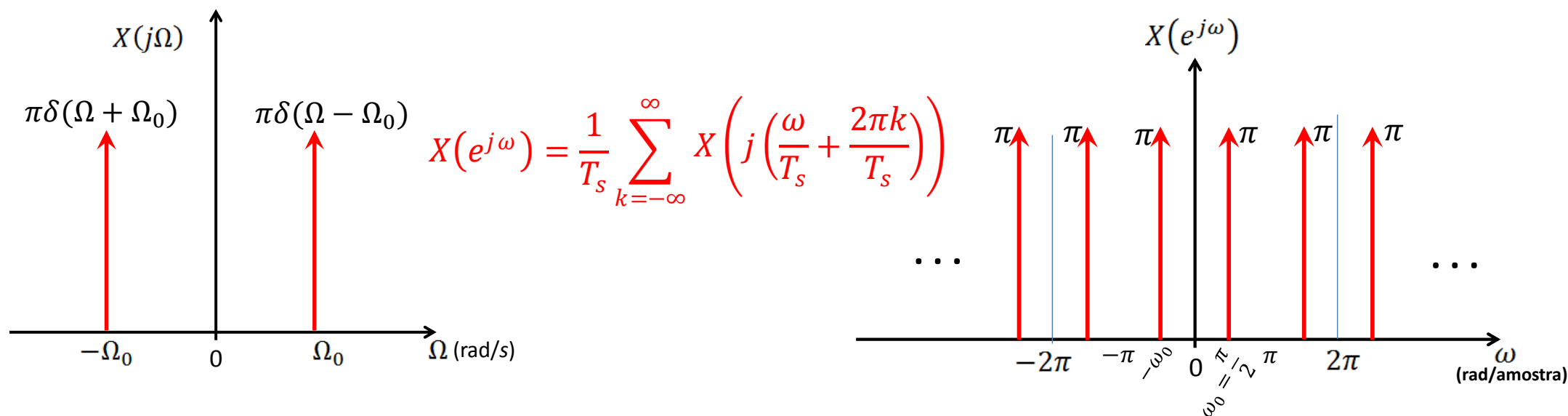


Caso Particular com sinal senoidal: $x(t) = \cos(\Omega_0 t)$

AMOSTRAGEM: $x(t) \rightarrow x[n]$

A amostragem uniforme de $x(t)$ com período de amostragem T_s resulta em $x[n] = x(nT_s)$ com espectro $X(e^{j\omega})$. Se o Critério de Nyquist ($\Omega_s > 2\Omega_0$) for observado e, por exemplo, escolhermos $\Omega_s = 4\Omega_0$, os espectros serão:



O espectro $X(e^{j\omega})$ resulta da replicação de $X(j\Omega)$ com centros em múltiplos inteiros de Ω_s e do escalamento frequencial $\omega = \Omega T_s$, que faz $\Omega_s \rightarrow 2\pi$ e também restaura a amplitude original.

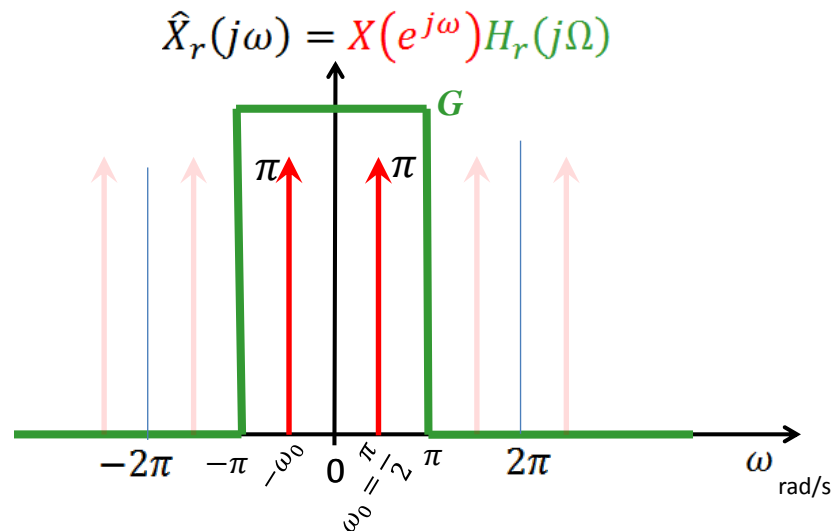
RECONSTRUÇÃO: $x[n] \rightarrow x_r(t)$

A reconstrução envolve duas etapas:

