

Laboratório Nacional de Computação Científica
Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional

**Modelagem hierárquica para a equação de Poisson e para
o problema de elasticidade linear em uma placa
heterogênea**

Por
Ana Carolina Carius

PETRÓPOLIS, RJ - BRASIL

JULHO DE 2012

MODELAGEM HIERÁRQUICA PARA A EQUAÇÃO DE POISSON
E PARA O PROBLEMA DE ELASTICIDADE LINEAR EM UMA
PLACA HETEROGÊNEA

Ana Carolina Carius

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO LABORATÓRIO NA-
CIONAL DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA COMO PARTE DOS REQU-
SITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM
CIÊNCIAS EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

Aprovada por:

Prof. Alexandre Loureiro Madureira, Ph.D

(Presidente)

Prof. Frédéric Christian Gerard Valentin, Ph.D

Prof. Gustavo Perla Menzala, D.Sc.

Prof. Fernando Alves Rochinha, D.Sc.

Prof. Marcus Vinícius Sarkis Martins, Ph.D

PETRÓPOLIS, RJ - BRASIL
JULHO DE 2012

Carius, Ana Carolina

C277m modelagem hierárquica para a equação de poisson e para o problema de elasticidade linear em uma placa heterogênea / Ana Carolina Carius. Petrópolis, RJ. : Laboratório Nacional de Computação Científica, 2012.

XII, 148 p. : il.; 29 cm

Orientador: Alexandre Loureiro Madureira

Tese (D.Sc.) – Laboratório Nacional de Computação Científica, 2012.

1. Análise numérica 2. Redução de dimensão 3. Modelagem Hierárquica
4. Problema de Stokes oscilatório. I. Madureira, Alexandre Loureiro. II. LNCC/MCT. III. Título.

CDD - 518

”Ainda que eu tivesse o dom da profecia, o conhecimento de todos os mistérios e de toda a ciência; se não tivesse o amor, eu não seria nada. O amor jamais passará. As profecias desaparecerão, as línguas cessarão, a ciência também desaparecerá. Agora, portanto, permanecem estas três coisas: a fé, a esperança e o amor. A maior delas, porém é o amor.”

(I Cor 13, 2.8.12-13)

Aos meus pais e ao meu querido filho Miguel.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, meu maior amigo, com quem posso sempre contar. Ao meu orientador, professor Alexandre Loureiro Madureira, pela paciência e pelo empenho durante toda a pesquisa. Ao professor Frédéric Gerard Valentin pelas contribuições importantíssimas em diversas partes do trabalho. Ao Laboratório Nacional de Computação Científica, que me deu suporte durante todo o período do meu doutorado. Aos meus pais, que me deram condições para que eu chegasse até aqui. Ao meu filho Miguel, razão da minha vida. Aos meus amigos, dos mais antigos aos mais recentes, que sempre acreditaram em mim (até mais do que eu mesma).

Resumo da Tese apresentada ao LNCC/MCT como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

**MODELAGEM HIERÁRQUICA PARA A EQUAÇÃO DE POISSON
E PARA O PROBLEMA DE ELASTICIDADE LINEAR EM UMA
PLACA HETEROGÊNEA**

Ana Carolina Carius

Julho , 2012

Orientador: Alexandre Loureiro Madureira, Ph.D

O presente trabalho tem por objetivo o estudo da equação de Poisson e do problema de elasticidade linear em uma placa heterogênea tridimensional de espessura pequena. O domínio considerado para os dois problemas apresenta dois parâmetros pequenos: as heterogeneidades presentes na direção longitudinal e a espessura do mesmo. Além dessas dificuldades, por ser um problema tridimensional, as aproximações numéricas para este tipo de problema são, em geral, muito mais complicadas e exigem um esforço computacional muito maior do que se considerássemos aproximações numéricas para um problema bidimensional. A partir desta constatação, aplicamos técnicas de redução de dimensão aos problemas tridimensionais iniciais gerando problemas bidimensionais. Neste trabalho propomos uma metodologia alternativa para a redução de dimensão dos problemas tridimensionais para os problemas bidimensionais conhecida como *modelagem hierárquica*. As principais vantagens deste método em relação aos métodos assintóticos são a obtenção de um único problema bidimensional independente da relação entre os parâmetros pequenos e a não dependência de periodicidade para o tamanho característico das inclusões heterogêneas. Após a obtenção dos modelos bidimensionais, observamos que, para se obter as soluções para os mesmos, precisávamos sugerir aproximações numéricas satisfatórias. Como obtivemos um problema de Stokes oscilatório, propomos um método numérico que aproxima este problema de forma eficiente e fizemos também a análise numérica do método proposto.

Abstract of Thesis presented to LNCC/MCT as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Sciences (D.Sc.)

**HIERARCHICAL MODELING FOR THE POISSON EQUATION AND
THE LINEAR ELASTICITY PROBLEM IN A HETEROGENEOUS
PLATE**

Ana Carolina Carius

July, 2012

Advisor: Alexandre Loureiro Madureira, Ph.D

The aim of this work is study the Poisson equation and the linear elasticity problem in a heterogeneous plate with small thickness. We consider a domain with two small parameters: the thickness of the plate and the heterogeneities in the longitudinal direction. Above these difficulties, it is a three-dimensional problem and the numerical approximations for these problems are, in general, more complicated and require a bigger computational effort when compared with the computational effort for a two-dimensional problem. From this remark, we apply dimension reduction techniques for the original three-dimensional problems and we obtained two-dimensional problems. In this work, we discuss the asymptotic methods as a dimension reduction technique for the two problems and we propose an alternative method for the dimension reduction known as *hierarchical modeling* for the both cases. The hierarchical modeling presents as main advantages the obtention of a unique two-dimensional problem independently of the relationship between the parameters that represent the plate thickness and the heterogeneities in the longitudinal direction. After we get the two-dimensional models, we observe that, in order to obtain the solutions for the problems, we need efficient numerical approximations. As we obtained a oscillatory Stokes problem, we propose a numerical method that approximate this problem satisfactory and we also made the numerical analysis for the proposed method.

Sumário

1	Introdução	1
2	A equação de Poisson numa placa heterogênea tridimensional	12
2.1	Introdução	12
2.2	Os problemas limite quando δ tende a zero e a seguir ϵ tende a zero	15
2.2.1	O método assintótico para δ	16
2.2.2	Homogeneização	19
2.3	O problema limite quando ϵ tende a zero e a seguir δ tende a zero .	19
2.3.1	Homogeneização	20
2.3.2	O método assintótico para δ	20
2.4	Modelagem hierárquica	21
2.4.1	Modelo hierárquico de ordem um	22
2.4.2	Consistência para o caso limite quando δ tende a zero e a seguir ϵ tende a zero	25
2.4.3	O limite quando ϵ tende a zero e a seguir δ tende a zero . .	26
2.4.4	O limite $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \overline{\mathcal{H}}(u_{3D}^{\delta\epsilon})$	31
2.5	Aproximações numéricas para o sistema bidimensional obtido via modelagem hierárquica	38
2.6	Conclusões	39
3	O problema de elasticidade numa placa heterogênea tridimensional	40
3.1	Introdução	40

3.2	Os problemas limite	42
3.2.1	O limite quando δ tende a zero e a seguir ϵ tende a zero	42
3.2.2	O limite quando ϵ tende a zero e a seguir δ tende a zero	46
3.3	Os modelos hierárquicos	48
3.3.1	O Modelo $HR_1(1)$	50
3.4	Consistência formal do modelo hierárquico $HR_1(1)$	58
3.5	Convergência do modelo de Reissner-Mindlin para o modelo de Kirchhoff-Love	64
3.6	Conclusões	72
4	Aproximação numérica para o problema de elasticidade em uma placa heterogênea	74
4.1	Introdução	74
4.2	A formulação mista para as equações de Reissner-Mindlin	75
4.3	Aproximação numérica para o problema de Stokes oscilatório	79
4.4	Conclusões	100
5	Conclusão	102
	Referências Bibliográficas	105
	Apêndice	
A	Problemas limite via métodos assintóticos para a equação de Poisson	108
A.1	A expansão assintótica em torno de ϵ para o problema bidimensional	108
A.2	A expansão assintótica em torno de ϵ para o problema tridimensional	110
A.3	O método assintótico para δ para o problema tridimensional homogeneizado	113
A.4	Homogeneização para o problema bidimensional via Modelagem Hierárquica	115

B	Justificativas matemáticas para os problemas limite da equação de Poisson	118
B.1	Justificativa para o limite quando ϵ tende a zero e a seguir δ tende a zero no problema original	119
B.1.1	O limite $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_{3D}^{\delta\epsilon}$	119
B.1.2	Justificativa para o limite quando δ tende a zero e a seguir ϵ tende a zero no problema original	135
C	Expansões assintóticas para o problema de Stokes	144

Lista de Figuras

Figura

1.1	O domínio P^δ	3
-----	--------------------------------	---

Capítulo 1

Introdução

O estudo de modelos em placas tridimensionais, de forma geral, está relacionado aos chamados métodos de *redução de dimensão*, cujo objetivo é gerar um modelo bidimensional a partir do modelo tridimensional inicial que o aproxime de forma satisfatória. As teorias clássicas utilizadas para gerarem modelos de ordem mais baixa assumem, *a priori*, hipóteses de natureza mecânica ou geométrica. Modelos gerados através dessa metodologia foram propostos por Love [Love (1944)], Reissner [Reissner (1944)] e Timoshenko [Timoshenko (1951)], entre outros.

As teorias de redução de dimensão destacam-se no estudo de placas tridimensionais por dois motivos: primeiramente, os modelos bidimensionais são, em geral, mais simples do ponto de vista matemático que os modelos tridimensionais por estarem postos em domínios bidimensionais ao invés de domínios tridimensionais. Como, em sua grande maioria, os modelos bidimensionais são resolvidos através de métodos numéricos, a segunda vantagem para a utilização de um modelo bidimensional é propor um método numérico que aproxime o modelo bidimensional, o que é muito mais simples do que propor um método numérico que aproxime um modelo tridimensional.

