

## PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

GA-038 Processamento Digital de Sinais – 1P26 – Sexta Lista de Exercícios

### EXERCÍCIO 1

Deseja-se implementar através de um sistema em tempo discreto o sistema analógico (de tempo contínuo):  $y(t) = x(3t)$ . No mais, sabe-se que é real e seu espectro é nulo para frequências iguais e superiores a 10kHz e não-nulo abaixo desse valor. Especifique uma cadeia de processamento necessária para realizar tal objetivo. Considere como **ideais** todos os seus possíveis elementos constituintes, i.e., conversor analógico-digital, filtro anti-aliasing, filtro de reconstrução, conversor digital-analógico, etc. Justifique as suas escolhas de projeto.

### EXERCÍCIO 2

Solicitou-se a consultor técnico-científico determinar os valores de uma sequência  $x[n]$  a partir da informação sabida que o espectro de Fourier (DTFT) correspondente tem expressão algébrica  $X(e^{j\omega}) = (1 + 0,9e^{-j\omega})^{-1}$ . O consultor resolveu obter  $x[n]$  computacionalmente através do seguinte procedimento:

- i. Definiu  $N = 16$ ;
- ii. Obteve  $X[k]$  pela avaliação de  $X(e^{j\omega})$  em  $\omega = 2\pi k/N$  rad/amostra, com  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ ;
- iii. Computou a DFT<sub>16</sub> inversa (através da FFT<sub>16</sub> inversa) de  $X[k]$  e obteve  $x[n]$ , com  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ .

Os resultados encontrados pelo consultor para  $|X[k]|$  e  $x[n]$  são mostrados na Figura 1. Como referência, o script de Matlab que ele usou para realizar o procedimento segue em anexo.

Responda:

- a) A sequência  $x[n]$  encontrada pelo consultor tem o espectro  $X(e^{j\omega})$  informado no problema?

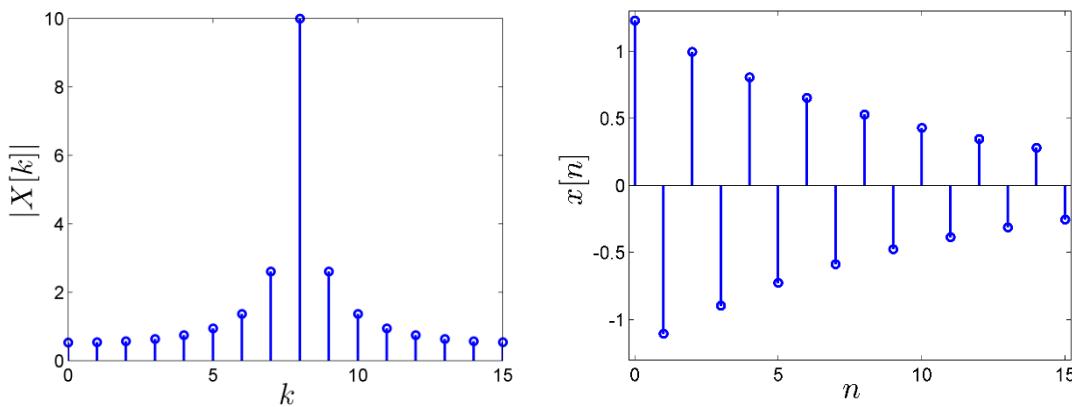


Figura 1. Módulo de  $X[k]$  (DFT<sub>16</sub>) e sequência estimada  $x[n]$  obtida pela IDFT<sub>16</sub> inversa de  $X[k]$ .

### EXERCÍCIO 3

Responda sucintamente:

- Existe a DFT<sub>16</sub> da sequência  $x[n] = \left(\frac{10}{9}\right)^{-n} u[n]$ ?
- Como se relacionam a DTFT e DFT<sub>N</sub> de uma sequência  $x[n]$  de  $L < N$  amostras?
- O quê é o recurso de *zero-padding* no uso da DFT<sub>N</sub> e qual o seu efeito sobre o espectro resultante?
- Cite uma vantagem e uma desvantagem da FFT<sub>N</sub> (radix-2) sobre a DFT<sub>N</sub>.

