Apêndice A

Programação Dinâmica no Contínuo

Seguindo a descrição apresentada em (Dreyfus, 1965), consideremos o problema de encontrar a curva $w = w(z)$, satisfazendo $w(z_0) = w_0$ e $w(z_1) = w_1$, e que minimiza um funcional $J[w]$ do tipo:

$$J[w] = \int_{z_0}^{z_1} F(z, w, w')\, dz, \tag{A.1}$$

onde:

$$w' = \frac{dw}{dz}. \tag{A.2}$$

Consideremos como ponto inicial da curva um ponto (x, y), onde $x \leq z_1$ em vez do ponto inicial (z_0, w_0). O problema torna-se então encontrar a curva admissível $w = w(z)$, $x \leq z \leq z_1$, com $w(x) = y$ e $w(z_1) = w_1$, a qual minimiza o funcional:

$$J[w] = \int_{x}^{z_1} F(z, w, w')\, dz. \tag{A.3}$$

Introduzimos agora uma função auxiliar, chamada *função de valor ótimo*, através da definição:

$$S(x, y) = \min_{P} \left[\int_{x}^{z_1} F(z, w, w')\, dz \right], \tag{A.4}$$

onde P é o conjunto que contém as curvas admissíveis, saindo do ponto inicial (x, y) e satisfazendo a condição $w(z_1) = w_1$.

Supondo agora $x < z_1$, tomemos inicialmente um pequeno incremento Δz tal que $x + \Delta z \leq z_1$. Assim, a integral em (A.4) toma a forma:

$$S\left(x,y\right)=\underset{P}{min}\left[\int_{x}^{x+\Delta z}F\left(z,w,w'\right)dz+\int_{x+\Delta z}^{z_1}F\left(z,w,w'\right)dz\right],\tag{A.5}$$

Nós, então, consideramos dentre as curvas admissíveis apenas aquelas passando por (x, y), assumindo valor arbitrário em $x + \Delta z$, mas que são ótimas no intervalo $[x + \Delta z, z_1]$; isto é, montamos agora o novo problema:

$$S_{new}\left(x,y\right)=\underset{P}{min}\left[\int_{x}^{x+\Delta z}F\left(z,w,w'\right)dz+S\left(x+\Delta z,w\left(x+\Delta z\right)\right)\right],\tag{A.6}$$

Vamos supor válido o *Princípio de Otimalidade* (Dreyfus, 1965):

O caminho ótimo entre dois pontos é também ótimo entre quaisquer dois outros pontos sobre o mesmo .

Por este princípio podemos igualar (A.5) and (A.6):

$$S\left(x,y\right)=S_{new}\left(x,y\right),\tag{A.7}$$

obtendo assim a expressão básica desta seção (Dreyfus, 1965):

$$S\left(x,y\right)=\underset{P}{min}\left[\int_{x}^{x+\Delta z}F\left(z,w,w'\right)dz+S\left(x+\Delta z,w\left(x+\Delta z\right)\right)\right],\tag{A.8}$$

Façamos agora aproximações de primeira ordem com a finalidade de obter uma forma diferencial para a expressão (A.8). Para isto, vamos primeiramente supor que w' é contínua no intervalo $[x, x + \Delta z]$, e que F também é contínua nos seus argumentos. Com isto podemos assumir que a contribuição de $w = w(z)$ ao valor da integral em (A.8) sobre o interval $[x, x + \Delta z]$ pode ser aproximado por:

$$\int_{x}^{x+\Delta z}F\left(z,w,w'\right)dz\approx F\left(x,y,y'\right)\Delta z+o\left(\Delta z\right),\tag{A.9}$$

onde:

$$y'=\frac{dw}{dz}\left(z=x\right),\tag{A.10}$$

e $o(\Delta z)$ denota termos em Δz tais que:

$$\underset{\Delta z\rightarrow 0}{lim}\left[\frac{o\left(\Delta z\right)}{\Delta z}\right]=0,\tag{A.11}$$

Analogamente para a função w podemos escrever:

$$w(z+\Delta z) = y + y'\Delta z + o(\Delta z), \tag{A.12}$$

supondo continuidade para w e w' em $[x, x+\Delta z]$.

Com estas aproximações, podemos escrever a expressão (A.8) na forma:

$$S(x,y) = \min_{y'} \left[F(x,y,y')\Delta z + o(\Delta z) + S(x+\Delta z, y + y'\Delta z + o(\Delta z))\right], \tag{A.13}$$

Esta expressão é ponto de partida para a formulação diferencial do problema contínuo em programação dinâmica.

Supondo a existência da segunda derivada de $S(x,y)$ e que a mesma seja limitada, nós podemos expandir o lado direito da equação (A.13) em torno de (x,y) e escrever:

$$S(x,y) = \min_{y'} \left[F(x,y,y')\Delta z + o(\Delta z) + S(x,y) + S_x(x,y)\Delta z + S_y(x,y)y'\Delta z + o(\Delta z)\right]. \tag{A.14}$$

Subtraindo $S(x,y)$ de ambos os lados da equação (A.14) e tomando o limite para Δz tendendo a zero, obteremos a equação:

$$0 = \min_{y'} \left[F(x,y,y') + S_x(x,y) + S_y(x,y)y'\right]. \tag{A.15}$$

Esta é a equação diferencial parcial que deve ser satisfeita pela função $S(x,y)$. A utilidade prática desta equação é dificultada pelo problema de minimização envolvido. Uma forma de simplificar esta equação é observar que uma condição necessária para que a mesma seja satisfeita será:

$$0 = F(x,y,y'(x,y,S_y)) + S_x + S_y y'(x,y,S_y), \tag{A.16}$$

onde aqui fazemos uso explicito do fato de y' ser depende de x, y e S_y.

Supondo agora que F seja continuamente diferenciável com respeito a y', que y' é limitada e sem vínculos, então, a derivada parcial com respeito a y' da expressão entre colchetes em (A.15) será zero. O resultado assim obtido, juntamente com a expressão em (A.16), forma o seguinte sistema de equações diferenciais parciais:

$$F_{y'}(x,y,y') + S_y = 0. \tag{A.17}$$

$$F(x,y,y') + S_x + S_y y' = 0, \tag{A.18}$$

Resolvendo (A.17) e (A.18) para S_y e S_x, respectivamente, obteremos:

$$S_y = -F_{y'}(x,y,y'), \tag{A.19}$$

$$S_x = -F(x,y,y') + F_{y'}y'. \tag{A.20}$$

Supondo que $S(x,y)$ tenha derivadas de segunda ordem contínuas, podemos derivar (A.19) com relação a x, (A.20) com relação a y, igualando ao final as expressões obtidas. Após um simples re-agrupamento de termos, obtemos a equação diferencial a seguir:

$$F_{y'y'}y'_x + F_{y'y'}y'_y + (F_{xy'} + F_{yy'} - F_y) = 0, \tag{A.21}$$

a qual é independente da função $S(x,y)$.

Esta equação é do tipo *quase-linear*; ou seja, pode ser colocada na forma:

$$P(x,y,y')\,y'_x + Q(x,y,y')\,y'_y + R(x,y,y') = 0, \tag{A.22}$$

a qual é linear nas derivadas parciais da função solução $y'(x,y)$. Existe uma teoria especial, chamada *teoria de caracteristicas*, para este tipo de equação diferencial (Dreyfus, 1965) o que torna este problema de particular interesse teórico.

É importante ressaltar que a equação diferencial em (A.21) fornece uma condição necessária, mas não suficiente para garantir a globalidade da solução.