Uma vez que as vantagens de se utilizar um modelo bidimensional são claras, é preciso estabelecer se a aproximação do modelo tridimensional é satisfatória, ou seja, se o modelo bidimensional caracteriza de forma satisfatória o modelo tridi-

mensional proposto. Outra pergunta natural que surge nesse momento é como justificar, matematicamente, a aproximação de um modelo tridimensional por um modelo bidimensional? Nesta direção, percebemos três grandes metodologias de aproximação de modelos tridimensionais por modelos bidimensionais.

A primeira aproximação, proposta por Morgenstern [Morgenstern (1959)], consiste em estimar diretamente a diferença entre a solução tridimensional e a solução dada pelo modelo bidimensional obtido.

A segunda aproximação é aquela que utiliza os chamados *métodos assintóticos*. Primeiramente se reescala o domínio, que depende, inicialmente, de um parâmetro pequeno, para um novo domínio, de tamanho fixo e independente de qualquer parâmetro. A seguir, considera-se as expansões assintóticas para as funções que são soluções dos problemas tridimensionais e, a partir de então, se gera os problemas bidimensionais. Tal metodologia pode ser vista nos trabalhos de Caillerie [Caillerie (1981), Caillerie (1984)], Ciarlet [Ciarlet (1990)] e Destuynder [Destuynder (1986)].

A terceira metodologia de aproximação, proposta por Naghdi [Naghdi (1959)] e que pode ser vista nos trabalhos de Destuynder [Destuynder (1980)], Miara [Miara (1989)] e Madureira [Madureira (1999)] consiste em assumir, como hipótese, *a priori*, que os deslocamentos admissíveis são restritos a uma forma específica. Nessa linha surgem os chamados *modelos hierárquicos*, que são obtidos considerando-se funções de aproximação dependentes das variáveis na direção longitudinal e independentes da variável na direção transversa.

O presente trabalho considera a equação de Poisson e o problema de elasticidade linear em uma placa heterogênea tridimensional de espessura pequena.

Sendo assim, consideramos o domínio tridimensional $P^\delta = \Omega \times (-\delta, \delta)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Denotamos por $\partial P_\pm^\delta = \Omega \times \{-\delta, \delta\}$ as partes superior e inferior do domínio e por $\partial P_L^\delta = \partial\Omega \times (-\delta, \delta)$ a sua lateral.

Definimos ainda $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ como um domínio aberto limitado, com fronteira $\partial\Omega$ suave. Utilizamos a notação $\underline{x} = (x, x_3) \in P^\delta$ para indicar um ponto do domínio

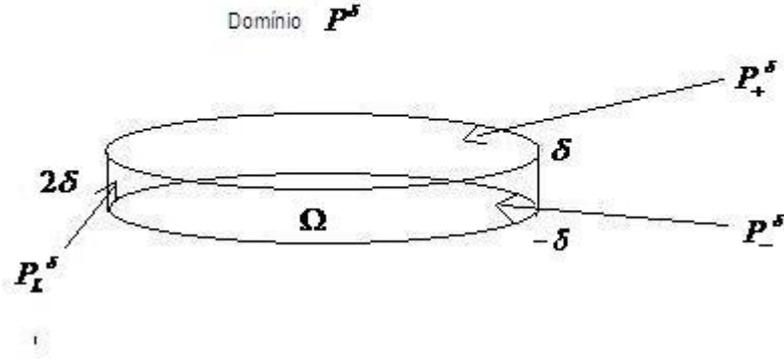


Figura 1.1: O domínio P^δ .

P^δ , onde $\underline{x} = (x_1, x_2) \in \Omega$ e $x_3 \in (-\delta, \delta)$. Analogamente, um vetor com duas componentes é denotado por $\underline{v} = (v_1, v_2)$. Um vetor com três componentes por $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Um tensor de segunda ordem dois por dois é denotado por $\underline{\underline{a}}$. Já um tensor de segunda ordem três por três é denotado por $\underline{\underline{\underline{a}}}$. Acrescentamos um til ou uma barra à medida que aumentamos a ordem do tensor que pretendemos denotar.

Problemas difusivos como a equação de Poisson com a presença de coeficientes oscilatórios aparecem nos trabalhos de Sangalli [Sangalli (2005)], Hou [Hou et al. (1999)] e Hou e Efendiev [Efendiev (2009)], porém em domínios bidimensionais. Consideramos a equação de Poisson no domínio P^δ dada da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 -\operatorname{div} [\underline{\underline{a}}^\epsilon \underline{\nabla} u_{3D}^{\delta\epsilon}] &= f^\delta && \text{em } P^\delta, \\
 (\underline{\underline{a}}^\epsilon \underline{\nabla} u_{3D}^{\delta\epsilon}) \cdot \underline{n} &= 0 && \text{em } \partial P_\pm^\delta, \\
 u_{3D}^{\delta\epsilon} &= 0 && \text{em } \partial P_L^\delta,
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde $u_{3D}^{\delta\epsilon}$ é a função que representa a temperatura na placa P^δ e f^δ é a fonte de calor no interior do domínio. Observemos que o fluxo de calor nas faces superior e inferior da placa é nulo e também a temperatura $u_{3D}^{\delta\epsilon}$ é zero na lateral da placa. A matriz $\underline{\underline{a}}^\epsilon$ pertence ao espaço das matrizes três por três simétricas positivas-

definidas e é dada por

$$\underline{\underline{a}}^\epsilon(\underline{x}, x_3) = \begin{bmatrix} \underline{\underline{a}}^\epsilon(\underline{x}) & \underline{a}^\epsilon(\underline{x}) \\ \underline{a}^\epsilon(\underline{x})^T & a_{33}^\epsilon(\underline{x}) \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

onde $\underline{\underline{a}}^\epsilon$ pertence ao espaço das matrizes dois por dois simétricas e \underline{a}^ϵ é um vetor em \mathbb{R}^2 . Denotamos por 2δ a espessura do domínio e ϵ o tamanho característico das inclusões no domínio na direção longitudinal.

Este é um exemplo de um modelo de placas tridimensional. Para este modelo, primeiramente, analisamos o *método assintótico* para a redução de dimensão, proposto no artigo de Caillerie [Caillerie (1981)]. Após o processo de redução de dimensão, Caillerie [Caillerie (1981)] obtém problemas bidimensionais distintos dependendo da ordem com a qual consideramos os parâmetros pequenos envolvidos no problema, isto é, $\delta > 0$ e $\epsilon > 0$. Em suma, obtemos um problema bidimensional quando consideramos primeiramente a espessura 2δ do domínio pequena e, a seguir, as inclusões características longitudinais ϵ pequenas e outro problema bidimensional quando consideramos as inclusões características longitudinais ϵ pequenas e, a seguir, a espessura do domínio 2δ pequena.

Do ponto de vista computacional, obter dois problemas distintos para os casos limite não é vantajoso, porque há a necessidade de implementação de ambos, o que torna o processo de obter a solução aproximada para o problema tridimensional trabalhoso. Além disso, é necessário se conhecer, *a priori*, a relação entre os parâmetros pequenos para escolher, adequadamente, o modelo bidimensional que aproxima corretamente o problema tridimensional.

Baseados na dificuldade encontrada para a equação de Poisson e o processo de redução de dimensão via métodos assintóticos, este trabalho tem, portanto, o objetivo de propor um único modelo bidimensional que aproxime o problema tridimensional proposto de forma satisfatória, sem considerar a relação entre a espessura e as inclusões características do domínio. Desta forma, propomos como método de redução de dimensão o processo conhecido como *modelagem hierárquica*.

Para a equação de Poisson, consideramos uma aproximação para a função $u_{3D}^{\delta\epsilon}$, a qual utilizamos funções cuja dependência para a variável na direção transversa é polinomial. Dependendo do grau do polinômio considerado, obtemos modelos hierárquicos diferentes.

Para a equação de Poisson propomos o modelo hierárquico de ordem um, cuja aproximação para a função $u_{3D}^{\delta\epsilon}$ é dada por

$$u_{3D}^{\delta\epsilon}(\underline{x}) = w_0(\underline{x}) + w_1(\underline{x})x_3,$$

onde as funções w_0^ϵ e w_1^ϵ pertencem ao espaço $H_0^1(\Omega)$.

Sendo assim, o problema bidimensional obtido após o processo de redução de dimensão via modelagem hierárquica é

$$-2\delta \operatorname{div} \left[\underline{a}^\epsilon \underline{\nabla} w_0^\epsilon + \underline{a}^\epsilon w_1^\epsilon \right] = \int_{-\delta}^{\delta} f^\delta dx_3 \quad \text{em } \Omega, \quad (1.3)$$

$$-\frac{2\delta^3}{3} \operatorname{div} \left[\underline{a}^\epsilon \underline{\nabla} w_1^\epsilon \right] + 2\delta \underline{a}^\epsilon \underline{\nabla} w_0^\epsilon + 2\delta \underline{a}_{33}^\epsilon w_1^\epsilon = \int_{-\delta}^{\delta} f^\delta x_3 dx_3 \quad \text{em } \Omega, \quad (1.4)$$

$$w_0^\epsilon = w_1^\epsilon = 0 \quad \text{em } \partial\Omega.$$

A partir do modelo representado pelo sistema de equações dado por (1.3) e (1.4), precisamos verificar se o problema proposto aproxima, de forma satisfatória, o problema tridimensional original e ainda, se é *consistente* com os resultados encontrados por Caillerie [Caillerie (1981)] para os casos limite. De fato, o sistema bidimensional representado pelas equações (1.3) e (1.4) é consistente nos casos limite e ainda aproxima bem o problema tridimensional proposto.

A partir dos resultados positivos obtidos para a equação de Poisson no domínio P^δ , propomos o problema de elasticidade linear no mesmo domínio.

