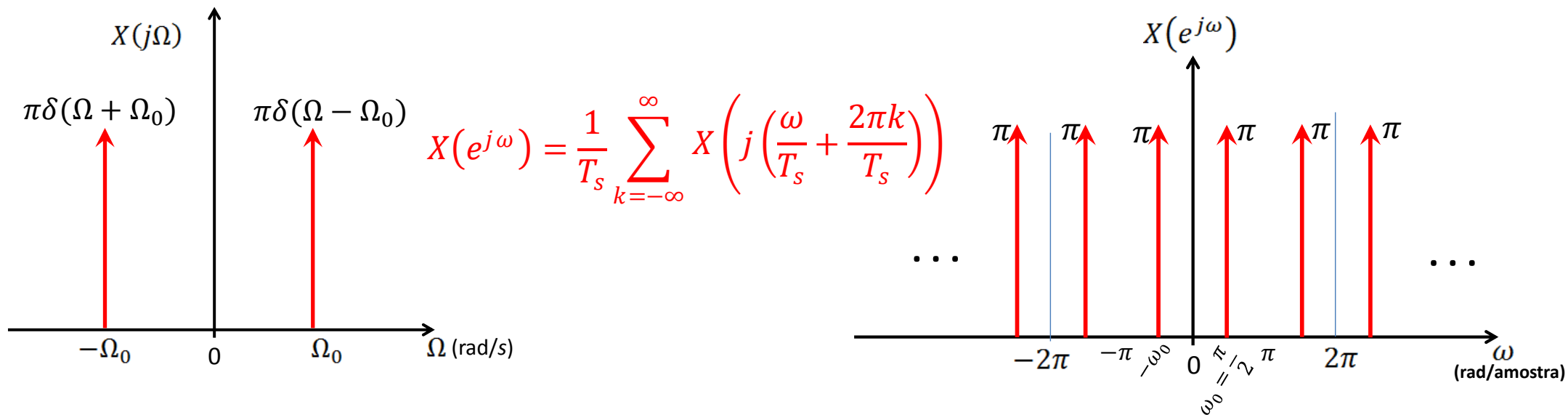


**Caso Particular com sinal senoidal:**  $x(t) = \cos(\Omega_0 t)$

**AMOSTRAGEM:**  $x(t) \rightarrow x[n]$

A amostragem uniforme de  $x(t)$  com período de amostragem  $T_s$  resulta em  $x[n] = x(nT_s)$  com espectro  $X(e^{j\omega})$ . Se o Critério de Nyquist ( $\Omega_s > 2\Omega_0$ ) for observado e, por exemplo, escolhermos  $\Omega_s = 4\Omega_0$ , os espectros serão:



O espectro  $X(e^{j\omega})$  resulta da replicação de  $X(j\Omega)$  com centros em múltiplos inteiros de  $\Omega_s$  e do escalamento frequencial  $\omega = \Omega T_s$ , que faz  $\Omega_s \rightarrow 2\pi$  e também restaura a amplitude original.

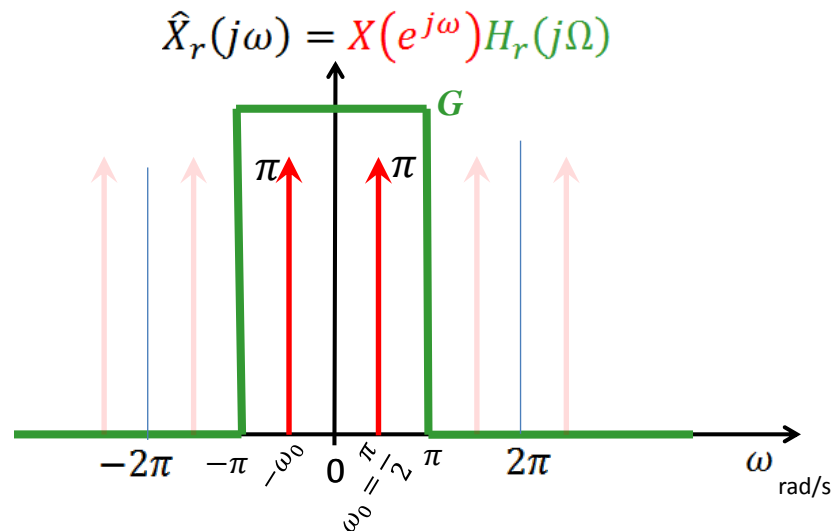
## RECONSTRUÇÃO: $x[n] \rightarrow x_r(t)$

