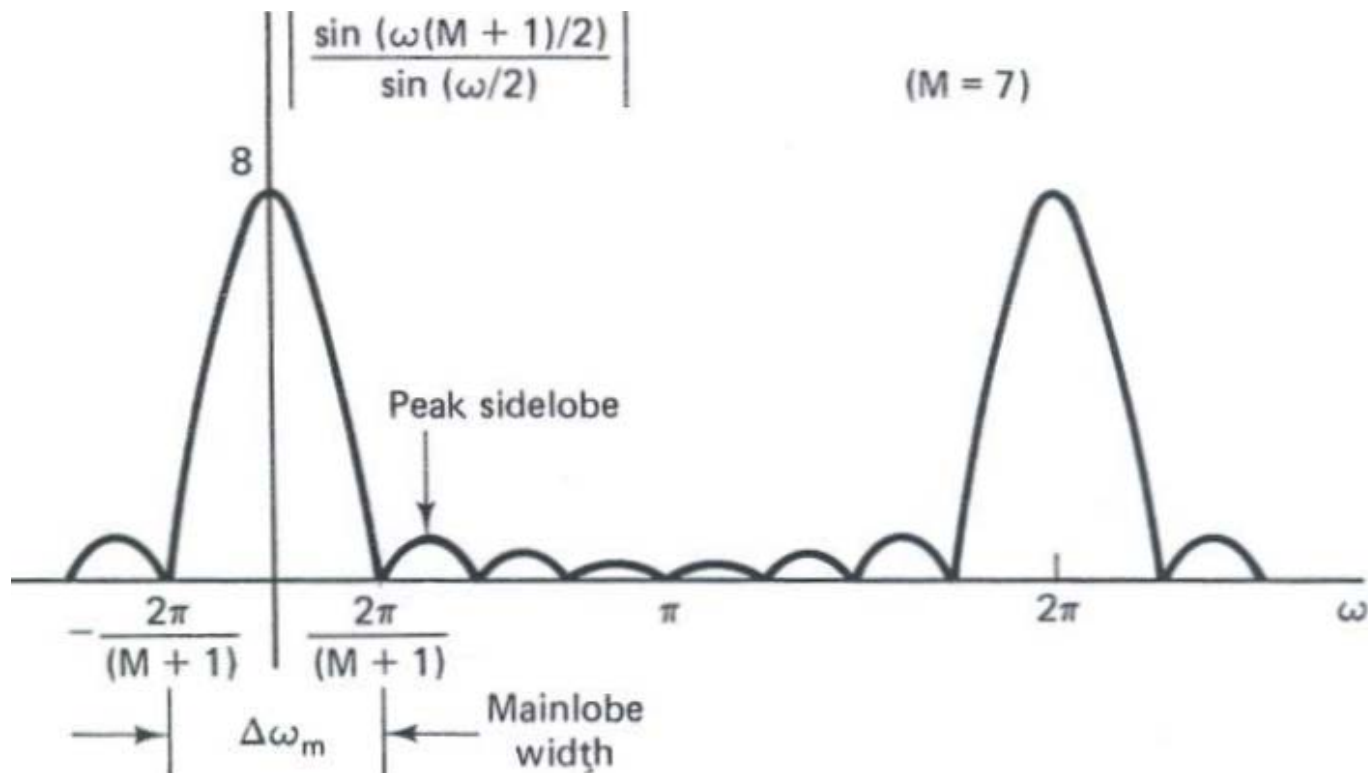
Exemplo: Janela Retangular

$$w[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq \frac{M}{2}, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (M \text{ par})$$

$$\mathcal{W}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}} e^{jn\omega} = \frac{\text{sen}((M+1)\omega/2)}{\text{sen}(\omega/2)}$$

Filtros FIR: Método de Janelamento

Espectro (Magnitude) da Janela Retangular



Obs.: No exemplo, $w[n]$ foi definida em $0 \leq n \leq M$, com M ímpar.

Espectro (Magnitude) da Janela Retangular

Observações

- ▶ A largura do lóbulo principal diminui como aumento de M .
- ▶ A magnitude do primeiro Lóbulo Lateral NÃO diminui muito com o aumento de M .
 - ◇ Aproximadamente 13 dB abaixo da magnitude do lóbulo principal.
- ▶ Exemplo Matlab.

Filtros FIR: Método de Janelamento

Funções-Janela Alternativas

- ▶ Hanning (von Hann); Hamming; Bartlett, Blackman, Chebyshev, Kaiser, Triangular, Gaussiana, etc.
- ▶ **Objetivo:** Evitar a segmentação abrupta de $h[n]$.
- ▶ **BALANÇO em questão:**
 - ◇ **LARGURA do lóbulo principal** $\times$ **ATENUAÇÃO dos lóbulos secundários (laterais)**

Observações

- ▶ Largura do lóbulo principal de $\mathcal{W}(e^{j\omega})$: afeta a largura da banda de transição de $H(e^{j\omega})$.
- ▶ A magnitude dos lóbulos laterais de $\mathcal{W}(e^{j\omega})$ afeta as oscilações observadas nas **bandas passante** e de rejeição do filtro.
 - ◇ Exemplos Matlab: funções `fir1.m` e `fir2.m`.

Projeto de Filtros FIR

Método da Amostragem em Frequência

- ▶ Especifica-se a resposta em frequência IDEAL desejada $D(\omega) = H(e^{j\omega})$;
- ▶ Define-se o número de coeficientes M do filtro $h_p[n]$ a ser projetado;
- ▶ **AMOSTRAR $D(\omega)$ em M pontos uniformemente espaçados (dentro de um período):**

$$D[k] = D\left(\frac{k\omega_s}{M}\right), \text{ com } k = 0, 1, \dots, M-1$$

- ▶ $D[k]$ pode ser vista como a DFT de M pontos do filtro projetado $h_p[n]$;
- ▶ **Para obter $h_p[n]$ basta calcular a IDFT de $D[k]$.**

Método da Amostragem em Frequência

Observações

- ▶ A amostragem a magnitude de $D(\omega)$ é direta.
- ▶ Para filtros **FIR com FASE LINEAR**, há expressões fechadas para a amostragem da fase de $D(\omega)$, dependendo do tipo (I a IV).

