

## PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

GA-032 Sistemas Lineares 4P25 – Oitava Lista de Exercícios

Notação:  $t \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  (vetor de estados)

$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  (vetor de entrada)

$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$  (vetor de saída)

$n$ : ordem do sistema

### EXERCÍCIO 1

Considere o SLIT SISO causal a tempo discreto com equação de estado abaixo:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_i u(k), \quad \mathbf{x}(0) \neq 0, \quad k \geq 0$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Determine os auto-valores da matriz  $\mathbf{A}$  e suas respectivas multiplicidades algébrica e geométrica.
- Para cada  $\mathbf{B}_i$  dado, determine se o SLIT é completamente controlável.
- Para cada  $\mathbf{B}_i$  tal que o SLIT seja completamente controlável, encontre a entrada  $u(k)$  mais curta que leve o estado à origem, a partir de  $\mathbf{x}(0) = [2 \ 1]^\top$ .
- Verifique experimentalmente o resultado do item (c), através de uma simulação computacional.

### EXERCÍCIO 2

Considere o SLIT MIMO causal, a tempo contínuo ou discreto, com REE tal que a matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  está na forma normal de Jordan e tem auto-valor  $\lambda$  de multiplicidade algébrica  $n$  e multiplicidade geométrica igual a 1. No mais a matriz  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  tem linhas  $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ , com

$i = 1, 2, \dots, n$ , i.e.,  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{bmatrix}$ . Mostre o SLIT é completamente controlável se, e somente se  $\mathbf{b}_n \neq 0$ .

### EXERCÍCIO 3

Generalize o resultado do exercício 2 para uma matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  na forma normal de Jordan, com auto-valor  $\lambda$  de multiplicidade algébrica  $n$  e multiplicidade geométrica 2, i.e.,  $\mathbf{A}$  é bloco diagonal com dois blocos de Jordan, em particular, um de dimensão  $q$  e outro de dimensão  $n - q$ . Mostre o SLIT é completamente controlável se, e somente se  $\mathbf{b}_q$  e  $\mathbf{b}_{n-q}$  são não nulos e linearmente independentes.

### EXERCÍCIO 4

Considere o SLIT MIMO causal, a tempo discreto, com equação de estado abaixo:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k)$$

- Determine quais são e as correspondentes multiplicidades algébrica e geométrica dos autovalores da matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$ .
- O SLIT é completamente controlável?
- Desenhe um diagrama de fluxo de uma implementação do SLIT MIMO que corresponda à REE dada. Considere que a saída do SLIT é  $\mathbf{x}(k)$ .
- Determine os pontos de equilíbrio do SLIT homogêneo.
- O SLIT homogêneo é marginalmente estável?

### EXERCÍCIO 5

Considere o SLIT MIMO causal, a tempo contínuo, com equação de estado abaixo, onde  $b_{ij}$  são reais não-nulos:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \\ b_{51} & b_{52} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

- Determine quais são e as correspondentes multiplicidades algébrica e geométrica dos autovalores da matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ .
- O SLIT é completamente controlável?

## EXERCÍCIO 6

Considere o SLIT SISO causal, a tempo discreto, com equação de estado abaixo, onde  $b_i$ ,  $\lambda_1, \alpha, \beta, \gamma$  e  $\sigma$  são reais não-nulos. Ademais,  $\alpha \neq \gamma$  e  $\beta \neq \sigma$ :

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & \sigma \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma & \gamma \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k)$$

- a) Determine quais são e as correspondentes multiplicidades algébrica e geométrica dos autovalores da matriz  $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ .
- b) Mostre que o SLIT é completamente controlável se, e somente se, as três condições abaixo forem simultaneamente atendidas:
  - i.  $b_1 \neq 0$
  - ii.  $b_2$  ou  $b_3$  forem não-nulos
  - iii.  $b_4$  ou  $b_5$  forem não-nulos