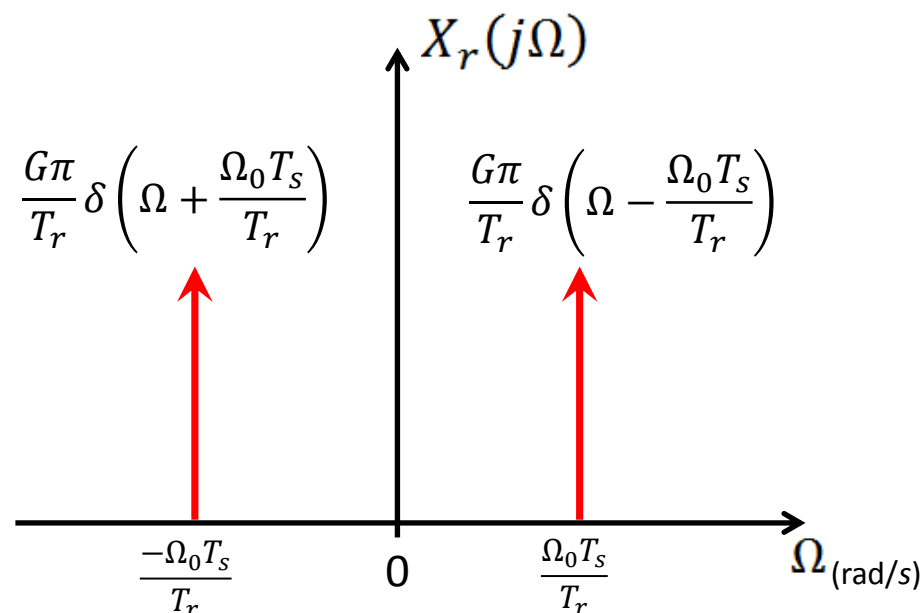
- 1) Seleção frequencial (filtro $H_r(j\omega)$)
- 2) Escalamento frequencial ($\omega = \Omega T_r$)

Em geral, o período de reconstrução T_r usado no D/A pode ser diferente do período de amostragem T_s usado no A/D. A seleção frequencial é realizada multiplicando-se $X(e^{j\omega})$ pela resposta em frequência de um filtro seletivo (em tempo contínuo) definido como $H_r(j\omega) = \begin{cases} G & , \text{ se } |\omega| \leq \pi \text{ rad/s} \\ 0 & , \text{ se } |\omega| > \pi \text{ rad/s} \end{cases}$.

Como o espectro $\hat{X}_r(j\omega) = X(e^{j\omega})H_r(j\omega) = G\pi\delta(\omega - \omega_0) + G\pi\delta(\omega + \omega_0)$ não é periódico, o sinal resultante já é um sinal em tempo contínuo $\hat{x}_r(t) = G \cos(\omega_0 t)$.



O escalamento frequencial é consequência do escalamento temporal feito pelo D/A, em que o intervalo unitário entre as amostras de $x[n]$ é escalado por T_r . Logo, na frequência, o escalamento $\omega = \Omega T_r$ e o espectro do sinal reconstruído é dado por $X_r(j\Omega) = \hat{X}_r(j\omega)|_{\omega=\Omega T_r} = \hat{X}_r(j\Omega T_r)$, representado abaixo:



$$\begin{aligned}
 \hat{X}_r(j\omega) &= G\pi\delta(\omega - \omega_0) + G\pi\delta(\omega + \omega_0), \text{ com } \omega_0 = \Omega_0 T_s \\
 X_r(j\Omega) &= \hat{X}_r(j\Omega T_r) = G\pi\delta(\Omega T_r - \omega_0) + G\pi\delta(\Omega T_r + \omega_0) \\
 &= G\pi\delta(\Omega T_r - \Omega_0 T_s) + G\pi\delta(\Omega T_r + \Omega_0 T_s) \\
 &= G\pi\delta\left(\Omega T_r - \frac{\Omega_0 T_s T_r}{T_r}\right) + G\pi\delta\left(\Omega T_r + \frac{\Omega_0 T_s T_r}{T_r}\right) \\
 &= G\pi\delta\left(T_r \left(\Omega - \frac{\Omega_0 T_s}{T_r}\right)\right) + G\pi\delta\left(T_r \left(\Omega + \frac{\Omega_0 T_s}{T_r}\right)\right) \\
 &= \frac{G\pi}{T_r} \delta\left(\Omega - \frac{\Omega_0 T_s}{T_r}\right) + \frac{G\pi}{T_r} \delta\left(\Omega + \frac{\Omega_0 T_s}{T_r}\right)
 \end{aligned}$$

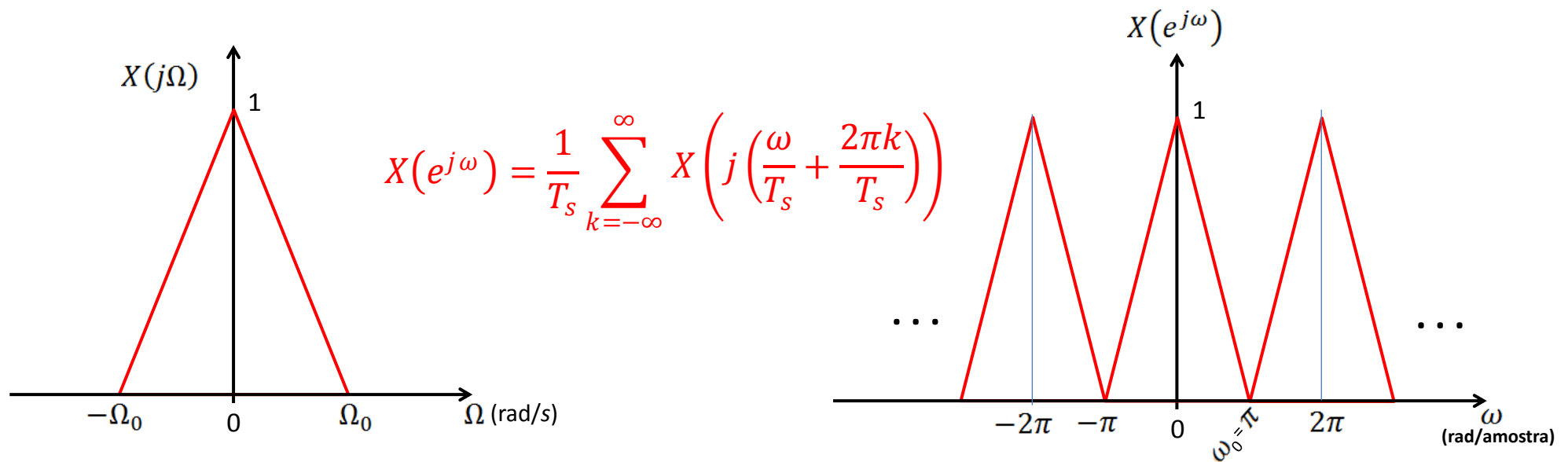
Caso se queira fazer $x_r(t) = x(t)$. i.e., para $X_r(j\Omega) = X(j\Omega)$ basta que $T_r = T_s$ e que $G = T_s$.

LEMBRETES: $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$ e, se $f(t) \xleftrightarrow{\text{CTFT}} F(j\Omega)$, então $f(at) \xleftrightarrow{\text{CTFT}} \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\Omega}{a}\right)$, para $a \neq 0$ real.

Caso Geral: sinal $x(t) \in \mathbb{R}$ limitado em banda e espectro $X(j\Omega) = 0, |\Omega| \geq \Omega_0$.

AMOSTRAGEM: $x(t) \rightarrow x[n]$

A amostragem uniforme de $x(t)$ com período de amostragem T_s resulta em $x[n] = x(nT_s)$ com espectro $X(e^{j\omega})$. Se o critério de Nyquist ($\Omega_s \geq 2\Omega_0$) for observado e escolhermos $\Omega_s = 2\Omega_0$, os espectros serão:



Note que o espectro $X(e^{j\omega})$ resulta da replicação de $X(j\Omega)$ com centros em múltiplos inteiros de Ω_s e do escalamento frequencial $\omega = \Omega T_s$, que faz $\Omega_s \rightarrow 2\pi$ e também restaura a amplitude original.