Seja $\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon} : P^\delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ o vetor deslocamento e a tensão $\underline{\underline{\sigma}}^{\delta\epsilon} : P^\delta \rightarrow \mathbb{R}_{SIM}^{3 \times 3}$, tais que

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\sigma}}^{\delta\epsilon} &= \underline{e}(\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}), \quad -\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^{\delta\epsilon} = \underline{f}^\delta \quad \text{em } P^\delta, \\ \underline{\underline{\sigma}}^{\delta\epsilon} \cdot \underline{n} &= \underline{g}^\delta \quad \text{em } \partial P_{\pm}^\delta, \quad \underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon} = 0 \quad \text{em } \partial P_L^\delta, \end{aligned} \quad (1.5)$$

onde $\mathbb{R}_{SIM}^{3 \times 3}$ é o espaço das matrizes três por três simétricas, \underline{f}^δ representa a carga de volume e \underline{g}^δ a carga de tração nas faces superior e inferior da placa. Denotamos a parte simétrica do gradiente de $\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}$ por

$$\underline{e}(\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}) = \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon} + \underline{\nabla}^T \underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}),$$

ou seja, $e_{ij}(\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}) = (\partial_i u_j^{\delta\epsilon} + \partial_j u_i^{\delta\epsilon}) / 2$. Temos ainda que $(\underline{\text{div}} \underline{\sigma}^{\delta\epsilon})_i = \sum_{j=1}^3 \partial_j \sigma_{ij}^\epsilon$.

O tensor de elasticidade \underline{A} é tal que

$$\underline{A} \underline{\tau} = \frac{(1 + \nu)}{E} \underline{\tau} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\underline{\tau}) \underline{I},$$

onde $E > 0$ é o módulo de Young, $\nu \in [0, 1/2)$ é o coeficiente de Poisson e \underline{I} é a matriz identidade três por três.

Baseados no trabalho de Caillerie [Caillerie (1984)], verificamos que o problema de elasticidade se comporta da mesma forma que a equação de Poisson com relação aos parâmetros pequenos, δ e ϵ , nos casos limite, ou seja, derivamos dois modelos bidimensionais diferentes dependendo da relação entre os parâmetros δ e ϵ . Portanto, a exemplo da equação de Poisson, nosso objetivo é derivar um único modelo bidimensional que seja consistente aos problemas limite encontrados por Caillerie [Caillerie (1984)]. Desta forma, propomos também a *modelagem hierárquica* como método de redução de dimensão para o problema de elasticidade linear (1.5), considerando uma aproximação para a função $\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}$ de uma forma específica

$$\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}(1) = \begin{pmatrix} \eta(\underline{x}) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\varphi(\underline{x})x_3 \\ w(\underline{x}) \end{pmatrix}.$$

A função η satisfaz à equação de membrana

$$\begin{aligned} -\delta \underline{\text{div}} \underline{A}^{-1} \underline{e}(\eta) &= \frac{\delta}{2} \underline{f}^0 + \underline{g}^0 && \text{em } \Omega, \\ \eta &= 0 && \text{em } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.6}$$

onde as funções f^0 e g^0 são dadas por

$$\begin{aligned} f^0 &= \delta^{-1} \int_{-\delta}^{\delta} \underline{f}^{\delta} dx_3, \\ g^0 &= \frac{1}{2} \left[\underline{g}^{\delta}(x, \delta) + \underline{g}^{\delta}(x, -\delta) \right]. \end{aligned}$$

As funções φ e w são soluções para as equações de Reissner-Mindlin

$$\begin{aligned} -\frac{\delta^3}{3} \operatorname{div}_{\underline{\approx}} \left[A^{-1} \underline{e}(\varphi) \right] + 2\delta\lambda(\varphi - \underline{\nabla}w) &= -\delta \left(\frac{1}{2} f^1 + g^1 \right) && \text{em } \Omega, \\ 2\delta\lambda \operatorname{div}(\varphi - \underline{\nabla}w) &= \frac{\delta}{2} f_3^0 + g_3^0 && \text{em } \Omega, \\ \varphi &= 0, \quad w = 0 && \text{em } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.7}$$

onde as funções f^1 , g^1 , f_3^0 e g_3^0 são definidas por

$$\begin{aligned} f^1 &= \delta \int_{-\delta}^{\delta} \underline{f}^{\delta} \underline{v} x_3 dx_3, \\ g^1 &= \underline{g}^{\delta}(x, \delta) + \underline{g}^{\delta}(x, -\delta), \\ f_3^0 &= \delta^{-1} \int_{-\delta}^{\delta} f_3^{\delta} dx_3, \\ g_3^0 &= [g_3^{\delta}(x, \delta) + g_3^{\delta}(x, -\delta)], \end{aligned}$$

$$\text{e } \lambda = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

O tensor A^{-1} pode ser caracterizado da seguinte forma

$$A^{-1}_{\underline{\approx}} \underline{\tau} = \frac{E}{1+\nu} \left[\underline{\tau} + \frac{\nu}{1-2\nu} \operatorname{tr}(\underline{\tau}) I \right].$$

Observemos que tanto a equação de membrana quanto às equações de Reissner-Mindlin são modelos bidimensionais e, para os casos limite, as mesmas são consistentes aos problemas limite encontrados por Caillerie [Caillerie (1984)].

Como previsto, mesmo sendo modelos bidimensionais e, portanto, mais simples que o problema de elasticidade linear tridimensional (1.5), é necessária a utilização de métodos numéricos para encontrar as soluções nos dois casos.

A equação de membrana é um problema de difusão com a presença de um coeficiente oscilatório. Métodos numéricos multiescala como o *Residual Free Bubbles* (RFB) ou o *Multiscale Finite Element Method* (MsFEM) apresentam bons resultados para este tipo de problema, como pode ser visto nos trabalhos de Hou [Hou et al. (1999)], Hou e Efendiev [Efendiev (2009)] e Carius [Carius (2006)].

Porém, para as equações de Reissner-Mindlin, ao se aplicar o método de Galerkin clássico, ocorre um fenômeno conhecido como *locking*, que se caracteriza por uma má aproximação para a função φ . Com o objetivo de contornar o problema gerado pela aproximação via método de Galerkin, propomos uma formulação mista para as equações de Reissner-Mindlin, conforme o trabalho de Arnold [Arnold (1991)]. Ao propor a formulação mista, geramos um sistema de quatro equações, duas das quais são problemas difusivos sem a presença de coeficientes oscilatórios, portanto bem aproximados pelo método de Galerkin clássico e as duas outras formam um sistema de Stokes com a presença de coeficientes oscilatórios

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}\operatorname{div} \left[A^{-1} \bar{\underline{e}}(\check{\varphi}) \right] + \nabla p &= \bar{\underline{F}} - \operatorname{rot} r && \text{em } \Omega, \\ -\operatorname{div} \left(\check{\varphi} - \delta^2 \lambda^{-1} \nabla p \right) &= 0 && \text{em } \Omega, \\ \check{\varphi} &= 0 && \text{em } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.8}$$

onde

$$\bar{\underline{e}}(\check{\varphi}) = \begin{bmatrix} \partial_1 \check{\varphi}_2 & \frac{1}{2} (\partial_2 \check{\varphi}_2 - \partial_1 \check{\varphi}_1) \\ \frac{1}{2} (\partial_2 \check{\varphi}_2 - \partial_1 \check{\varphi}_1) & -\partial_2 \check{\varphi}_1 \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

$\check{\varphi} = (-\varphi_2, \varphi_1)$ e $\bar{\underline{F}} = (-F_2, F_1)$. Os termos $\operatorname{rot} r$ e ∇p aparecem após a utilização da decomposição de Helmholtz nas equações de Reissner-Mindlin.

Não encontramos na literatura um método numérico que aproxime um sistema de Stokes com coeficientes oscilatórios. Então propomos uma aproximação para o sistema (1.8) que se constitui numa combinação de um método do tipo *bolha* conforme RFB e MsFEM com o método numérico para o sistema de Stokes sem coeficientes oscilatórios proposto por Araya et. al [Araya et al. (2006)].

A partir desta aproximação obtivemos uma estimativa de melhor aproximação para

o sistema de Stokes oscilatório (1.8) dada por

$$\|\check{\varphi} - \varphi_1\|_{1,\Omega} + \|p - p_1\|_{0,\Omega} \leq C \left(\|\varphi - \check{\varphi}_h\|_{1,\Omega} + \|p - \check{p}_h\|_{0,\Omega} \right),$$

onde (φ_1, p_1) é a solução para o problema aproximado e $(\check{\varphi}_h, \check{p}_h)$ são as funções de interpolação para $\check{\varphi}$ e p , respectivamente.

Além da estimativa de melhor aproximação, propomos alguns resultados que nos conduziram à seguinte estimativa.

Seja $(\check{\varphi}, p)$ a solução para o problema de Stokes oscilatório (1.8) e (φ_1, p_1) a solução para o problema aproximado (4.11). Então a seguinte estimativa ocorre

$$\begin{aligned} \|\check{\varphi} - \varphi_1\|_{1,\Omega} + \|p - p_1\|_{0,\Omega} &\leq C(h + \epsilon) \|\bar{F} - \text{rot}r\|_{0,\Omega} + C \left(\frac{\epsilon}{h} \right)^{1/2} \|\varphi_0\|_{1,\infty,\Omega} \\ &\quad + C(\epsilon + h^2) \|p_0\|_{2,\Omega}, \end{aligned}$$

onde $(\varphi_0, p_0) \in \left[\left([H^2(\Omega)]^2 \cap W^{1,\infty}(\Omega) \right) \times H_0^1(\Omega) \right]$ é a solução do problema de Stokes homogeneizado

$$\begin{aligned} -\text{div}_{\check{x}} \left[C_{\check{\mathbb{M}}\check{x}} \bar{e}(\varphi_0) \right] + \nabla_{\check{x}} p_0 &= \check{F} && \text{em } \Omega, \\ -\text{div}_{\check{x}} \varphi_0 - \delta^2 \text{div}_{\check{x}} \left(P_{\check{\mathbb{M}}\check{x}} \nabla_{\check{x}} p_0 \right) &= 0 && \text{em } \Omega, \\ \varphi_0 &= 0 && \text{em } \partial\Omega, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} C_{\check{\mathbb{M}}\check{x}} &:= \frac{1}{|Y|} \int_Y A^{-1} \left(I + \bar{e}_{\check{y}}(\chi) \right) dy, \\ \check{F} &:= \frac{1}{|Y|} \int_Y \bar{F} - \text{rot}r dy, \\ P_{\check{\mathbb{M}}\check{x}} &:= \frac{1}{|Y|} \int_Y \lambda^{-1} (I + \nabla_{\check{y}} \bar{\chi}) dy. \end{aligned}$$

A partir da estimativa obtida para o problema de Stokes oscilatório, obtivemos uma estimativa para a solução (φ, w) das equações de Reissner-Mindlin (1.7), dada por

$$\begin{aligned} \|\varphi - \check{\varphi}_1\|_{1,\Omega} + \|w - w_1\|_{1,\Omega} &\leq C(h + \epsilon) \|\bar{F} - \text{rot}r\|_{0,\Omega} + C\left(\frac{\epsilon}{h}\right)^{1/2} \|\varphi_0\|_{1,\infty,\Omega} \\ &\quad + C(\epsilon + h^2) \|p_0\|_{2,\Omega}, \end{aligned}$$

onde $(\varphi_0, p_0) \in \left[\left([H^2(\Omega)]^2 \cap W^{1,\infty}(\Omega) \right) \times H_0^1(\Omega) \right]$ é a solução do problema de Stokes homogeneizado e $(\check{\varphi}_1, w_1)$ é a solução aproximada para as equações de Reissner-Mindlin (1.7).