Vantagem

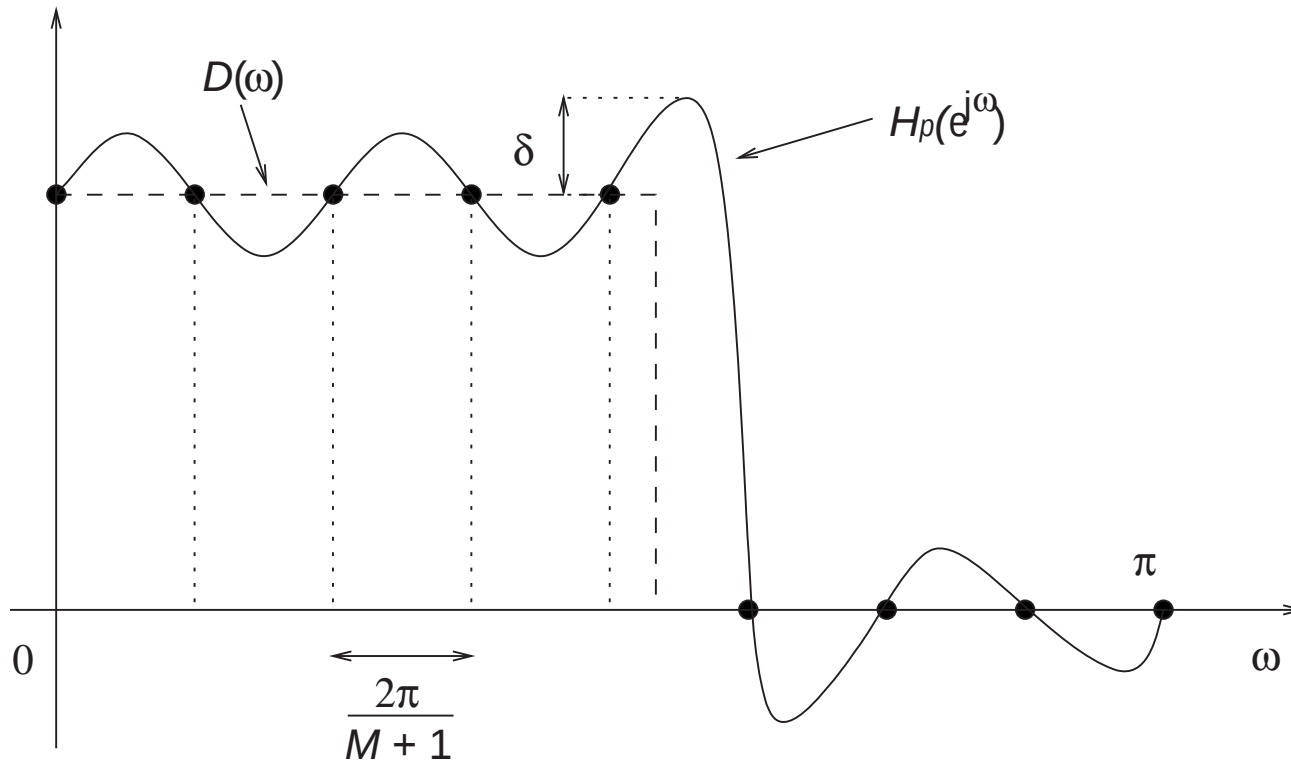
- ▶ Abordagem simples.

Desvantagem

- ▶ **Só se garante $H_p(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})$ para os pontos $\frac{k\omega_s}{M}$ considerados na amostragem!**

Método da Amostragem em Frequência

Graficamente: Amostragem de $|D(\omega)|$



Síntese de Filtros FIR: Métodos de Otimização

Outline do Procedimento

- ▶ Especifica-se a resposta em frequência ideal desejada $H(e^{j\omega})$ e define-se a ordem do filtro a ser projetado.
- ▶ Define-se uma função de custo, que é uma medida do desvio entre a resposta em frequência desejada e a do filtro $\hat{H}(e^{j\omega})$.
- ▶ Estimam-se os parâmetros do filtro (sua resposta ao impulso $\hat{h}[n]$) de modo a minimizar a função de custo.

Filtros FIR: Otimização

Observações

- ▶ Como $H(e^{j\omega})$ e $\hat{H}(e^{j\omega})$ são funções contínuas em ω , uma opção prática consiste em amostrá-las para um conjunto finito de ω_i .
- ▶ A função-custo tem que depender (direta ou indiretamente) dos coeficientes $\hat{h}[n]$ a serem estimados.
- ▶ A definição da função-custo e a escolha do processo de otimização para minimizá-la não são únicas:
 - ◇ Mínimos-quadrados ponderado (WLS);
 - ◇ Minimax;
 - ◇ Métodos Estatísticos;
 - ◇ Algoritmos Genéticos, etc.

Filtros FIR Tipo I: Exemplo de Otimização

Relação entre $h[n]$ (ordem M (par) ou $M + 1$ Coefs.) e $H(e^{j\omega})$

► Filtros **FIR Tipo I** têm fase linear e resposta ao impulso simétrica: $h[M - n] = h[n]$.