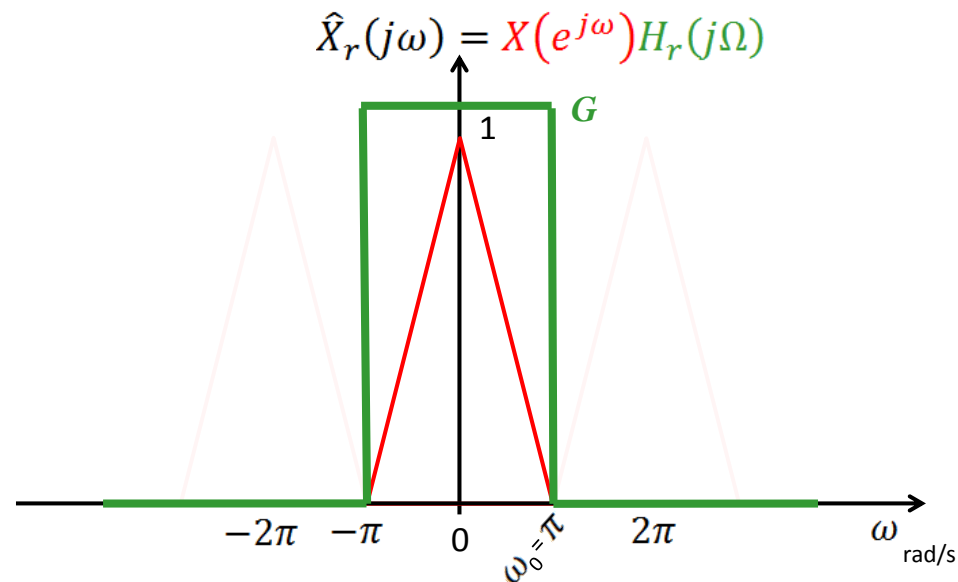
RECONSTRUÇÃO: $x[n] \rightarrow x_r(t)$

A reconstrução envolve duas etapas:

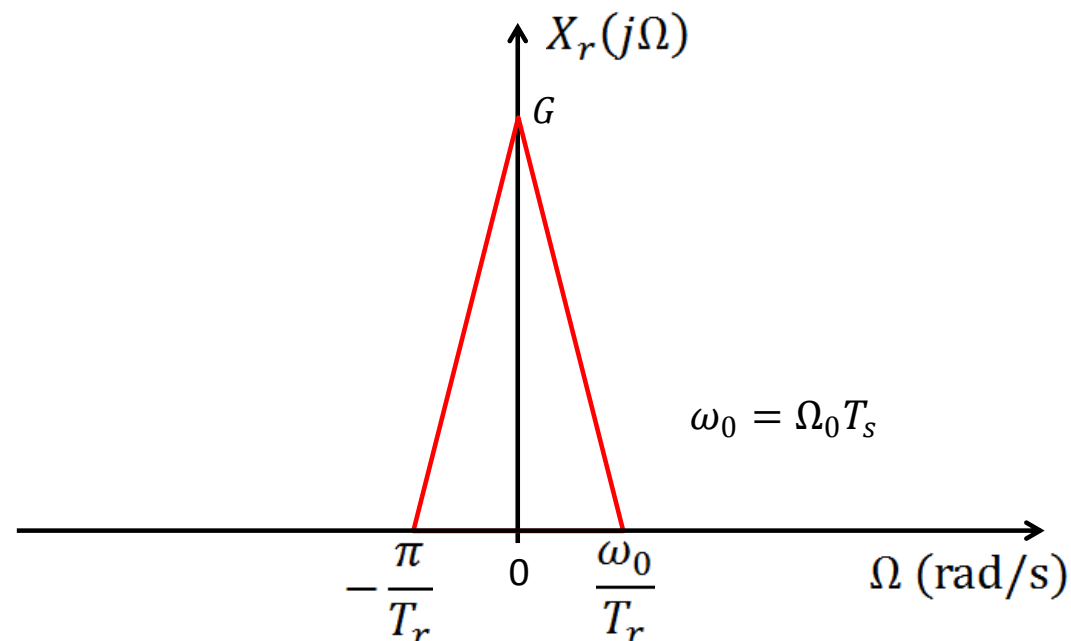
- 1) Seleção frequencial (filtro $H_r(j\omega)$)
- 2) Escalamento frequencial ($\omega = \Omega T_r$)

