

## GA-038 Processamento Digital de Sinais (1.º Período, 2025)

Paulo Esquef (31.12.2024)

Material Complementar: Transformada-z Unilateral e Solução EDs com CAs não-nulas.

### Definição da Transformada-z Unilateral:

$$X^+(z) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Exemplo: Obtenha as TZs bilateral e unilateral de  $x[n] = a^{n+2}u[n+2]$ .

### Solução:

$x[n] = \delta[n+2] * a^n u[n]$  e a sua TZ bilateral é

$$X(z) = z^2 \frac{1}{1 - az^{-1}}, \text{RDC}_X: \{z \in \mathbb{C}, |a| < |z| < \infty\}$$

$$x[n] = \delta[n+2] + a\delta[n+1] + a^{n+2}u[n]$$

Para a TZ **unilateral** as duas primeiras parcelas são desconsideradas, pois o somatório na definição de  $X^+(z)$  é para  $n \geq 0$ . Logo:

$$X^+(z) = a^2 \frac{1}{1 - az^{-1}}, \text{RDC}_{X^+}: \{z \in \mathbb{C}, |z| > |a|\}$$

## Deslocamento temporal e TZ Unilateral:

**Atraso:** Sejam  $x_1[n] = x[n - k]$ , com  $k > 0$  e  $X^+(z)$  a TZ unilateral de  $x[n]$ :

$$\begin{aligned} X_1^+(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x_1[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n - k] z^{-n} \stackrel{l=n-k}{\cong} \sum_{l=-k}^{\infty} x[l] z^{-l-k} = \sum_{l=-k}^{-1} x[l] z^{-l-k} + \sum_{l=0}^{\infty} x[l] z^{-l-k} = \\ &= z^{-k} \left\{ \sum_{l=-k}^{-1} x[l] z^{-l} + \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} x[l] z^{-l}}_{X^+(z)} \right\} = z^{-k} \left\{ \sum_{n=1}^k x[-n] z^n + \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} x[l] z^{-l}}_{X^+(z)} \right\} \end{aligned}$$

**Adiantamento:** Sejam  $x_1[n] = x[n + k]$ , com  $k > 0$  e  $X^+(z)$  a TZ unilateral de  $x[n]$ . Então, mostra-se de modo similar que:

$$X_1^+(z) = z^k \left\{ \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} x[l] z^{-l}}_{X^+(z)} - \sum_{l=0}^{k-1} x[l] z^{-l} \right\}$$

## Solução de EDs com Condições Auxiliares Não-Nulas.

Caso o sistema esteja inicialmente relaxado, i.e., com CAs nulas, basta usar a TZ Bilateral. Caso contrário, usar a TZ Unilateral.

### Exemplo:

Obtenha a solução geral para a ED de segunda ordem  $y[n] = -y[n-1] + 6y[n-2] + x[n]$ , para a entrada particular  $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ , sabendo que as condições auxiliares são  $y[0] = 1$  e  $y[1] = -1$ .

### Solução:

Aplicando a TZ Unilateral à ED temos

$$Y^+(z) = -1 \left\{ z^{-1}Y^+(z) + z^{-1} \sum_{n=1}^1 y[-n]z^n \right\} + 6 \left\{ z^{-2}Y^+(z) + z^{-2} \sum_{n=1}^2 y[-n]z^n \right\} + X^+(z)$$

$$Y^+(z) = -z^{-1}Y^+(z) - y[-1] + 6z^{-2}Y^+(z) + 6y[-1]z^{-1} + 6y[-2] + X^+(z)$$

$$Y^+(z) \underbrace{(1 + z^{-1} - 6z^{-2})}_{A(z)} = \underbrace{1}_{B(z)} X^+(z) + \underbrace{(-y[-1] + 6y[-1]z^{-1} + 6y[-2])}_{N_0(z)}$$

Em geral:

$$Y^+(z) = \frac{B(z)X^+(z)}{A(z)} + \frac{N_0(z)}{A(z)}, \text{ onde } N_0(z) \text{ é um polinômio em } z \text{ que depende das CAs.}$$

Para calcular  $y[-1]$  e  $y[-2]$  usamos a própria ED com as CAs conhecidas:

$$\begin{aligned} y[0] &= 1 = -y[-1] + 6y[-2] + 1 \\ y[1] &= -1 = -y[0] + 6y[-1] + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

E encontramos:  $y[-1] = -1/12$  e  $y[-2] = -1/72$ .

Substituindo os valores de  $y[-1]$  e  $y[-2]$  e  $X^+(z) = 1/\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)$ , com  $\text{RDC}_x : \left\{z \in \mathbb{C}, |z| > \frac{1}{2}\right\}$  na expressão de  $Y^+(z)$  tem-se

$$Y^+(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) \underbrace{(1 + z^{-1} - 6z^{-2})}_{(1-2z^{-1})(1+3z^{-1})}} + \frac{\left(\frac{1}{12} + \frac{6z^{-1}}{12} - \frac{6}{72}\right)}{(1 + z^{-1} - 6z^{-2})}$$

$$Y^+(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) (1 - 2z^{-1})(1 + 3z^{-1})} + \frac{\frac{1}{2}z^{-1} \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) (1 - 2z^{-1})(1 + 3z^{-1})}$$

$$Y^+(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{4}z^{-2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 - 2z^{-1})(1 + 3z^{-1})} \stackrel{\text{Frações Parciais}}{\cong} \frac{A_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - 2z^{-1}} + \frac{A_3}{1 + 3z^{-1}}$$

com  $\text{RDC}_{Y^+}: \{z \in \mathbb{C}, |z| > 3\}$  (sistema causal) e  $A_3 = 0.4143$ ,  $A_2 = 0.6333$  e  $A_1 = -0.0476$ .

Usando a transformada-z inversa por inspeção obtemos, para  $n \geq 0$ :

$$y[n] = A_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + A_2 (2)^n u[n] + A_3 (-3)^n u[n]$$