► Pela Transformada- z

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h[n] z^{-n} + h\left[\frac{M}{2}\right] z^{-\frac{M}{2}} + \sum_{n=\frac{M}{2}+1}^M h[n] z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h[n] \left[z^{-n} + z^{-(M-n)} \right] + h\left[\frac{M}{2}\right] z^{-\frac{M}{2}} \end{aligned}$$

► Avaliando em $z = e^{j\omega}$

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h[n] \left[e^{-j\omega n} + e^{(-j\omega M + j\omega n)} \right] + h\left[\frac{M}{2}\right] e^{-j\omega \frac{M}{2}} \\ &= e^{-j\omega \frac{M}{2}} \left\{ h\left[\frac{M}{2}\right] + \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} 2h[n] \cos \left[\omega \left(\frac{M}{2} - n \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Filtros FIR Tipo I: Exemplo de Otimização

Desenvolvimento

- Mudança de variável: $m = \frac{M}{2} - n$

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= e^{-j\omega \frac{M}{2}} \left\{ h\left[\frac{M}{2}\right] + \sum_{m=1}^{\frac{M}{2}} 2h\left[\frac{M}{2} - m\right] \cos[\omega m] \right\} \\ &= e^{-j\omega \frac{M}{2}} \sum_{m=0}^{\frac{M}{2}} p[m] \cos[\omega m] \end{aligned}$$

com $p[0] = h[\frac{M}{2}]$ e $p[m] = 2h[\frac{M}{2} - m]$ para $m = 1, \dots, \frac{M}{2}$.

- FIR Tipo I: M é par. Fazendo $L = \frac{M}{2}$

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= e^{-j\omega L} \sum_{m=0}^L p[m] \cos[\omega m] \\ &= e^{-j\omega L} P(\omega) \end{aligned}$$

- O termo $e^{-j\omega L}$ só afeta a fase de $H(e^{j\omega})$ e não depende dos coeficientes do filtro.
- $P(\omega)$ depende (indiretamente) de $h[n]$ e contém toda a informação $|H(e^{j\omega})|$.

Filtros FIR Tipo I: Exemplo de Otimização

ERRO de Aproximação

- Definido na Frequência:

$$E(\omega) = W(\omega) \{D(\omega) - P(\omega)\}$$

onde

- $D(\omega)$: Resposta **DESEJADA**
- $W(\omega)$: Função de Pesos (Ponderação)

DISCRETIZAÇÃO de $E(\omega)$

- Somente nas faixas de passagem e rejeição (entre $0 \leq \omega \leq \pi$).
- Escolher $N \gg M$ valores discretos ω_i .
- Incluir na amostragem as extremidades das faixas.

Filtros FIR Tipo I: Exemplo de Otimização

Erro de Aproximação na Forma Matricial

$$\mathbf{e} = \mathbf{W} (\mathbf{d} - \mathbf{U}\mathbf{p})$$

onde

$$\mathbf{e} = [E(\omega_1) \ E(\omega_2) \ \cdots \ E(\omega_N)]^T$$

$$\mathbf{W} = \text{diag} \{W(\omega_1) \ W(\omega_2) \ \cdots \ W(\omega_N)\}$$

$$\mathbf{d} = [D(\omega_1) \ D(\omega_2) \ \cdots \ D(\omega_N)]^T$$

$$\mathbf{p} = [p[0] \ p[1] \ \cdots \ p[L]]^T$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\omega_1) & \cos(2\omega_1) & \cdots & \cos(L\omega_1) \\ 1 & \cos(\omega_2) & \cos(2\omega_2) & \cdots & \cos(L\omega_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos(\omega_N) & \cos(2\omega_N) & \cdots & \cos(L\omega_N) \end{bmatrix}$$

Filtros FIR Tipo I: Exemplo de Otimização

FUNÇÃO-CUSTO

- ▶ Atribui uma **PENALIZAÇÃO** para erro de aproximação.
- ▶ **Há várias opções.**
- ▶ **LS:** Minimização do erro quadrático médio, i.e., a média aritmética das amostras $|e[n]|^2$, com $0 \leq n \leq N - 1$:

$$\min_{\mathbf{p}} \left\{ \frac{1}{N} \mathbf{e}^T \mathbf{e} \right\}$$

Filtros FIR Tipo I: Exemplo de Otimização

Minimização (no sentido WLS) da Função-Custo

- Envolve a computação do GRADIENTE de $\mathbf{e}^T \mathbf{e}$ w.r.t. $\mathbf{p}$

$$\nabla_{\mathbf{p}} \left\{ \mathbf{e}^T \mathbf{e} \right\} \triangleq \frac{d \left\{ \mathbf{e}^T \mathbf{e} \right\}}{d \mathbf{p}}$$

- E a determinação de $\mathbf{p}$ que **ANULA** $\nabla_{\mathbf{p}} \left\{ \mathbf{e}^T \mathbf{e} \right\}$.

Desenvolvimento

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^T \mathbf{e} &= (\mathbf{d}^T - \mathbf{p}^T \mathbf{U}^T) \mathbf{W}^T \mathbf{W} (\mathbf{d} - \mathbf{U} \mathbf{p}) \\ &= (\mathbf{d}^T - \mathbf{p}^T \mathbf{U}^T) \mathbf{W}^2 (\mathbf{d} - \mathbf{U} \mathbf{p}) \\ &= \mathbf{d}^T \mathbf{W}^2 \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \mathbf{W}^2 \mathbf{U} \mathbf{p} - \mathbf{p}^T \mathbf{U}^T \mathbf{W}^2 \mathbf{d} + \mathbf{p}^T \mathbf{U}^T \mathbf{W}^2 \mathbf{U} \mathbf{p} \\ &= \mathbf{d}^T \mathbf{W}^2 \mathbf{d} - 2 \mathbf{p}^T \mathbf{U}^T \mathbf{W}^2 \mathbf{d} + \mathbf{p}^T \mathbf{U}^T \mathbf{W}^2 \mathbf{U} \mathbf{p}, \end{aligned}$$