Este trabalho foi dividido da seguinte forma: no Capítulo 2, apresentamos a equação de Poisson no domínio P^δ , as aproximações bidimensionais via métodos assintóticos propostas por Caillerie [Caillerie (1981)] para os casos os quais a espessura 2δ é muito menor que as inclusões características ϵ e para o caso onde as inclusões características ϵ são muito menores do que a espessura do domínio, 2δ , e a modelagem hierárquica para a equação de Poisson. Apresentamos o único problema bidimensional obtido como o problema que melhor aproxima a equação de Poisson no domínio Ω , independente da relação entre os parâmetros δ e ϵ . No Capítulo 3 apresentamos o problema de elasticidade linear tridimensional no domínio P^δ ; além das aproximações obtidas por Caillerie [Caillerie (1984)] via métodos assintóticos para este problema, observando novamente que a relação entre os parâmetros δ e ϵ influencia os modelos bidimensionais obtidos. A exemplo da equação de Poisson, propomos também a modelagem hierárquica como metodologia para gerar um único modelo bidimensional neste caso. Geramos a equação de membrana e as equações de Reissner-Mindlin. No Capítulo 4, apresentamos as aproximações numéricas para as equações obtidas através da modelagem hierárquica proposta no Capítulo 3. Primeiramente propomos as formulações do tipo bolha para a equação de membrana. A seguir, propomos uma formulação mista para as equações de Reissner-Mindlin, a qual nos gera o sistema de Stokes com coeficiente oscilatório. Propomos um método numérico para este problema e realizamos a análise de erro

do método proposto. A seguir, no Capítulo 5, apresentamos a conclusão deste trabalho. Por fim incluímos no Apêndice A os cálculos clássicos presentes na literatura para a obtenção dos problemas bidimensionais via métodos assintóticos. No Apêndice B, apresentamos todos os resultados matemáticos necessários para justificar, de forma rigorosa, as aproximações formais tanto para os métodos assintóticos quanto para a modelagem hierárquica na Equação de Poisson e no problema de elasticidade linear tridimensional. O Apêndice C contém o desenvolvimento do processo para gerar as expansões assintóticas para a solução do problema de Stokes oscilatório.

Capítulo 2

A equação de Poisson numa placa heterogênea tridimensional

2.1 Introdução

O presente capítulo tem por objetivo o estudo da equação de Poisson em uma placa heterogênea tridimensional de espessura pequena, denotada por P^δ . As principais dificuldades deste problema estão associadas ao domínio P^δ : a espessura 2δ , que é um parâmetro pequeno, e as inclusões heterogêneas, cujo tamanho característico é ϵ , consideradas na direção longitudinal e constantes na direção transversa, também um parâmetro pequeno.

Lembremos da equação de Poisson (1.1)

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} [\underline{a}^\epsilon \underline{\nabla} u_{3D}^{\delta\epsilon}] &= f^\delta && \text{em } P^\delta, \\ (\underline{a}^\epsilon \underline{\nabla} u_{3D}^{\delta\epsilon}) \cdot \underline{n} &= 0 && \text{em } \partial P_\pm^\delta, \\ u_{3D}^{\delta\epsilon} &= 0 && \text{em } \partial P_L^\delta, \end{aligned}$$

onde $u_{3D}^{\delta\epsilon}$ é a função que representa a temperatura na placa P^δ e f^δ é a fonte de calor no interior do domínio. Consideremos que o fluxo de calor nas faces superior e inferior da placa é nulo e também a temperatura $u_{3D}^{\delta\epsilon}$ é zero na lateral da placa. Ao buscar a solução para o problema proposto, verificamos que a aplicação de métodos numéricos a problemas tridimensionais, de forma geral, é complicado e exige-se um esforço computacional maior do que ao se aplicar métodos numéricos

a problemas que sejam bidimensionais. Uma vez que o domínio P^δ é uma placa delgada, interessa-nos o comportamento da solução para a equação de Poisson para valores pequenos do parâmetro δ . Motivados pelo trabalho de Caillerie [Caillerie (1981)], no qual é aplicada uma técnica de *redução de dimensão* para a equação de Poisson, encontra-se um novo problema, no domínio bidimensional. Ainda no trabalho de Caillerie [Caillerie (1981)], utiliza-se a teoria de homogeneização para o estudo das heterogeneidades encontradas no domínio P^δ na direção longitudinal, quando se considera as heterogeneidades periódicas de período ϵ .

Assim como no trabalho de Caillerie [Caillerie (1981)], estamos interessados no comportamento da solução da equação de Poisson para os casos limite quando a espessura da placa 2δ tende zero e também quando as heterogeneidades de tamanho característico ϵ , tendem a zero. Segundo Caillerie [Caillerie (1981)], dependendo da ordem com a qual se considera os limites para os parâmetros δ e ϵ , obtemos problemas bidimensionais distintos, isto é, o problema bidimensional encontrado quando consideramos primeiramente o limite quando δ tende a zero e a seguir ϵ tende a zero é diferente do problema encontrado quando consideramos o limite quando ϵ tende a zero e a seguir quando δ tende a zero. Portanto, considerando técnicas de redução de dimensão associadas a teoria de homogeneização obtemos dois problemas bidimensionais que ainda necessitam, pelas dificuldades do domínio P^δ , de trato computacional. Desta forma, encontrar dois problemas distintos dependendo da relação entre os parâmetros δ e ϵ não é um resultado satisfatório.

Neste capítulo apresentamos, como alternativa, uma técnica de redução de dimensão conhecida como *modelagem hierárquica*. O objetivo de se aplicar este tipo de técnica ao problema proposto é obter um único modelo bidimensional que não dependa da relação entre os parâmetros δ e ϵ como acontecia no trabalho de Caillerie [Caillerie (1981)].

Estruturamos o presente capítulo da seguinte forma: na seção 2.2 consideramos os métodos assintóticos como técnica de redução de dimensão, a exemplo de Caillerie [Caillerie (1981)]. Deduzimos, então, de maneira formal, o problema limite

encontrado ao final do processo de redução de dimensão e aplicação de técnicas de homogeneização. Considere \tilde{a} , \tilde{a} e a_{33} como funções periódicas nas direções x_1 e x_2 , de período ϵ . Então

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} u_{3D}^{\delta\epsilon} = \bar{u}_{2D},$$

é a solução para o seguinte problema

$$\begin{aligned} -2 \operatorname{div} \left[\tilde{B} \nabla \bar{u}_{2D} \right] &= \int_{-1}^1 f d\hat{x}_3 && \text{em } \Omega, \\ \bar{u}_{2D} &= 0 && \text{em } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde

$$B_{ij} = \int_Y A_{ij} + \sum_{\beta=1}^2 A_{i\beta} \frac{\partial \chi_j}{\partial \hat{y}_\beta} d\hat{y}_1 d\hat{y}_2, \quad i, j = 1, 2,$$

representam os elementos da matriz \tilde{B} , que não depende de ϵ e f representa a fonte de calor na placa $P = \Omega \times (-1, 1)$, conforme a definição (2.4). Y representa a célula retangular $Y := (0, 1)^2$. χ é a solução para o problema de célula (A.5). Os elementos da matriz \tilde{A} são dados por

$$A_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3}a_{3j}}{a_{33}}, \quad \text{para } i, j = 1, 2.$$

A seguir, na seção 2.3, deduzimos, também de maneira formal, o problema limite quando ϵ tende a zero e a seguir δ tende a zero, usando novamente o método assintótico como técnica de redução de dimensão. O problema limite encontrado ao final da homogeneização e redução de dimensão é

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_{3D}^{\delta\epsilon} = \bar{u}^0,$$

que é a solução do problema a seguir

$$\begin{aligned} -2 \operatorname{div} \left[\bar{B} \nabla \bar{u}^0 \right] &= \int_{-1}^1 f d\hat{x}_3 && \text{em } \Omega, \\ \bar{u}^0 &= 0 && \text{em } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde

$$\bar{B}_{ij} = \bar{A}_{ij} - \frac{\bar{A}_{i3}\bar{A}_{3j}}{\bar{A}_{33}}, \quad \text{para } i, j = 1, 2,$$

representam os elementos da matriz \bar{B} . Os elementos da matriz \bar{A} são dados por

$$\bar{A}_{ij} = \int_Y a_{ij} + \sum_{\beta=1}^2 a_{i\beta} \frac{\partial \bar{\chi}_j}{\partial y_\beta} dy_1 dy_2, \quad \text{para } i, j = 1, 2, 3.$$

A função $\bar{\chi}$ é a solução para o problema de célula (A.13).

Observemos que os problemas limite obtidos ao final dos dois processos são diferentes, ou seja, os limites não comutam e $\bar{u}^0 \neq \bar{u}_{2D}$.

