# GA-026: Algoritmos I


Prof. Luiz Gadelha

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, P4/2019
Laboratório Nacional de Computação Científica


23 de outubro de 2019

# Relações de Recorrência - Método da Substituição

- Propondo boas soluções:
  - Não há regra geral (mesmo com o Teorema Mestre).
  - Árvores de recursão (p.ex. usadas no Mergesort e Quicksort).
  - Usar soluções conhecidas para equações similares.
  - Propor solução mais fraca e ir ajustando ($n^3 > n^2 > n \lg n > n > \lg n$).

Laboratório Nacional de Computação Científica

- **Exemplo.** $T(n) = T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + 1$
    - Solução proposta: $T(n) = O(n)$.
    - $T(n) \leq cn$.
    - Passo indutivo:
        - $T(n) \leq c\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + c\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 = cn + 1 (\neq cn)$
        - Precisamos mostrar a expressão exata da hipótese!
    - $T(n) \leq cn - d$
        - $T(n) \leq (c\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - d) + (c\lceil \frac{n}{2} \rceil - d) + 1 = cn - 2d + 1$
          $\leq cn - d (d \geq 1)$

- Uma desvantagem do método da substituição é a necessidade ter uma estimativa da solução.
- Com árvores recursivas, cada nó representa o custo de um único subproblema no conjunto de chamadas recursivas.
- A soma dos custos em cada nível da árvore corresponde ao custo total no nível de recursão.
- A soma dos custos de todos os níveis é o custo total da recursão.

# Relações de Recorrência - Teorema Mestre

- **Teorema Mestre**. Sejam $a \geq 1$ e $b > 1$ constantes, $f(n)$ função, e $T(n)$ definida para inteiros não-negativos dada pela recorrência:

$$T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n),$$

onde $\frac{n}{b}$ é interpretada como $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$ ou $\lceil \frac{n}{b} \rceil$. $T(n)$ tem os seguintes limites assintóticos:

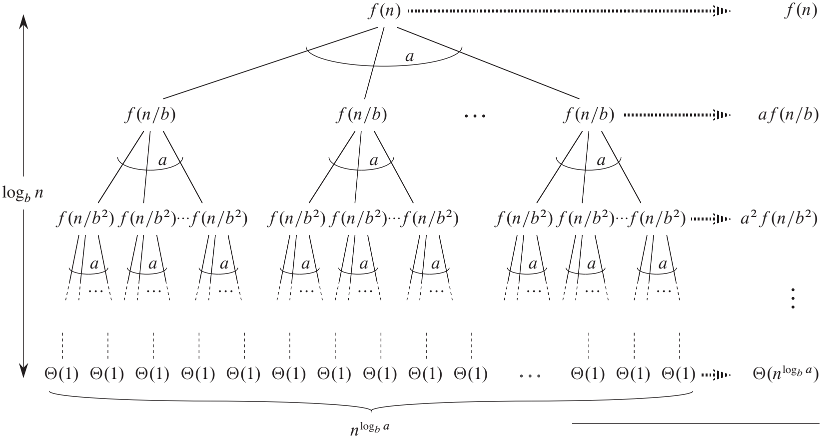
1. $\exists \epsilon > 0 : f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon}) \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
2. $f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$
3. $\exists c < 1, \exists n_0 : \forall n > n_0, af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$,
   $\exists \epsilon > 0 : f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon}) \Rightarrow T(n) = \Theta(f(n))$

- **Demonstração**. Vamos mostrar um caso especial onde $T(n)$ é definida em potências de $b$.

  O primeiro passo é construir a árvore de recursão para a equação de recorrência:

$$T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n),$$

# Relações de Recorrência - Teorema Mestre




$$\text{Total: } \Theta(n^{\log_b a}) + \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j f(n/b^j)$$

Fonte: Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., Stein, C. (2009). Introduction to Algorithms. MIT Press.

- Assim temos que:

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + \sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f(\frac{n}{b^j})$$

Podemos analisar inicialmente a soma:

$$g(n) = \sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f(\frac{n}{b^j})$$

considerando três casos:

1. $f(n) = O(n^{\log_b a-\epsilon})$ para algum $\epsilon > 0$.
2. $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.
3. $af(n/b) \leq cf(n)$ para alguma constante $c < 1$ e $n$ suficientemente grande.