Em geral, o período de reconstrução T_r usado no D/A pode ser diferente do período de amostragem T_s usado no A/D. A seleção frequencial é realizada multiplicando-se $X(e^{j\omega})$ pela resposta em frequência de um filtro seletivo (em tempo contínuo) definido como $H_r(j\omega) = \begin{cases} G & , \text{ se } |\omega| \leq \pi \text{ rad/s} \\ 0 & , \text{ se } |\omega| > \pi \text{ rad/s} \end{cases}$.

Como o espectro $\hat{X}_r(j\omega) = X(e^{j\omega})H_r(j\omega)$ não é periódico, o sinal resultante já é um sinal em tempo contínuo $\hat{x}_r(t)$. **Note que $\hat{X}_r(j\omega) = GX(e^{j\omega})|_{k=0}$.**



O escalamento frequencial é consequência do escalamento temporal feito pelo D/A, em que o intervalo unitário entre as amostras de $x[n]$ é multiplicado por T_r . Logo, na frequência, o escalamento é $\Omega = \omega/T_r$ ou $\omega = \Omega T_r$ e o espectro do sinal reconstruído é dado por $X_r(j\Omega) = \hat{X}_r(j\omega)|_{\omega=\Omega T_r} = \hat{X}_r(j\Omega T_r)$, representado abaixo:



Caso se queira fazer $x_r(t) = x(t)$, basta lembrar que a seleção espectral implica fazer $k = 0$ na expressão que relaciona $X(e^{j\omega})$ e $X(j\Omega)$. Logo, $\hat{X}_r(j\omega) = \frac{G}{T_s} X\left(j\frac{\omega}{T_s}\right)$. Já o escalamento frequencial produz $X_r(j\Omega) = \hat{X}_r(j\Omega T_r) = \frac{G}{T_s} X\left(j\frac{\Omega T_r}{T_s}\right)$. Para $X_r(j\Omega) = X(j\Omega)$ basta que $T_r = T_s$ e que $G = T_s$.

EM SUMA:

$x(t) \in \mathbb{R}$ limitado em banda (frequência positiva máxima $\Omega = \Omega_c$ rad/s)

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{CTFT}} X(j\Omega)$$

Amostragem (A/D) sem *aliasing* de $x(t)$ com período $T_s < \frac{\pi}{\Omega_c}$:

$$x[n] = x(nT_s) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\left(\frac{\omega}{T_s} + \frac{2\pi k}{T_s}\right)\right)$$

Sem bloco de DSP ($y[n] = x[n]$) e reconstrução de $x_r(t)$ a partir de $x[n]$, através de um D/A com período de reconstrução T_r :

$$X_r(j\Omega) = GX(e^{j\omega})|_{k=0 \text{ e } \omega=\Omega T_r} = \frac{G}{T_s} X\left(j\left(\frac{\Omega T_r}{T_s}\right)\right)$$

Para $X_r(j\Omega) = X(j\Omega)$, força-se $T_r = T_s$ e $G = T_s$.

Caso haja um bloco de DSP na cadeia de processamento $y[n] = T\{x[n]\}$, é necessário relacionar $Y(e^{j\omega})$ com $X(e^{j\omega})$ antes de proceder à reconstrução de $y_r(t)$ a partir de $y[n]$. Caso a questão seja implementar via um sistema discreto o sistema em tempo contínuo $y(t) = T\{x(t)\}$, há que se relacionar $X(j\Omega)$ com $Y(j\Omega)$ e este com $Y_r(j\Omega)$, passando pelas relações intermediárias com $X(e^{j\omega})$ e $Y(e^{j\omega})$.