Na seção 2.4 introduzimos a *modelagem hierárquica* como técnica de redução de dimensão. O objetivo da utilização deste tipo de técnica é a obtenção de um único modelo bidimensional que independa da relação entre os parâmetros δ e ϵ e que, nos casos limite, se comporte como os problemas bidimensionais encontrados na literatura. Este modelo ainda apresenta uma vantagem com relação ao método assintótico: a não exigência de periodicidade de \underline{a}^ϵ . Portanto, nesta seção, além de apresentar a técnica de redução de dimensão alternativa e se obter um único problema bidimensional, mostramos, de maneira formal, a *consistência* desta técnica. Isto é, a partir do problema bidimensional encontrado após a aplicação da modelagem hierárquica à equação de Poisson no domínio P^δ , considerando os casos limite quando δ tende a zero e a seguir ϵ tende a zero ou quando ϵ tende a zero e a seguir δ tende a zero recuperamos os problemas encontrados por Caillerie [Caillerie (1981)] via métodos assintóticos.

2.2 Os problemas limite quando δ tende a zero e a seguir ϵ tende a zero

Esta seção tem por objetivo apresentar o desenvolvimento da técnica de redução de dimensão via métodos assintóticos para δ para a equação de Poisson a partir dos resultados descritos por Caillerie [Caillerie (1981)]. Ao final desse processo encontra-se um problema bidimensional no domínio Ω , o qual consideramos

o problema limite quando δ tende a zero e aplica-se técnicas de homogeneização a este problema. O problema limite obtido ao final dos dois processos é o problema limite quando δ tende a zero e a seguir ϵ tende a zero. O método assintótico para δ não é encontrado na literatura da mesma forma que as técnicas de homogeneização. Sendo assim, o descrevemos com detalhes a seguir. Já as técnicas de homogeneização, pelo fato de serem encontrados com mais frequência na literatura, não serão descritas com detalhes nesta seção, mas no apêndice A.

2.2.1 O método assintótico para δ

Consideramos a equação de Poisson (1.1). O objetivo desta seção é obter o problema limite bidimensional quando δ tende zero a partir do desenvolvimento da expansão assintótica para a função $u_{3D}^{\delta\epsilon}$ em torno de δ . As funções pertencentes a expansão assintótica são independentes de δ . Para tanto, reescrevemos o problema (1.1) no domínio $P = \Omega \times (-1, 1)$, utilizando a mudança de variáveis

$$\hat{x} = \underline{x} \quad \text{e} \quad \hat{x}_3 = \delta^{-1}x_3. \quad (2.3)$$

Neste novo domínio definimos

$$\begin{aligned} u_{3D}^\epsilon(\hat{x}) &= u_{3D}^{\delta\epsilon}(\hat{x}, \delta\hat{x}_3) = u_{3D}^{\delta\epsilon}(\underline{x}), \\ f(\hat{x}) &= f^\delta(\hat{x}, \delta\hat{x}_3) = f^\delta(\underline{x}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Definimos também $\partial P = \partial\Omega \times (-1, 1)$ e $\partial P_\pm = \Omega \times \{-1, 1\}$.

Após a mudança de variáveis (2.3), podemos reescrever o problema (1.1) como

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \left[\underline{a}^\epsilon \underline{\nabla} u_{3D}^\epsilon \right] - \delta^{-1} \operatorname{div} \left(\underline{a}^\epsilon \frac{\partial u_{3D}^\epsilon}{\partial \hat{x}_3} \right) \\ - \delta^{-1} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \left(\underline{a}^\epsilon \cdot \underline{\nabla} u_{3D}^\epsilon \right) - \delta^{-2} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \left(a_{33}^\epsilon \frac{\partial u_{3D}^\epsilon}{\partial \hat{x}_3} \right) = f \quad \text{em } P, \\ \underline{a}^\epsilon \cdot \underline{\nabla} u_{3D}^\epsilon + \delta^{-1} a_{33}^\epsilon \frac{\partial u_{3D}^\epsilon}{\partial \hat{x}_3} = 0 \quad \text{em } \partial P_\pm. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Consideremos a expansão assintótica da função u_{3D}^ϵ em função de δ

$$u_{3D}^\epsilon \sim u^{\epsilon 0} + \delta u^{\epsilon 1} + \delta^2 u^{\epsilon 2} + \dots . \quad (2.6)$$

Substituindo a expansão assintótica (2.6) no problema (2.5), obtemos

$$\begin{aligned} & -\delta^{-2} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \left(a_{33}^\epsilon \frac{\partial u^{\epsilon 0}}{\partial \hat{x}_3} \right) - \delta^{-1} \left[\operatorname{div} \left(\underline{\tilde{a}}^\epsilon \frac{\partial u^{\epsilon 0}}{\partial \hat{x}_3} \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \left(\underline{\tilde{a}}^\epsilon \cdot \underline{\nabla} u^{\epsilon 0} \right) - \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \left(a_{33}^\epsilon \frac{\partial u^{\epsilon 1}}{\partial \hat{x}_3} \right) \right] \\ & - \operatorname{div} \left[\underline{\tilde{a}}^\epsilon \underline{\nabla} u^{\epsilon 0} \right] - \operatorname{div} \left(\underline{\tilde{a}}^\epsilon \frac{\partial u^{\epsilon 1}}{\partial \hat{x}_3} \right) - \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \left(\underline{\tilde{a}}^\epsilon \cdot \underline{\nabla} u^{\epsilon 1} \right) - \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \left(a_{33}^\epsilon \frac{\partial u^{\epsilon 2}}{\partial \hat{x}_3} \right) \\ & - \delta \operatorname{div} \left[\underline{\tilde{a}}^\epsilon \underline{\nabla} u^{\epsilon 1} \right] - \delta^2 \operatorname{div} \left[\underline{\tilde{a}}^\epsilon \underline{\nabla} u^{\epsilon 2} \right] + \dots = f \quad \text{em } P, \\ & \underline{\tilde{a}}^\epsilon \cdot \underline{\nabla} u^{\epsilon 0} + \delta \underline{\tilde{a}}^\epsilon \cdot \underline{\nabla} u^{\epsilon 1} + \delta^2 \underline{\tilde{a}}^\epsilon \cdot \underline{\nabla} u^{\epsilon 2} + \delta^{-1} a_{33}^\epsilon \frac{\partial u^{\epsilon 0}}{\partial \hat{x}_3} + a_{33}^\epsilon \frac{\partial u^{\epsilon 1}}{\partial \hat{x}_3} + \delta a_{33}^\epsilon \frac{\partial u^{\epsilon 2}}{\partial \hat{x}_3} + \dots = 0 \\ & \text{em } \partial P_\pm. \quad (2.7) \end{aligned}$$

A partir do problema (2.7), agrupamos os termos com a mesma potência de δ , tanto para o domínio P quanto para a fronteira ∂P_\pm .

Agrupamos os termos com a potência δ^{-2}

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \left(a_{33}^\epsilon \frac{\partial u^{\epsilon 0}}{\partial \hat{x}_3} \right) = 0 \quad \text{em } P, \quad (2.8)$$

e fronteira com a potência δ^{-1}

$$a_{33}^\epsilon \frac{\partial u^{\epsilon 0}}{\partial \hat{x}_3} = 0 \quad \text{em } \partial P_\pm. \quad (2.9)$$

Observemos que a_{33}^ϵ , por hipótese, é não nula e independente de \hat{x}_3 . Logo (2.8) pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 u^{\epsilon 0}}{\partial \hat{x}_3^2} = 0 \quad \text{em } P.$$

Concluimos que $u^{\epsilon 0}$ é linear com relação à variável \hat{x}_3 , ou seja, é linear nas fibras. Porém, por (2.9), temos que $u^{\epsilon 0}$ é independente de \hat{x}_3 , isto é, $u^{\epsilon 0}(x_1, x_2)$.

Agrupamos os termos com a potência δ^{-1}

$$-\operatorname{div} \left(\underset{\sim}{a}^\epsilon \frac{\partial u^{\epsilon 0}}{\partial \hat{x}_3} \right) - \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \left(\underset{\sim}{a}^\epsilon \cdot \underset{\sim}{\nabla} u^{\epsilon 0} \right) - \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \left(a_{33}^\epsilon \frac{\partial u^{\epsilon 1}}{\partial \hat{x}_3} \right) = 0 \quad \text{em } P, \quad (2.10)$$

e fronteira com a potência δ^0 , obtendo

$$\underset{\sim}{a}^\epsilon \cdot \underset{\sim}{\nabla} u^{\epsilon 0} + a_{33}^\epsilon \frac{\partial u^{\epsilon 1}}{\partial \hat{x}_3} = 0 \quad \text{em } \partial P_\pm. \quad (2.11)$$

A exemplo de (2.8), podemos concluir de (2.10) que $u^{\epsilon 1}$ é linear em relação à variável \hat{x}_3 . Ainda temos que

$$\frac{\partial u^{\epsilon 1}}{\partial \hat{x}_3} = -\frac{1}{a_{33}^\epsilon} \left(\underset{\sim}{a}^\epsilon \cdot \underset{\sim}{\nabla} u^{\epsilon 0} \right). \quad (2.12)$$

Agrupamos os termos com δ^0

$$\operatorname{div} \left[\underset{\sim}{a}^\epsilon \underset{\sim}{\nabla} u^{\epsilon 0} \right] + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_1} \left(a_{13}^\epsilon \frac{\partial u^{\epsilon 1}}{\partial \hat{x}_3} \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} \left(a_{23}^\epsilon \frac{\partial u^{\epsilon 1}}{\partial \hat{x}_3} \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \left(a_{31}^\epsilon \frac{\partial u^{\epsilon 1}}{\partial \hat{x}_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \left(a_{32}^\epsilon \frac{\partial u^{\epsilon 1}}{\partial \hat{x}_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \left(a_{33}^\epsilon \frac{\partial u^{\epsilon 2}}{\partial \hat{x}_3} \right) = -f, \quad (2.13)$$

e fronteira com a potência δ

$$\underset{\sim}{a}^\epsilon \cdot \underset{\sim}{\nabla} u^{\epsilon 1} + a_{33}^\epsilon \frac{\partial u^{\epsilon 2}}{\partial \hat{x}_3} = 0 \quad \text{em } \partial P_\pm. \quad (2.14)$$

Integrando (2.13) em relação à \hat{x}_3 , usando (2.12) e (2.14), temos

$$2 \operatorname{div} \left[\underset{\sim}{a}^\epsilon \underset{\sim}{\nabla} u^{\epsilon 0} \right] - 2 \operatorname{div} \left[\underset{\sim}{a}^\epsilon \frac{1}{a_{33}^\epsilon} \underset{\sim}{a}^\epsilon \cdot \underset{\sim}{\nabla} u^{\epsilon 0} \right] = - \int_{-1}^1 f d\hat{x}_3 \quad \text{em } \Omega,$$

donde podemos escrever

$$\begin{aligned} -2 \operatorname{div} \left[\underset{\sim}{A}^\epsilon \underset{\sim}{\nabla} u^{\epsilon 0} \right] &= \int_{-1}^1 f d\hat{x}_3 \quad \text{em } \Omega, \\ u^{\epsilon 0} &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde

$$A_{\approx}^{\epsilon} = a_{\approx}^{\epsilon} - \frac{a_{\approx}^{\epsilon} a_{\approx}^{\epsilon T}}{a_{33}^{\epsilon}},$$

isto é,

$$A_{ij}^{\epsilon} = a_{ij}^{\epsilon} - \frac{a_{i3}^{\epsilon} a_{3j}^{\epsilon}}{a_{33}^{\epsilon}}, \quad \text{para } i, j = 1, 2.$$

Observemos que a função $u^{\epsilon 0}$, solução do problema (2.15), satisfaz às condições (2.12) e (2.13). Observemos ainda que o problema (2.15) é bidimensional e independente de δ , ou seja, é o problema limite quando δ tende a zero.