### EXERCÍCIO 4

Deseja-se computar **um período** da Série de Fourier  $c_k$  de uma sequência não-nula  $x[n] = x[n + P]$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ , com período fundamental  $P = 512$  amostras. É possível obter as amostras de  $c_k$  usando 1 multiplicador real uma FFT de  $N = 1024$  pontos? Caso positivo, apresente os passos do procedimento.

### EXERCÍCIO 5

Demonstre o Teorema de Conservação de Energia (ou de Parseval) para a DFT<sub>N</sub>:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$$

para  $x[n]$  de valores complexos e periódica com período fundamental  $N$ .

### EXERCÍCIO 6

Deseja-se obter as DFTs de  $N$  pontos de duas sequências de valores reais,  $x_1[n]$  e  $x_2[n]$ , cada uma com  $N = 1024$  amostras. É possível encontrar os espectros desejados usando uma cadeia de processamento que envolva apenas uma FFT de  $N$  pontos, além de manipulações triviais (adição, escalamento, etc.) sobre as sequências envolvidas? Caso possível, proponha tal cadeia de processamento.

### EXERCÍCIO 7

A resposta impulsiva de um filtro digital passa-baixas ideal não-causal com frequência de corte  $\omega = \omega_c$  rad/amostra é dada por

$$h_{pb}[n] = \frac{\omega_c}{\pi} \delta[n] + \frac{1}{\pi n} \sin[\omega_c n] u[n - 1] + \frac{1}{\pi n} \sin[\omega_c n] u[-n - 1].$$

- Mostre que a resposta impulsiva de um filtro digital passa-altas não-causal com frequência de corte  $\omega = \omega_c$  rad/amostra é dada por

$$h_{pa}[n] = \begin{cases} 1 - \frac{\omega_c}{\pi}, & n = 0 \\ \frac{-1}{\pi n} \sin[\omega_c n] & n \neq 0 \end{cases}$$

- Desenhe a magnitude da resposta em frequência de  $h_{pa}[n]$  no intervalo  $\pi \leq \omega \leq 2\pi$  rad/amostra.

### EXERCÍCIO 8

Considere o filtro FIR do tipo IV com resposta impulsiva dada por

$$h[n] = \sum_{m=0}^5 b_m \delta[n - m].$$

- a) Obtenha a resposta em frequência do filtro na forma  $H(e^{j\omega}) = F(\omega)A(\omega)$ , onde  $F(\omega)$  é o termo de fase e  $A(\omega)$  é um termo real de amplitude.
- b) O filtro dado pode ser um passa-baixas?

## ANEXO

```
% Script de matlab do Exercício 2
clear all; close all
% Expressão algébrica para a DTFT de x[n]: X(e^(jw))=(1+0.9e^(-jw))^(-1)
% A DFT de tamanho N de x[n] é a avaliação de X(e^(jw)) em w=2pi*k/N

N=16; % número de pontos da DFT
k=0:N-1; wk=2*pi*k/N; % intervalo de 0 a 2pi amostrado a cada 2pi/N rad
por amostra.
% DFT pela amostragem da DTFT
X=(1+0.9*exp(-1i.*wk)).^(-1); % Avaliação da X(e^(jw)) em w = wk
x=real(ifft(X,N)); % Obtenção x[n] pela DFT inversa (ou IFFT) de N pontos

% Apresentação dos resultados
figure; stem(k,abs(X), 'linewidth', 2); % Plota X[k]
set(gca,'fontsize',14); xlabel('$k$', 'interpreter', 'latex', 'fontsize', 17);
ylabel('$|X[k]|$', 'interpreter', 'latex', 'fontsize', 17); axis tight

figure; n=0:N-1; stem(n,x,'linewidth', 2)
set(gca,'fontsize',14); xlabel('$n$', 'interpreter', 'latex', 'fontsize', 17);
ylabel('$x[n]$','interpreter', 'latex', 'fontsize', 17);
axis ([-.2 15.2 -1.3 1.3]);
```