Filtros FIR Tipo I: Exemplo de Otimização

SOLUÇÃO

$$\nabla_{\mathbf{p}} \left\{ \mathbf{e}^T \mathbf{e} \right\} = -2\mathbf{U}^T \mathbf{W}^2 \mathbf{d} + 2\mathbf{U}^T \mathbf{W}^2 \mathbf{U} \mathbf{p} = 0$$

O que resulta:

$$\mathbf{p} = \left(\mathbf{U}^T \mathbf{W}^2 \mathbf{U} \right)^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{W}^2 \mathbf{d}$$

Filtros FIR Tipo I: Exemplo de Otimização

OBSERVAÇÕES

- ▶ Para a inversão de matriz: usar métodos numéricos apropriados.
 - ◇ Decomposição de Cholesky, etc.
- ▶ Para filtros FIR de ordem M com fase linear:
 - ◇ A solução WLS (com $\mathbf{W} = \mathbf{I}$) COINCIDE com a do método de janelamento (com janela retangular).
 - ◇ Para $N = M$ haveria M equações e M incógnitas: mesma solução que a via DFT (amostragem na frequência).

Filtros FIR Tipo I: Exemplo de Otimização

MAIS OBSERVAÇÕES

► No Matlab:

- ◇ Função `firls.m`: Otimização WLS
- ◇ Função `firpm.m`: Otimização Minimax
 - Minimização da norma-infinito do erro de aproximação;
 - **Solução *Equiripple***: oscilações de igual intensidade nas faixas de passagem e rejeição.

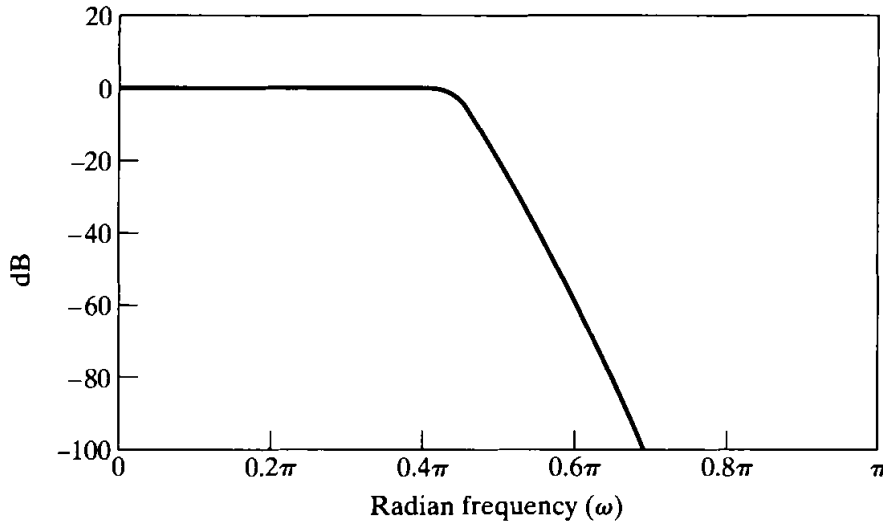
Filtros IIR

- Função de transferência:

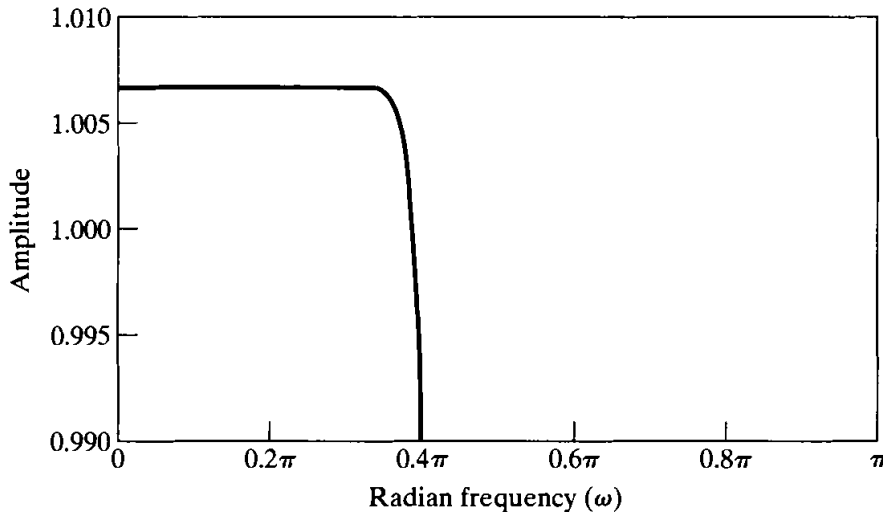
$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}, \quad N > 0, \quad M \geq 0, \quad N \geq M$$

- O projeto dos filtros (cálculo dos parâmetros a_k e b_m), em geral, é realizado através da **discretização de filtros analógicos convencionais**.
- Exemplos de filtros analógicos usuais:
 - Filtros de Butterworth
 - Filtros de Chebyshev
 - Filtros Elípticos

Filtros de Butterworth



(a)



Quadrado da Resposta em Magnitude:

$$|\hat{H}(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\frac{\Omega}{\Omega_c})^{2N}}$$