2.2.2 Homogeneização

A partir do problema bidimensional (2.15), aplicamos técnicas de homogeneização a fim de obter o problema limite quando δ tende a zero e a seguir ϵ tende zero. A metodologia para esta técnica consiste em se considerar a expansão assintótica para a função $u^{\epsilon 0}$ em torno de ϵ . Substitui-se a expansão assintótica no problema (2.15) e agrupa-se os termos com a mesma potência de ϵ . Ao final do processo obtemos o problema (2.1). Os detalhes deste processo estão descritos no Apêndice A.

Observemos que o problema encontrado ao final do processo é o problema limite quando aplicamos o método assintótico como técnica de redução de dimensão e, a seguir, a teoria de homogeneização, isto é, tomamos o limite quando δ tende a zero e, a seguir, o limite quando ϵ tende a zero. Observemos ainda que, neste caso, é necessário considerar o tamanho característico das inclusões ϵ periódico.

2.3 O problema limite quando ϵ tende a zero e a seguir δ tende a zero

O objetivo desta seção é, a partir da equação de Poisson (1.1), aplicar técnicas de homogeneização e gerar um problema tridimensional homogeneizado. A seguir, utilizando o método assintótico como técnica de redução de dimensão, geramos um problema bidimensional, ou seja, o problema limite quando ϵ tende a zero e,

a seguir, δ tende a zero, conforme Caillerie [Caillerie (1981)]. Como as técnicas ditas anteriormente são as mesmas aplicadas na seção anterior, porém na ordem inversa, as mesmas serão descritas no Apêndice A.

2.3.1 Homogeneização

Consideramos a equação de Poisson (1.1). Aplicamos formalmente técnicas de homogeneização a este problema. Os detalhes estão no Apêndice A. Ao final do processo obtemos o seguinte problema tridimensional homogeneizado

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} [\underline{\underline{A}} \underline{\underline{\nabla}} \bar{u}_{3D}^\delta] &= f^\delta && \text{em } P^\delta, \\ \bar{u}_{3D}^\delta &= 0 && \text{em } \partial P_L^\delta, \\ \left(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{\nabla}}_{\underline{\underline{x}}} \bar{u}_{3D}^\delta \right) \cdot \underline{\underline{n}} &= 0 && \text{em } \partial P_\pm^\delta, \end{aligned} \tag{2.16}$$

onde

$$\bar{A}_{ij} = \int_Y a_{ij} + \sum_{\beta=1}^2 a_{i\beta} \frac{\partial \bar{\chi}_j}{\partial y_\beta} dy_1 dy_2, \quad \text{para } i, j = 1, 2, 3,$$

sendo $\bar{\chi}$ a solução do problema de célula (A.13).

2.3.2 O método assintótico para δ

Nesta seção aplicamos o método assintótico como técnica de redução de dimensão ao problema (2.16), a exemplo do que foi feito para a equação de Poisson na seção 2.2.1. Sendo assim, também os detalhes deste processo estão no Apêndice A. O problema bidimensional obtido ao final do processo é (2.2).

Observemos que o problema bidimensional (2.2) é diferente do problema bidimensional (2.1). A partir destes resultados é possível verificar, do ponto de vista formal, que os limites assintóticos **não comutam**, isto é, considerando a equação de Poisson (1.1) e os limites assintóticos quando δ tende a zero e a seguir ϵ tende a zero obtemos um problema bidimensional limite diferente do problema bidimensional limite encontrado quando ϵ tende a zero e a seguir δ tende a zero.

2.4 Modelagem hierárquica

Nas seções 2.2 e 2.3 apresentamos os métodos assintóticos conforme proposta de Caillerie [Caillerie (1981)] como metodologia para se obter os problemas limite quando δ e ϵ tendem a zero a partir da equação de Poisson no domínio tridimensional P^δ . Observamos que os limites assintóticos não comutam. A obtenção de dois problemas bidimensionais diferentes ao final dos dois processos é esperada, porém não é interessante do ponto de vista prático. A escolha do problema bidimensional a ser utilizado está diretamente ligada à relação entre os parâmetros δ e ϵ , e, na prática é necessário saber, *a priori*, a relação entre os parâmetros para então se escolher o modelo bidimensional adequado. Considerando a situação descrita anteriormente, propomos, neste trabalho, uma forma alternativa de se obter modelos bidimensionais a partir da equação de Poisson (1.1) denominada *modelagem hierárquica*. Esta técnica consiste em se obter modelos bidimensionais para a equação de Poisson (1.1) escolhendo-se subespaços do espaço original das soluções, com dependência polinomial na variável x_3 . Através desta técnica encontramos um único problema bidimensional dependente dos parâmetros δ e ϵ . Mostramos que, do ponto de vista formal, para os casos limite quando δ tende a zero e a seguir ϵ tende a zero ou quando ϵ tende a zero e a seguir δ tende a zero recuperamos os problemas limite encontrados por Caillerie [Caillerie (1981)].

Dividimos esta seção da seguinte forma: primeiramente apresentamos o modelo hierárquico a ser utilizado e obtemos a verificação formal da consistência do modelo, isto é, consideramos os casos limite apresentados por Caillerie [Caillerie (1981)] e verificamos se o modelo bidimensional recupera os mesmos problemas limite. Finalizamos com algumas observações a respeito das aproximações numéricas que poderiam ser utilizadas para o problema bidimensional encontrado.

2.4.1 Modelo hierárquico de ordem um

Consideremos a equação de Poisson no domínio P^δ como o problema modelo tridimensional original (1.1) e o espaço $V(P^\delta)$ da seguinte forma

$$V(P^\delta) = \{v \in H^1(P^\delta) : v = 0 \text{ em } \partial P_L^\delta\}.$$

Observemos que a norma $\|\cdot\|_{H^1(P^\delta)}$ define uma norma em $V(P^\delta)$.

Os modelos hierárquicos são obtidos considerando-se subespaços de $V(P^\delta)$ com dependência polinomial na variável x_3 . Desta forma, temos

$$V_p(P^\delta) = \{v \in V(P^\delta) : v(\underline{x}, x_3) = v_0(\underline{x}) + v_1(\underline{x})x_3 + v_2(\underline{x})x_3^2 + \cdots + v_p(\underline{x})x_3^p, \\ \text{onde } v_0, v_1, v_2, \dots, v_p \in H_0^1(\Omega)\}. \quad (2.17)$$

Escolhemos o subespaço $V_1(P^\delta)$, o qual possui dependência linear na variável x_3 , isto é,

$$V_1(P^\delta) = \{v \in V(P^\delta) : v(\underline{x}, x_3) = v_0(\underline{x}) + v_1(\underline{x})x_3, \text{ onde } v_0, v_1 \in H_0^1(\Omega)\}. \quad (2.18)$$

A formulação variacional do problema (1.1) pode ser dada por:

Achar $u_{3D}^{\delta\epsilon} \in V_1(P^\delta)$ tal que

$$\int_{P^\delta} a^\epsilon \nabla_{\underline{x}} u_{3D}^{\delta\epsilon} \cdot \nabla_{\underline{x}} v d\underline{x} = \int_{P^\delta} f^\delta v d\underline{x}, \quad \text{para todo } v \in V(P^\delta).$$

Como $V_1(P^\delta) \subset V(P^\delta)$, definimos $\tilde{u}_{3D}^{\delta\epsilon} \in V_1(P^\delta)$ de forma que

$$\int_{P^\delta} a^\epsilon \nabla_{\underline{x}} \tilde{u}_{3D}^{\delta\epsilon} \cdot \nabla_{\underline{x}} \tilde{v} d\underline{x} = \int_{P^\delta} f^\delta \tilde{v} d\underline{x} \quad \text{para todo } \tilde{v} \in V_1(P^\delta). \quad (2.19)$$

Como $\tilde{u}_{3D}^{\delta\epsilon} \in V_1(P^\delta)$, então $\tilde{u}_{3D}^{\delta\epsilon}(\underline{x}) = w_0^\epsilon(\underline{x}) + w_1^\epsilon(\underline{x})x_3$. A partir da formulação variacional (2.19) e das definições para as funções $\tilde{u}_{3D}^{\delta\epsilon}$ e \tilde{v} em $V_1(P^\delta)$, obtemos o

sistema bidimensional (1.3) e (1.4), expressos pelas equações

$$\begin{aligned} -2\delta \operatorname{div} \left[\underline{\underline{a}}^\epsilon \underline{\underline{\nabla}} w_0^\epsilon + \underline{\underline{a}}^\epsilon w_1^\epsilon \right] &= \int_{-\delta}^{\delta} f^\delta dx_3 \quad \text{em } \Omega, \\ -\frac{2\delta^3}{3} \operatorname{div} \left[\underline{\underline{a}}^\epsilon \underline{\underline{\nabla}} w_1^\epsilon \right] + 2\delta \underline{\underline{a}}^\epsilon \underline{\underline{\nabla}} w_0^\epsilon + 2\delta a_{33}^\epsilon w_1^\epsilon &= \int_{-\delta}^{\delta} f^\delta x_3 dx_3 \quad \text{em } \Omega, \\ w_0^\epsilon = w_1^\epsilon &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \end{aligned}$$

A seguir apresentamos os cálculos necessários para se obter (1.3) e (1.4).