A reconstrução envolve duas etapas:

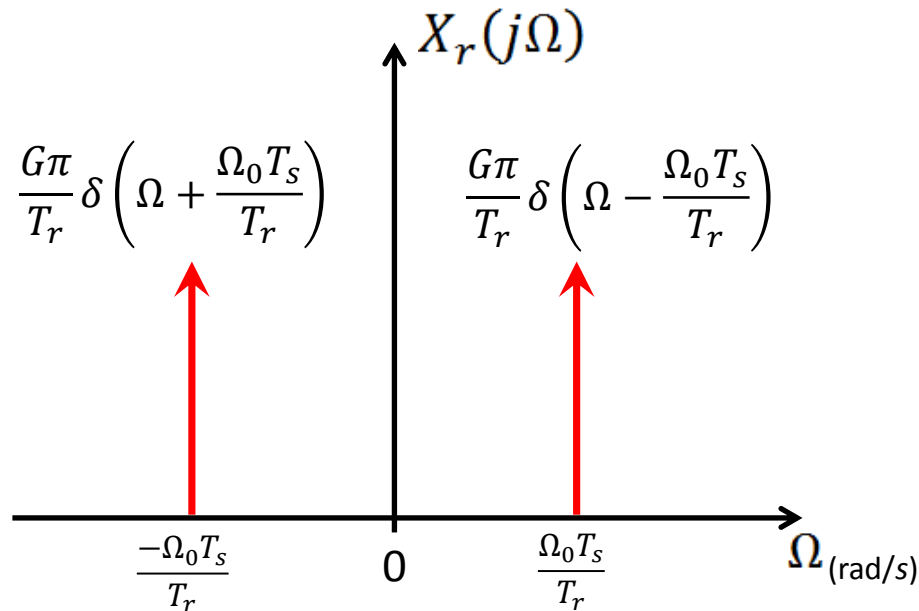
- 1) Seleção frequencial (filtro  $H_r(j\omega)$ )
- 2) Escalamento frequencial ( $\omega = \Omega T_r$ )

Em geral, o período de reconstrução  $T_r$  usado no D/A pode ser diferente do período de amostragem  $T_s$  usado no A/D. A seleção frequencial é realizada multiplicando-se  $X(e^{j\omega})$  pela resposta em frequência de um filtro seletivo (em tempo contínuo) definido como  $H_r(j\omega) = \begin{cases} G & , \text{ se } |\omega| \leq \pi \text{ rad/s} \\ 0 & , \text{ se } |\omega| > \pi \text{ rad/s} \end{cases}$ .

Como o espectro  $\hat{X}_r(j\omega) = X(e^{j\omega})H_r(j\omega) = G\pi\delta(\omega - \omega_0) + G\pi\delta(\omega + \omega_0)$  não é periódico, o sinal resultante já é um sinal em tempo contínuo  $\hat{x}_r(t) = G \cos(\omega_0 t)$ .



O escalamento frequencial é consequência do escalamento temporal feito pelo D/A, em que o intervalo unitário entre as amostras de  $x[n]$  é escalado por  $T_r$ . Logo, na frequência, o escalamento  $\omega = \Omega T_r$  e o espectro do sinal reconstruído é dado por  $X_r(j\Omega) = \hat{X}_r(j\omega)|_{\omega=\Omega T_r} = \hat{X}_r(j\Omega T_r)$ , representado abaixo:



$$\begin{aligned}
 \hat{X}_r(j\omega) &= G\pi\delta(\omega - \omega_0) + G\pi\delta(\omega + \omega_0), \text{ com } \omega_0 = \Omega_0 T_s \\
 X_r(j\Omega) &= \hat{X}_r(j\Omega T_r) = G\pi\delta(\Omega T_r - \omega_0) + G\pi\delta(\Omega T_r + \omega_0) \\
 &= G\pi\delta(\Omega T_r - \Omega_0 T_s) + G\pi\delta(\Omega T_r + \Omega_0 T_s) \\
 &= G\pi\delta\left(\Omega T_r - \frac{\Omega_0 T_s T_r}{T_r}\right) + G\pi\delta\left(\Omega T_r + \frac{\Omega_0 T_s T_r}{T_r}\right) \\
 &= G\pi\delta\left(T_r \left(\Omega - \frac{\Omega_0 T_s}{T_r}\right)\right) + G\pi\delta\left(T_r \left(\Omega + \frac{\Omega_0 T_s}{T_r}\right)\right) \\
 &= \frac{G\pi}{T_r} \delta\left(\Omega - \frac{\Omega_0 T_s}{T_r}\right) + \frac{G\pi}{T_r} \delta\left(\Omega + \frac{\Omega_0 T_s}{T_r}\right)
 \end{aligned}$$

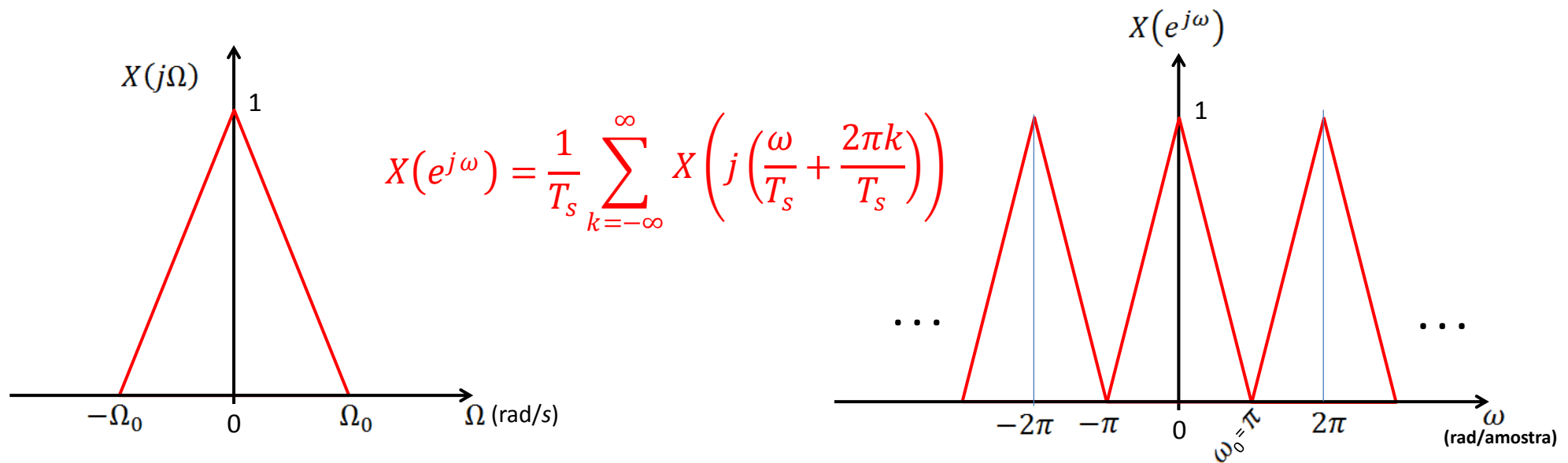
Caso se queira fazer  $x_r(t) = x(t)$ . i.e., para  $X_r(j\Omega) = X(j\Omega)$  basta que  $T_r = T_s$  e que  $G = T_s$ .

LEMBRETES:  $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$  e, se  $f(t) \xleftrightarrow{\text{CTFT}} F(j\Omega)$ , então  $f(at) \xleftrightarrow{\text{CTFT}} \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\Omega}{a}\right)$ , para  $a \neq 0$  real.

**Caso Geral:** sinal  $x(t) \in \mathbb{R}$  limitado em banda e espectro  $X(j\Omega) = 0, |\Omega| \geq \Omega_0$ .

**AMOSTRAGEM:**  $x(t) \rightarrow x[n]$

A amostragem uniforme de  $x(t)$  com período de amostragem  $T_s$  resulta em  $x[n] = x(nT_s)$  com espectro  $X(e^{j\omega})$ . Se o critério de Nyquist ( $\Omega_s \geq 2\Omega_0$ ) for observado e escolhermos  $\Omega_s = 2\Omega_0$ , os espectros serão:



Note que o espectro  $X(e^{j\omega})$  resulta da replicação de  $X(j\Omega)$  com centros em múltiplos inteiros de  $\Omega_s$  e do escalamento frequencial  $\omega = \Omega T_s$ , que faz  $\Omega_s \rightarrow 2\pi$  e também restaura a amplitude original.