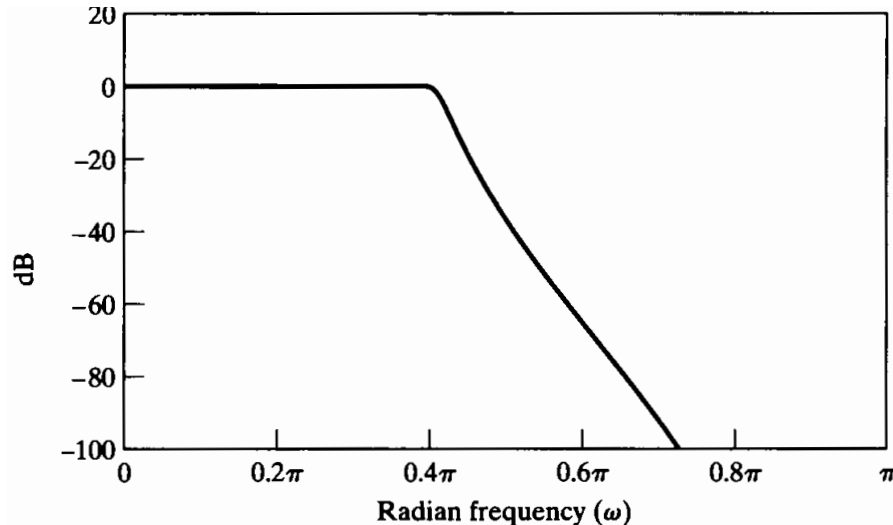
- N : ordem do filtro.
- Ω : frequência angular ($[0, \infty)$ rad/s).
- Ω_c : frequência angular de corte.
- As primeiras $2N - 1$ derivadas de $|\hat{H}(j\Omega)|^2$ são nulas em $\Omega = 0$.

Protótipo com $\Omega_c = 1$:

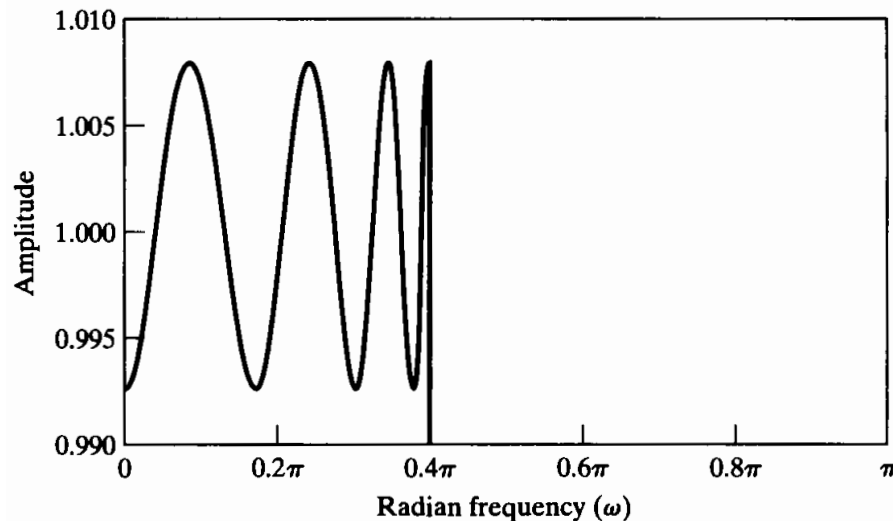
$$N = \frac{\log_{10}(10^{-\frac{A_{dB}}{10}} - 1)}{2 \log_{10} \Omega_a}$$

- A_{dB} : magnitude em dB para uma dada frequência Ω_a .

Filtros de Chebyshev I



(a)



Quadrado da Resposta em Magnitude:

$$|\hat{H}(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_N^2(\frac{\Omega}{\Omega_c})}$$

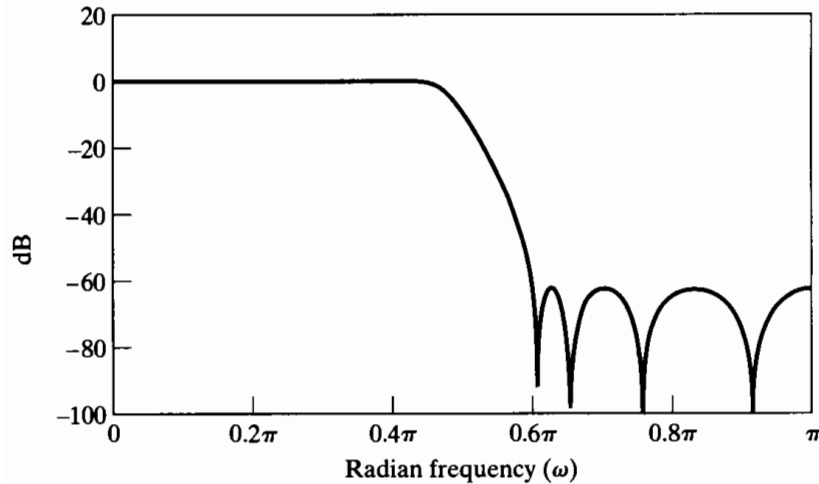
- N : ordem do filtro.
- ϵ : *ripple* (oscilação na banda de PASSAGEM).
- C_N : polinômio de Chebyshev de ordem N :

$$C_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1}(x)), & 0 \leq x \leq 1 \\ \cosh(N \cosh^{-1}(x)), & 1 \leq x < \infty \end{cases}$$