De fato, utilizando a definição para a função $\tilde{v}(\underline{x}) = v_0(\underline{x}) + v_1(\underline{x})x_3$, concluímos que a formulação variacional (2.19) pode ser dada da seguinte forma

$$\int_{P^\delta} \left[\underline{\underline{a}}^\epsilon \underline{\underline{\nabla}} w_0^\epsilon + \underline{\underline{a}}^\epsilon \underline{\underline{\nabla}} (w_1^\epsilon x_3) \right] \underline{\underline{\nabla}} v_0 d\underline{x} = \int_{P^\delta} f^\delta v_0 d\underline{x}, \quad (2.20)$$

e

$$\int_{P^\delta} \left[\underline{\underline{a}}^\epsilon \underline{\underline{\nabla}} w_0^\epsilon + \underline{\underline{a}}^\epsilon \underline{\underline{\nabla}} (w_1^\epsilon x_3) \right] \underline{\underline{\nabla}} (v_1 x_3) d\underline{x} = \int_{P^\delta} f^\delta v_1 x_3 d\underline{x}$$

para todo $v_0, v_1 \in H_0^1(\Omega)$. (2.21)

Desenvolvendo o problema (2.20), obtemos

$$\int_{P^\delta} \left[\underline{\underline{a}}^\epsilon \underline{\underline{\nabla}} w_0^\epsilon \underline{\underline{\nabla}} v_0 + \underline{\underline{a}}^\epsilon \underline{\underline{\nabla}} (w_1^\epsilon x_3) \underline{\underline{\nabla}} v_0 \right] d\underline{x} = \int_{P^\delta} f^\delta v_0 d\underline{x}.$$

Como

$$\underline{\underline{\nabla}} w_0^\epsilon = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\nabla}} w_0^\epsilon \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\nabla}} v_0 = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\nabla}} v_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{\underline{a}}^\epsilon(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \underline{\underline{a}}^\epsilon(\underline{x}) & \underline{\underline{a}}^\epsilon(\underline{x}) \\ \underline{\underline{a}}^\epsilon(\underline{x})^T & a_{33}^\epsilon(\underline{x}) \end{bmatrix}, \quad \text{então}$$

$$\underline{\underline{a}}^\epsilon \underline{\underline{\nabla}} w_0^\epsilon = \begin{bmatrix} \underline{\underline{a}}^\epsilon \underline{\underline{\nabla}} w_0^\epsilon \\ \underline{\underline{a}}^\epsilon \underline{\underline{\nabla}} w_0^\epsilon \end{bmatrix},$$

donde obtemos

$$\underline{\underline{a}}^\epsilon \underline{\underline{\nabla}} w_0^\epsilon \cdot \underline{\underline{\nabla}} v_0 = \underline{\underline{a}}^\epsilon \underline{\underline{\nabla}} w_0^\epsilon \cdot \underline{\underline{\nabla}} v_0.$$

De forma análoga, concluímos que

$$\underline{a}^\epsilon \underline{\nabla} (w_1^\epsilon x_3) \cdot \underline{\nabla} v_0 = x_3 \underline{a}^\epsilon \underline{\nabla} w_1^\epsilon \cdot \underline{\nabla} v_0 + \underline{a}^\epsilon w_1^\epsilon \underline{\nabla} v_0.$$

Logo a integral (2.20) é equivalente a

$$\int_{P^\delta} \underline{a}^\epsilon \underline{\nabla} w_0^\epsilon \underline{\nabla} v_0 + x_3 \underline{a}^\epsilon \underline{\nabla} w_1^\epsilon \underline{\nabla} v_0 + \underline{a}^\epsilon w_1^\epsilon \underline{\nabla} v_0 d\underline{x} = \int_{P^\delta} f^\delta v_0 d\underline{x},$$

ou seja,

$$\int_{P^\delta} \left[\underline{a}^\epsilon \underline{\nabla} w_0^\epsilon + x_3 \underline{a}^\epsilon \underline{\nabla} w_1^\epsilon + \underline{a}^\epsilon w_1^\epsilon \right] \underline{\nabla} v_0 d\underline{x} = \int_{P^\delta} f^\delta v_0 d\underline{x}.$$

Como, por definição, $P^\delta = \Omega \times (-\delta, \delta)$, temos

$$2\delta \int_{\Omega} \left[\underline{a}^\epsilon \underline{\nabla} w_0^\epsilon + \underline{a}^\epsilon w_1^\epsilon \right] \underline{\nabla} v_0 d\underline{x} = \int_{\Omega} \int_{-\delta}^{\delta} f^\delta dx_3 v_0 d\underline{x}.$$

Aplicando integração por partes, concluímos (1.3).

Desenvolvendo o problema (2.21), concluímos que

$$\underline{a}^\epsilon \underline{\nabla} w_0^\epsilon \underline{\nabla} (v_1 x_3) = x_3 \underline{a}^\epsilon \underline{\nabla} w_0^\epsilon \underline{\nabla} v_1 + \underline{a}^{\epsilon T} \underline{\nabla} w_0^\epsilon v_1$$

e

$$\underline{a}^\epsilon \underline{\nabla} (w_1^\epsilon x_3) \underline{\nabla} (v_1 x_3) = x_3^2 \underline{a}^\epsilon \underline{\nabla} w_1^\epsilon \underline{\nabla} v_1 + x_3 \underline{a}^\epsilon w_1^\epsilon \underline{\nabla} v_1 + x_3 \underline{a}^{\epsilon T} \underline{\nabla} w_1^\epsilon v_1 + a_{33}^\epsilon w_1^\epsilon v_1.$$

Logo, temos

$$\begin{aligned} \int_{P^\delta} x_3 \underline{a}^\epsilon \underline{\nabla} w_0^\epsilon \underline{\nabla} v_1 + \underline{a}^\epsilon \underline{\nabla} w_0^\epsilon v_1 + x_3^2 \underline{a}^\epsilon \underline{\nabla} w_1^\epsilon \underline{\nabla} v_1 d\underline{x} + \\ \int_{P^\delta} x_3 \underline{a}^\epsilon w_1^\epsilon \underline{\nabla} v_1 + x_3 \underline{a}^\epsilon \underline{\nabla} w_1^\epsilon v_1 + a_{33}^\epsilon w_1^\epsilon v_1 d\underline{x} = \int_{P^\delta} f^\delta v_1 x_3 d\underline{x}. \end{aligned}$$

Utilizando a definição $P^\delta = \Omega \times \{-\delta, \delta\}$, e integrando por partes, podemos concluir

(1.4).

2.4.2 Consistência para o caso limite quando δ tende a zero e a seguir ϵ tende a zero

Na seção 2.4.1, apresentamos a modelagem hierárquica como técnica de redução de dimensão. Obtemos os problemas (1.3) e (1.4), ambos bidimensionais, quando consideramos modelos hierárquicos de ordem um. Aplicando a mudança de variáveis (2.3) aos problemas (1.3) e (1.4), obtemos

$$-2 \operatorname{div} \left[\underset{\sim}{a}^\epsilon \underset{\sim}{\nabla} w_0^\epsilon + \underset{\sim}{a}^\epsilon w_1^\epsilon \right] = \int_{-1}^1 f d\hat{x}_3 \quad \text{em } \Omega, \quad (2.22)$$

$$-\frac{2\delta^2}{3} \operatorname{div} \left[\underset{\sim}{a}^\epsilon \underset{\sim}{\nabla} w_1^\epsilon \right] + 2\underset{\sim}{a}^\epsilon \underset{\sim}{\nabla} w_0^\epsilon + 2a_{33}^\epsilon w_1^\epsilon = \delta \int_{-1}^1 f \hat{x}_3 d\hat{x}_3 \quad \text{em } \Omega, \quad (2.23)$$

$$w_0^\epsilon = w_1^\epsilon = 0 \quad \text{em } \partial\Omega.$$

Formalmente, tomando o limite quando δ tende a zero em (2.22) e (2.23), temos

$$\begin{aligned} -2 \operatorname{div} \left[\underset{\sim}{a}^\epsilon \underset{\sim}{\nabla} w_0^\epsilon + \underset{\sim}{a}^\epsilon w_1^\epsilon \right] &= \int_{-1}^1 f d\hat{x}_3 \quad \text{em } \Omega, \\ 2\underset{\sim}{a}^\epsilon \underset{\sim}{\nabla} w_0^\epsilon + 2a_{33}^\epsilon w_1^\epsilon &= 0 \quad \text{em } \Omega, \\ w_0^\epsilon = w_1^\epsilon &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Podemos concluir que

$$w_1^\epsilon = -\frac{1}{a_{33}^\epsilon} \underset{\sim}{a}^{\epsilon T} \cdot \underset{\sim}{\nabla} w_0^\epsilon. \quad (2.25)$$

Substituindo (2.25) em (2.24), obtemos

$$\begin{aligned} -2 \operatorname{div} \left[\underset{\sim}{A}^\epsilon \underset{\sim}{\nabla} w_0^\epsilon \right] &= \int_{-1}^1 f d\hat{x}_3 \quad \text{em } \Omega, \\ w_0^\epsilon &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde

$$A_{ij}^\epsilon = a_{ij}^\epsilon - \frac{a_{i3}^\epsilon a_{3j}^\epsilon}{a_{33}^\epsilon} \quad \text{para } i, j = 1, 2.$$

A fim de encontrar o problema limite quando ϵ tende a zero, aplicamos técnicas de homogeneização ao problema (2.26). Os detalhes deste processo se encontram no Apêndice A.