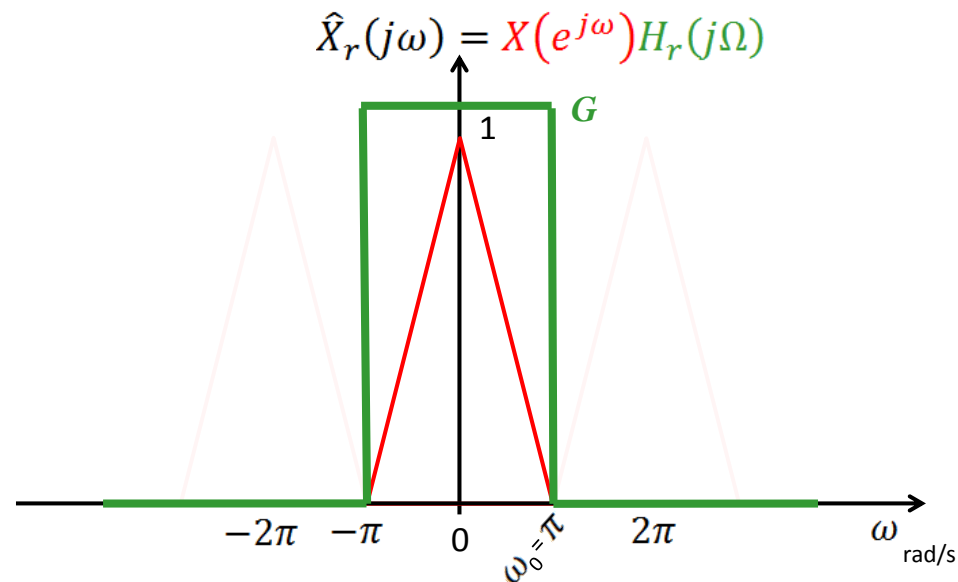
## RECONSTRUÇÃO: $x[n] \rightarrow x_r(t)$

A reconstrução envolve duas etapas:

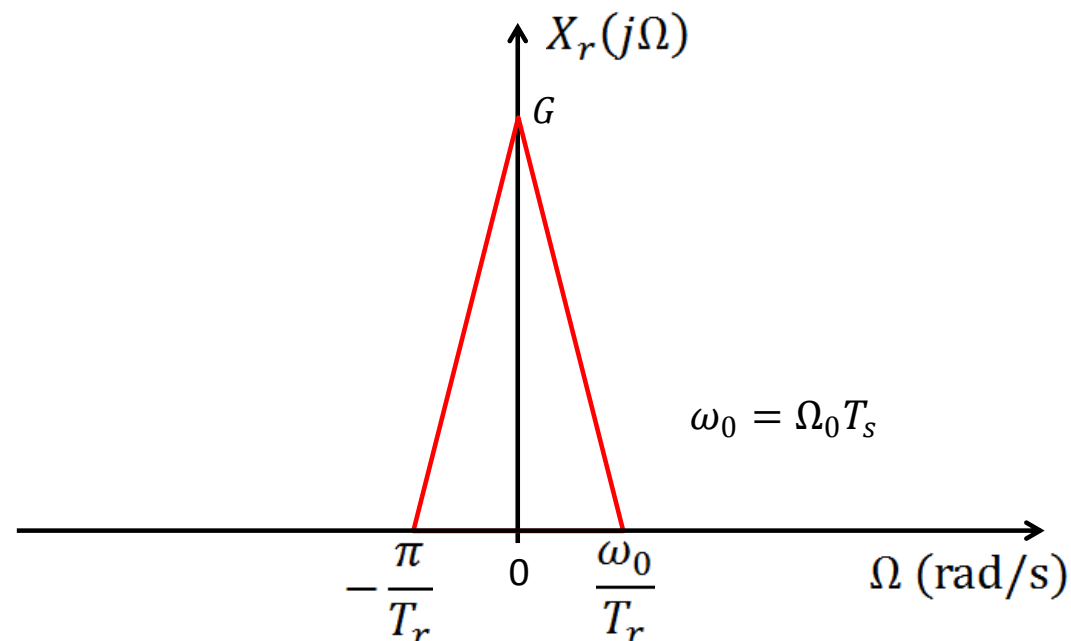
- 1) Seleção frequencial (filtro  $H_r(j\omega)$ )
- 2) Escalamento frequencial ( $\omega = \Omega T_r$ )