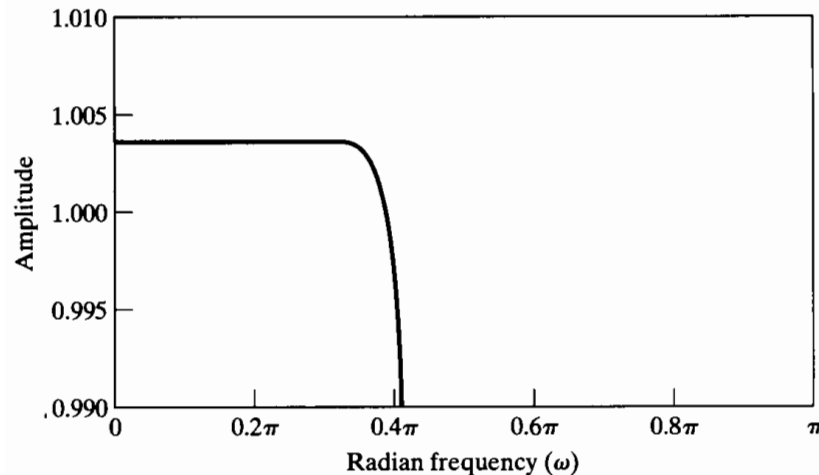
$$C_N(0) = \begin{cases} (-1)^{N/2}, & N \text{ par} \\ 0, & N \text{ ímpar} \end{cases}$$

$$C_N(1) = 1$$

Filtros de Chebyshev II



(a)

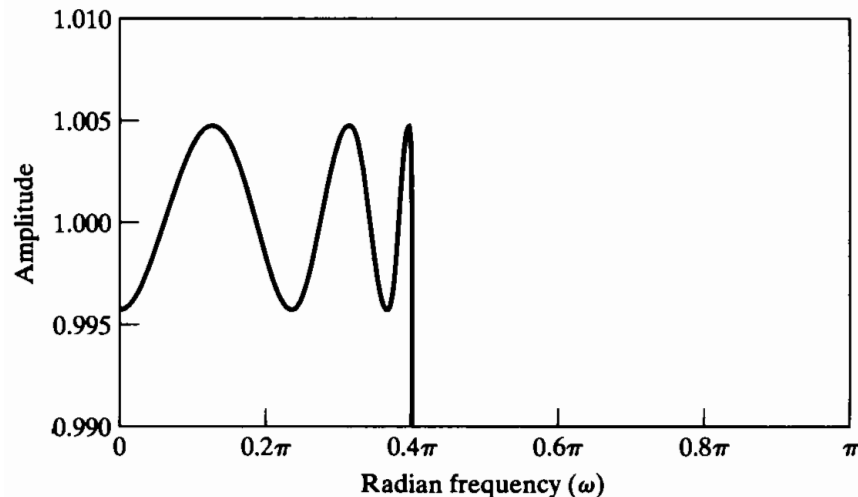
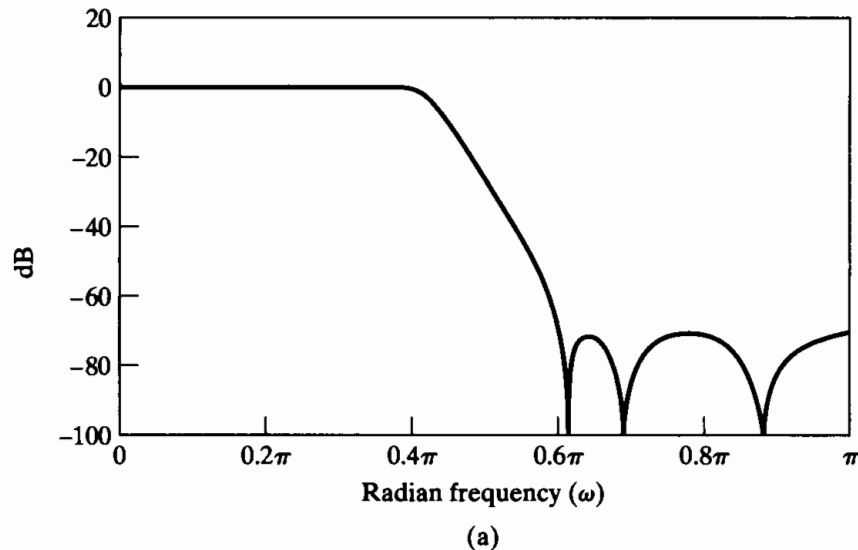


Quadrado da Resposta em Magnitude:

$$|\hat{H}(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + [\epsilon^2 C_N^2(\frac{\Omega}{\Omega_c})]^{-1}}$$

- N : ordem do filtro.
- ϵ : *ripple* (oscilação na banda de REJEIÇÃO).
- C_N : polinômio de Chebyshev de ordem N .

Filtros Elípticos



Quadrado da Resposta em Magnitude:

$$|\hat{H}(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 U_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)}$$

- N : ordem do filtro.
- ϵ : *ripple* (oscilação na banda de passagem).
- U_N : função elíptica Jacobiana de ordem N .
- Há oscilações (*equiripple*) nas bandas de PASSAGEM e REJEIÇÃO.

Projeto de Filtros IIR

Estágios do Procedimento

- ▶ O passo inicial é sempre um PASSA-BAIXAS ANALÓGICO!
- ▶ A obtenção de filtros passa-altas, passa-faixa, etc., a partir do passa-baixas projetado, se dá através de uma TRANSFORMAÇÃO DE BANDA.
- ▶ Os filtros digitais correspondentes são obtidos através de uma TRANSFORMAÇÃO DE DOMÍNIO.