1. $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ para algum $\epsilon > 0$.

$$\Rightarrow f(\frac{n}{b^j}) = O((\frac{n}{b^j})^{\log_b a - \epsilon}) \Rightarrow g(n) = O\left(\sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j (\frac{n}{b^j})^{\log_b a - \epsilon}\right)$$

$$\sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j (\frac{n}{b^j})^{\log_b a - \epsilon} = n^{\log_b a - \epsilon} \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j \frac{1}{b^{j(\log_b a - \epsilon)}}$$

$$= n^{\log_b a - \epsilon} \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j \left(\frac{b^\epsilon}{b^{\log_b a}}\right)^j = n^{\log_b a - \epsilon} \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} \left(\frac{ab^\epsilon}{a}\right)^j$$

$$= n^{\log_b a - \epsilon} \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} (b^\epsilon)^j = n^{\log_b a - \epsilon} \left(\frac{b^{\epsilon \log_b n} - 1}{b^\epsilon - 1}\right)$$

$$= n^{\log_b a - \epsilon} \left(\frac{n^\epsilon - 1}{b^\epsilon - 1}\right) = \frac{1}{b^\epsilon - 1} \left(n^{\log_b a} - n^{\log_b a - \epsilon}\right) = \Theta(n^{log_b a})$$

# Relações de Recorrência - Teorema Mestre

1. $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ para algum $\epsilon > 0$.

$$= n^{\log_b a - \epsilon} \left( \frac{n^{\epsilon} - 1}{b^{\epsilon} - 1} \right) = \frac{1}{b^{\epsilon} - 1} \left( n^{\log_b a} - n^{\log_b a - \epsilon} \right) = \Theta(n^{log_b a})$$

$$g(n) = O \left( \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j (\frac{n}{b^j})^{\log_b a - \epsilon} \right)$$

$$\Rightarrow g(n) = O(\Theta(n^{\log_b a})) = O(n^{\log_b a})$$

Laboratório Nacional de Computação Científica

# Relações de Recorrência - Teorema Mestre

2. $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.

$$\Rightarrow f(\frac{n}{b^j}) = \Theta((\frac{n}{b^j})^{\log_b a})$$

$$g(n) = \sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f(\frac{n}{b^j}) = \Theta\left(\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j (\frac{n}{b^j})^{\log_b a}\right)$$

$$\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j (\frac{n}{b^j})^{\log_b a} = n^{\log_b a} \sum_{j=0}^{\log_b n-1} \left(\frac{a}{b^{log_b a}}\right) = n^{\log_b a} \sum_{j=0}^{\log_b n-1} 1$$

$$= n^{\log_b a} log_b n$$

$$\Rightarrow g(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log_b n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$$

3. $af(n/b) \leq cf(n)$ para alguma constante $c < 1$ e $n$ suficientemente grande.

$$g(n) = \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j f(\frac{n}{b^j}) = \Omega(f(n))$$

$$af(n/b) \leq cf(n) \Rightarrow f(n/b) \leq (c/a)f(n) \Rightarrow f(n/b^j) \leq (c/a)^j f(n)$$

$$\Rightarrow a^j f(n/b^j) \leq c^j f(n)$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j f(\frac{n}{b^j}) \leq \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} c^j f(n) \leq f(n) \sum_{j=0}^{\infty} c^j$$

$$= f(n) \frac{1}{1-c} = O(f(n))$$

$$\Rightarrow g(n) = \Theta(f(n))$$

- Para:

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j f(\frac{n}{b^j})$$

E:

$$g(n) = \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j f(\frac{n}{b^j})$$

considerando três casos:

1. $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ para algum $\epsilon > 0 \Rightarrow g(n) = O(n^{\log_b a})$.
2. $f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) \Rightarrow g(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$.
3. $af(n/b) \leq cf(n)$ para alguma constante $c < 1$ e $n$ suficientemente grande $\Rightarrow g(n) = \Theta(f(n))$.

# Relações de Recorrência - Teorema Mestre

- Para:

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + g(n)$$

onde:

$$g(n) = \sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f(\frac{n}{b^j})$$

1. $f(n) = O(n^{\log_b a-\epsilon})$ para algum $\epsilon > 0 \Rightarrow g(n) = O(n^{\log_b a})$.

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + O(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{\log_b a})$$

2. $f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) \Rightarrow g(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$.

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + \Theta(n^{\log_b a} \lg n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$$

# Relações de Recorrência - Teorema Mestre

- Para:

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + g(n)$$

onde:

$$g(n) = \sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f(\frac{n}{b^j})$$

3. $af(n/b) \leq cf(n)$ para alguma constante $c < 1$ e $n$ suficientemente grande $\Rightarrow g(n) = \Theta(f(n))$. Suponha que $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\epsilon})$ para algum $\epsilon > 0$:

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + \Theta(f(n)) = \Theta(f(n))$$

Laboratório Nacional de Computação Científica