Em geral, o período de reconstrução  $T_r$  usado no D/A pode ser diferente do período de amostragem  $T_s$  usado no A/D. A seleção frequencial é realizada multiplicando-se  $X(e^{j\omega})$  pela resposta em frequência de um filtro seletivo (em tempo contínuo) definido como  $H_r(j\omega) = \begin{cases} G & , \text{ se } |\omega| \leq \pi \text{ rad/s} \\ 0 & , \text{ se } |\omega| > \pi \text{ rad/s} \end{cases}$ .

Como o espectro  $\hat{X}_r(j\omega) = X(e^{j\omega})H_r(j\omega)$  não é periódico, o sinal resultante já é um sinal em tempo contínuo  $\hat{x}_r(t)$ . **Note que  $\hat{X}_r(j\omega) = GX(e^{j\omega})|_{k=0}$ .**



O escalamento frequencial é consequência do escalamento temporal feito pelo D/A, em que o intervalo unitário entre as amostras de  $x[n]$  é multiplicado por  $T_r$ . Logo, na frequência, o escalamento é  $\Omega = \omega/T_r$  ou  $\omega = \Omega T_r$  e o espectro do sinal reconstruído é dado por  $X_r(j\Omega) = \hat{X}_r(j\omega)|_{\omega=\Omega T_r} = \hat{X}_r(j\Omega T_r)$ , representado abaixo:



Caso se queira fazer  $x_r(t) = x(t)$ , basta lembrar que a seleção espectral implica fazer  $k = 0$  na expressão que relaciona  $X(e^{j\omega})$  e  $X(j\Omega)$ . Logo,  $\hat{X}_r(j\omega) = \frac{G}{T_s} X\left(j\frac{\omega}{T_s}\right)$ . Já o escalamento frequencial produz  $X_r(j\Omega) = \hat{X}_r(j\Omega T_r) = \frac{G}{T_s} X\left(j\frac{\Omega T_r}{T_s}\right)$ . Para  $X_r(j\Omega) = X(j\Omega)$  basta que  $T_r = T_s$  e que  $G = T_s$ .

EM SUMA:

$x(t) \in \mathbb{R}$  limitado em banda (frequência positiva máxima  $\Omega = \Omega_c$  rad/s)

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{CTFT}} X(j\Omega)$$

Amostragem (A/D) sem *aliasing* de  $x(t)$  com período  $T_s < \frac{\pi}{\Omega_c}$ :

$$x[n] = x(nT_s) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\left(\frac{\omega}{T_s} + \frac{2\pi k}{T_s}\right)\right)$$

Sem bloco de DSP ( $y[n] = x[n]$ ) e reconstrução de  $x_r(t)$  a partir de  $x[n]$ , através de um D/A com período de reconstrução  $T_r$ :

$$X_r(j\Omega) = GX(e^{j\omega})|_{k=0 \text{ e } \omega=\Omega T_r} = \frac{G}{T_s} X\left(j\left(\frac{\Omega T_r}{T_s}\right)\right)$$

Para  $X_r(j\Omega) = X(j\Omega)$ , força-se  $T_r = T_s$  e  $G = T_s$ .

Caso haja um bloco de DSP na cadeia de processamento  $y[n] = T\{x[n]\}$ , é necessário relacionar  $Y(e^{j\omega})$  com  $X(e^{j\omega})$  antes de proceder à reconstrução de  $y_r(t)$  a partir de  $y[n]$ . Caso a questão seja implementar via um sistema discreto o sistema em tempo contínuo  $y(t) = T\{x(t)\}$ , há que se relacionar  $X(j\Omega)$  com  $Y(j\Omega)$  e este com  $Y_r(j\Omega)$ , passando pelas relações intermediárias com  $X(e^{j\omega})$  e  $Y(e^{j\omega})$ .