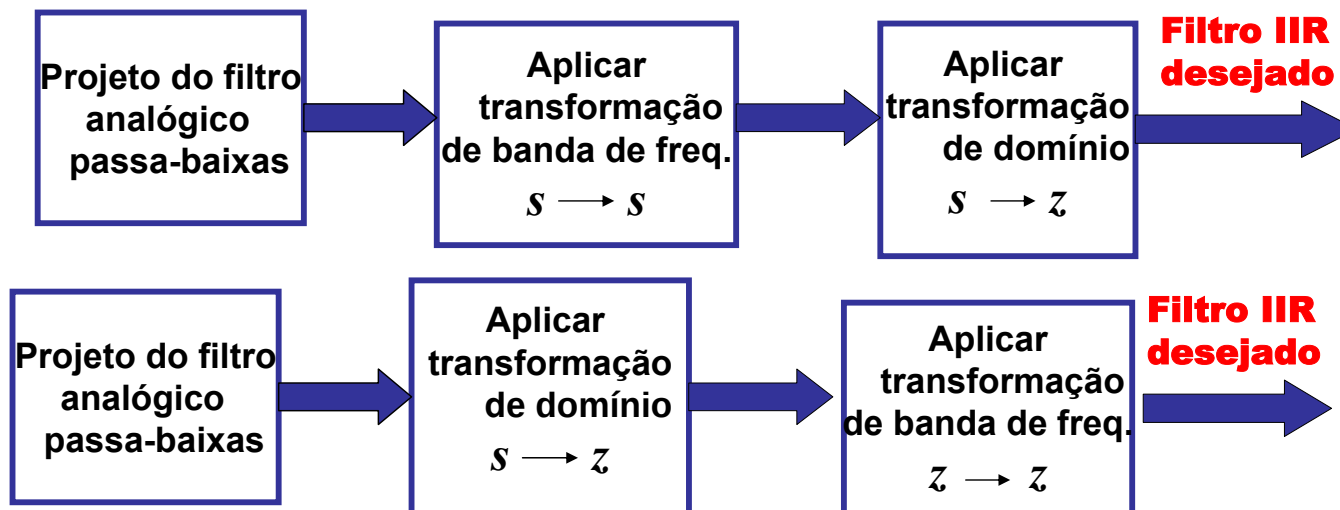
Projeto de Filtros IIR

Duas Abordagens

► Projetar o Passa-Baixas:

◇ Parâmetros de projeto: bandas de passagem, rejeição e ordem do filtro.

► Escolher qual Transformação (banda ou domínio) aplicar primeiro.



Transformação de Filtros Analógicos para Filtros Digitais

Métodos de Discretização Típicos

- **Invariância da Resposta ao Impulso**

Produz um filtro digital cuja resposta ao impulso consiste de amostras igualmente espaçadas da resposta ao impulso do filtro a tempo contínuo.

$$h[n] = Th_c(nT)$$

$h_c(t)$: resposta ao impulso do filtro a tempo contínuo

T : período de amostragem.

Transformação de Filtros Analógicos para Filtros Digitais

Transformação BILINEAR

- Converte uma função de transferência a tempo contínuo $H_c(s)$ numa a tempo discreto $H(z)$.

$$s = \frac{2}{T} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \iff z = \frac{1 + (T/2)s}{1 - (T/2)s}$$

- Relação entre frequências ω (em discreto) e Ω (em contínuo):

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan(\omega/2) \iff \omega = 2 \arctan(\Omega T/2)$$

- $H(z) = H_c \left(\frac{2}{T} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \right)$

Transformação de Filtros Analógicos para Filtros Digitais

Transformação BILINEAR

- ▶ Mapeia o eixo imaginário $s = j\Omega$ do contexto a tempo contínuo no círculo unitário $z = e^{j\omega T}$ do contexto a tempo discreto.
- ▶ $H(z)$ será assintoticamente estável se $H_c(s)$ for assintoticamente estável.
- ▶ A frequência $\Omega=0$ é mapeada em $\omega=0$.

Transformações entre Bandas de Frequências

Type of Transformation	Transformation	Parameters
Lowpass	$z^{-1} \longrightarrow \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}$	$\omega_c = \text{cutoff frequency of new filter}$ $\alpha = \frac{\sin [(\omega'_c - \omega_c) / 2]}{\sin [(\omega'_c + \omega_c) / 2]}$
Highpass	$z^{-1} \longrightarrow -\frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}}$	$\omega_c = \text{cutoff frequency of new filter}$ $\alpha = -\frac{\cos [(\omega'_c + \omega_c) / 2]}{\cos [(\omega'_c - \omega_c) / 2]}$
Bandpass	$z^{-1} \longrightarrow -\frac{z^{-2} - \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2}{\alpha_2 z^{-2} - \alpha_1 z^{-1} + 1}$	$\omega_\ell = \text{lower cutoff frequency}$ $\omega_u = \text{upper cutoff frequency}$ $\alpha_1 = -2\beta K / (K + 1)$ $\alpha_2 = (K - 1) / (K + 1)$ $\beta = \frac{\cos [(\omega_u + \omega_\ell) / 2]}{\cos [(\omega_u - \omega_\ell) / 2]}$ $K = \cot \frac{\omega_u - \omega_\ell}{2} \tan \frac{\omega'_c}{2}$
Bandstop	$z^{-1} \longrightarrow \frac{z^{-2} - \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2}{\alpha_2 z^{-2} - \alpha_1 z^{-1} + 1}$	$\omega_\ell = \text{lower cutoff frequency}$ $\omega_u = \text{upper cutoff frequency}$ $\alpha_1 = -2\beta / (K + 1)$ $\alpha_2 = (K - 1) / (K + 1)$ $\beta = \frac{\cos [(\omega_u + \omega_\ell) / 2]}{\cos [(\omega_u - \omega_\ell) / 2]}$ $K = \tan \frac{\omega_u - \omega_\ell}{2} \tan \frac{\omega'_c}{2}$

(ω'_c é a frequência de corte do filtro passa-baixas discreto)

Projeto de Filtros IIR

No Matlab

► Funções de projeto (obtenção dos coeficientes b_m e a_k):

- ◇ Função `butter.m`: Butterworth
- ◇ Função `cheby1.m`: Chebyshev I
- ◇ Função `cheby2.m`: Chebyshev II
- ◇ Função `ellip.m`: Elíptico

► Funções de determinação da ORDEM mínima (para atendimento de certa especificação):

- ◇ Função `buttord.m`: Butterworth
- ◇ Função `chebord1.m`: Chebyshev I
- ◇ Função `chebord2.m`: Chebyshev II
- ◇ Função `ellipord.m`: Elíptico

Estimação de Sistemas Recursivos (AR)

Problema

- Observa-se uma sequência discreta $y_o[n]$ de L amostras;
- Assume-se que uma ED Homogênea de ordem $N < L$:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n - k] = 0$$

pode produzir como solução $y[n]$ uma sequência similar à $y_o[n]$.

- **Objetivo:** obter a_k (parâmetros do modelo) de modo que o erro entre $y[n]$ e $y_o[n]$ seja minimizado segundo alguma métrica.

Soluções

- **Várias Opções:** Métodos de Burg, da auto-correlação (Yule-Walker), da covariância, etc.
- Uma possibilidade é usar estimadores LS (*Least Squares*)

Estimação LS de Sistemas Recursivos (AR)

Observações Iniciais

- ▶ a_k e $y[n]$ já estão relacionados através de equações lineares.

Estratégia

- ▶ Expressar o erro de aproximação em função dos parâmetros a serem estimados.
- ▶ Definir uma função-custo com dependência quadrática em relação ao erro de aproximação.
- ▶ Encontrar o conjunto de coeficientes que minimiza a função custo, no sentido LS.

MODELO Gerador de $y_o[n]$

- ▶ ED Homogênea cuja solução aproxima $y_o[n]$ (fazendo $a_0 = 1$):

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N a_k y[n - k]$$

- ▶ As N CIs necessárias para resolver a ED nos instantes $N \leq n \leq L - 1$ serão $y_o[n - k]$, com $k = 1, 2, \dots, N$.

Estimação LS de Sistemas Recursivos (AR)

Erro de Aproximação

- ▶ O modelo produz $y[n]$ como **ESTIMATIVA** para $y_o[n]$
- ▶ Erro de Modelagem (ou de Aproximação): $y_o[n] - y[n] = e[n]$

$$y_o[n] - \sum_{k=1}^N -a_k y_o[n-k] = e[n], \quad \text{para } n = N, N+1, \dots, L-1$$

- ▶ Considerando a_k com valores negativos, pode-se escrever em notação matricial:

$$\mathbf{y}_o - \mathbf{Y}_o \mathbf{a} = \mathbf{e}$$

Erro de Aproximação

$$\mathbf{e} = \mathbf{y}_o - \mathbf{Y}_o \mathbf{a}$$

Com:

$$\mathbf{y}_o = [y_o[N], y_o[N + 1], \dots, y_o[L - 1]]^T,$$

$$\mathbf{a} = [-a_1, -a_2, \dots, -a_N]^T,$$

$$\mathbf{Y}_o = \begin{pmatrix} y_o[N] & \cdots & y_o[0] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_o[L - 1] & \cdots & y_o[L - 1 - N] \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{e} = [e[N], e[N + 1], \dots, e[L - 1]]^T$$

Estimação LS de Sistemas Recursivos (AR)

Minimização (no Sentido LS) de $\mathbf{e}^T \mathbf{e}$ w.r.t. $\mathbf{a}$

- ▶ Problema Anterior (Projeto de Filtros): $\mathbf{e} = \mathbf{W} (\mathbf{d} - \mathbf{U}\mathbf{p})$
- ▶ Problema Corrente: $\mathbf{e} = \mathbf{y}_o - \mathbf{Y}_o \mathbf{a}$
- ▶ Nos dois casos, as expressões para $\mathbf{e}$ têm o mesmo formato:

$$\mathbf{W} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{y}_o \quad \text{e} \quad \mathbf{U} = \mathbf{Y}_o$$

Solução LS para os coeficientes

- ▶ Segue o padrão da solução anterior:

$$\mathbf{a}^{\text{LS}} = \left(\mathbf{Y}_o^T \mathbf{Y}_o \right)^{-1} \mathbf{Y}_o^T \mathbf{y}_o$$

Estimação LS de Sistemas Recursivos (AR)

Escolha da Ordem N do Modelo

- ▶ Está relacionada com o número de componentes ressonantes no espectro do sinal $y_o[n]$.
 - ◇ Pode ser inferida por análise espectral não-paramétrica (FFT).
- ▶ Obtenível via métodos e heurísticas para a seleção de ordem.
 - ◇ Análise do comportamento de $\mathbf{e}^T \mathbf{e}$ em função da ordem N .
- ▶ Pode envolver aspectos práticos:
 - ◇ Precisão da aproximação $\times$ complexidade computational.

Estimação LS de Sistemas Recursivos (AR)

No Matlab

- ▶ Funções: `ar.m` (implementa vários métodos), `arburg.m`, `aryule.m`, `lpc.m`, `armcov.m`.
- ▶ O número mínimo L de amostras necessárias para obter uma solução de ordem N varia de acordo com o método escolhido.
- ▶ Algumas soluções garantem um modelo estável (Burg, Yule-Walker), outras não (LS, Covariância).

Estimação LS de Sistemas Recursivos (AR)

Observações e Aplicação

- ▶ O vetor de coeficientes $\mathbf{a}$ determina os pólos de $Y_0(z)$ (para a representação de ordem N).
- ▶ Cada pólo está associado com uma componente (complexa) ressonante:
 - ◇ A FASE de cada pólo indica a frequência da componente ressonante.
 - ◇ A MAGNITUDE (raio) de cada pólo informa do decaimento temporal de energia da componente ressonante.
- ▶ A sequência $y_0[n]$ pode ser analisada espectralmente através da estimativa dos coeficientes $\mathbf{a}$:
 - ◇ **Análise espectral PARAMÉTRICA.**