O problema homogeneizado obtido ao final do processo é

$$\begin{aligned} -2 \operatorname{div} \left[\underset{\approx}{B} \nabla \bar{w}_0 \right] &= \int_{-1}^1 f d\hat{x}_3 && \text{em } \Omega, \\ \bar{w}_0 &= 0 && \text{em } \partial\Omega, \end{aligned}$$

onde

$$B_{ij} = \int_Y A_{ij} + \sum_{\beta=1}^2 A_{i\beta} \frac{\partial \chi_j}{\partial \hat{y}_\beta} d\hat{y}.$$

Observemos que o problema anterior é exatamente o problema (2.1), encontrado via métodos assintóticos.

2.4.3 O limite quando ϵ tende a zero e a seguir δ tende a zero

Na seção 2.4.2 consideramos o problema bidimensional obtido via modelagem hierárquica e tomamos os limites quando δ tende a zero e a seguir quando ϵ tende a zero. Nesta seção consideramos novamente o problema bidimensional obtido via modelagem hierárquica, porém tomamos os limites de forma inversa, isto é, quando ϵ tende a zero e a seguir quando δ tende a zero no sistema de equações (1.3) e (1.4). Consideremos as expansões assintóticas

$$\begin{aligned} w_0^\epsilon(\underline{x}) &\sim w_0^0(\underline{x}, \underline{y}) + \epsilon w_0^1(\underline{x}, \underline{y}) + \epsilon^2 w_0^2(\underline{x}, \underline{y}) + \dots \\ w_1^\epsilon(\underline{x}) &\sim w_1^0(\underline{x}, \underline{y}) + \epsilon w_1^1(\underline{x}, \underline{y}) + \epsilon^2 w_1^2(\underline{x}, \underline{y}) + \dots, \end{aligned}$$

onde $\underline{y} = \epsilon^{-1} \underline{x}$ e w_i^j , $i, j = 1, 2, \dots$ é periódico em relação à \underline{y} .

Aplicando a regra da cadeia ao operador divergente da equação (1.3), temos

$$\begin{aligned} -2\epsilon^{-2} \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\approx}{a}^\epsilon \nabla_{\hat{y}} w_0^\epsilon \right] - 2\epsilon^{-1} \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\underset{\approx}{a}^\epsilon \nabla_{\hat{y}} w_0^\epsilon \right] - 2\epsilon^{-1} \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\approx}{a}^\epsilon \nabla_{\hat{x}} w_0^\epsilon \right] - 2 \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\underset{\approx}{a}^\epsilon \nabla_{\hat{x}} w_0^\epsilon \right] \\ - 2\epsilon^{-1} \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\approx}{a}^\epsilon w_1^\epsilon \right] - 2 \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\underset{\approx}{a}^\epsilon w_1^\epsilon \right] = \int_{-1}^1 f d\hat{x}_3. \end{aligned}$$

Substituindo primeiramente a expansão para w_0^ϵ e depois a expansão para w_1^ϵ , obtemos

$$\begin{aligned}
& -2\epsilon^{-2} \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\sim}{a} \nabla_{\hat{y}} w_0^0 \right] - 2\epsilon^{-1} \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\underset{\sim}{a} \nabla_{\hat{y}} w_0^0 \right] - 2\epsilon^{-1} \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\sim}{a} \nabla_{\hat{x}} w_0^0 \right] - 2 \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\underset{\sim}{a} \nabla_{\hat{x}} w_0^0 \right] - \\
& - 2\epsilon^{-1} \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\sim}{a} \nabla_{\hat{y}} w_1^0 \right] - 2 \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\underset{\sim}{a} \nabla_{\hat{y}} w_1^0 \right] - 2 \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\sim}{a} \nabla_{\hat{x}} w_1^0 \right] - 2\epsilon \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\underset{\sim}{a} \nabla_{\hat{x}} w_1^0 \right] - \\
& \quad - 2 \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\sim}{a} \nabla_{\hat{y}} w_1^0 \right] - 2\epsilon^{-1} \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\sim}{a} w_1^0 \right] - 2 \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\underset{\sim}{a} w_1^0 \right] - \\
& \quad - 2 \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\sim}{a} w_1^1 \right] - 2\epsilon \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\underset{\sim}{a} w_1^1 \right] - \dots = \int_{-1}^1 f d\hat{x}_3.
\end{aligned}$$

Agrupando os termos com a potência ϵ^{-2} , obtemos

$$\operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\sim}{a} \nabla_{\hat{y}} w_0^0 \right] = 0 \quad \text{em } \Omega \times Y,$$

donde podemos concluir que a função w_0^0 é independente de \hat{y} , ou seja,

$$w_0^0(\hat{x}, \hat{y}) := \bar{w}_0(\hat{x}).$$

Consideremos o problema (1.4).

Aplicando a regra da cadeia ao operador divergente e ao operador gradiente, temos

$$\begin{aligned}
& -\frac{2\delta^2}{3} \epsilon^{-2} \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\sim}{a}^\epsilon \nabla_{\hat{y}} w_1^\epsilon \right] - \frac{2\delta^2}{3} \epsilon^{-1} \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\underset{\sim}{a}^\epsilon \nabla_{\hat{y}} w_1^\epsilon \right] - \frac{2\delta^2}{3} \epsilon^{-1} \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\sim}{a}^\epsilon \nabla_{\hat{x}} w_1^\epsilon \right] - \\
& -\frac{2\delta^2}{3} \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\underset{\sim}{a}^\epsilon \nabla_{\hat{x}} w_1^\epsilon \right] + 2\epsilon^{-1} \underset{\sim}{a}^{\epsilon T} \nabla_{\hat{y}} w_0^\epsilon + 2\underset{\sim}{a}^{\epsilon T} \nabla_{\hat{x}} w_0^\epsilon + 2a_{33}^\epsilon w_1^\epsilon = \delta \int_{-1}^1 f \hat{x}_3 d\hat{x}_3.
\end{aligned}$$

Substituindo pelas expansões para w_0^ϵ e w_1^ϵ , obtemos

$$\begin{aligned}
& -\frac{2\delta^2}{3} \epsilon^{-2} \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\sim}{a} \nabla_{\hat{y}} w_1^0 \right] - \frac{2\delta^2}{3} \epsilon^{-1} \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\underset{\sim}{a} \nabla_{\hat{y}} w_1^0 \right] - \frac{2\delta^2}{3} \epsilon^{-1} \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\sim}{a} \nabla_{\hat{x}} w_1^0 \right] - \\
& -\frac{2\delta^2}{3} \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\underset{\sim}{a} \nabla_{\hat{x}} w_1^0 \right] - \frac{2\delta^2}{3} \epsilon^{-1} \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\sim}{a} \nabla_{\hat{y}} w_1^1 \right] - \frac{2\delta^2}{3} \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\underset{\sim}{a} \nabla_{\hat{y}} w_1^1 \right] - \frac{2\delta^2}{3} \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\sim}{a} \nabla_{\hat{x}} w_1^0 \right] - \\
& -\frac{2\delta^2}{3} \epsilon \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\underset{\sim}{a} \nabla_{\hat{x}} w_1^1 \right] - \frac{2\delta^2}{3} \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\sim}{a} \nabla_{\hat{y}} w_1^2 \right] + 2\epsilon^{-1} \underset{\sim}{a}^T \nabla_{\hat{y}} w_0^0 + 2\underset{\sim}{a}^T \nabla_{\hat{x}} w_0^0 + 2\underset{\sim}{a}^T \nabla_{\hat{y}} w_0^1 + \\
& \quad + 2\epsilon \underset{\sim}{a} \nabla_{\hat{x}} w_0^1 + 2a_{33} w_0^1 + 2\epsilon a_{33} w_1^1 + \dots = \delta \int_{-1}^1 f \hat{x}_3 d\hat{x}_3.
\end{aligned}$$

Agrupando os termos com a potência ϵ^{-2}

$$\operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\approx}{a} \nabla_{\hat{y}} w_1^0 \right] = 0 \quad \text{em } \Omega \times Y,$$

donde podemos concluir que w_1^0 é independente de \hat{y} , ou seja,

$$w_1^0(\hat{x}, \hat{y}) := \bar{w}_1(\hat{x}).$$

Agrupando os termos com a potência ϵ^{-1} em ambas as equações, temos

$$\operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\approx}{a} \nabla_{\hat{y}} w_1^1 \right] = - \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\approx}{a} \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_0 \right] - \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\approx}{a} \bar{w}_1 \right], \quad (2.27)$$

$$\operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\approx}{a} \nabla_{\hat{y}} w_1^1 \right] = - \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\approx}{a} \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_1 \right] = - \sum_{\beta=1}^2 \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial \hat{y}_\alpha} \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial x_\beta}. \quad (2.28)$$

Agrupando os termos com potência ϵ^0 em ambas as equações e utilizando argumentos de periodicidade, obtemos

$$-2 \operatorname{div}_{\hat{x}} \int_Y \underset{\approx}{a} \nabla_{\hat{y}} w_1^0 + \underset{\approx}{a} \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_0 + \underset{\approx}{a} \bar{w}_1 d\hat{y} = \int_Y \int_{-1}^1 f d\hat{x}_3, \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} - \frac{2\delta^2}{3} \operatorname{div}_{\hat{x}} \int_Y \underset{\approx}{a} \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_1 + \underset{\approx}{a} \nabla_{\hat{y}} w_1^1 d\hat{y} + 2 \int_Y \underset{\approx}{a}^T \nabla_{\hat{y}} w_1^0 + \underset{\approx}{a}^T \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_0 + a_{33} \bar{w}_1 d\hat{y} = \\ = \delta \int_Y \int_{-1}^1 f \hat{x}_3 d\hat{x}_3. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Introduzimos os problemas de célula

$$\operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\approx}{a} \nabla_{\hat{y}} \bar{\chi}_j \right] = - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial a_{\alpha j}}{\partial \hat{y}_\alpha} \quad \text{em } Y \quad (2.31)$$

para $j = 1, 2, 3$ e a função

$$w_1^1(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{\beta=1}^2 \bar{\chi}_\beta \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial x_\beta}. \quad (2.32)$$

Verificamos que (2.32) satisfaz (2.28).

Podemos reescrever (2.27) da seguinte forma

$$\operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\bar{a} \nabla_{\hat{y}} w_0^1 \right] = - \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial \hat{y}_\alpha} \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial x_\beta} - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial \hat{y}_\alpha} \bar{w}_1.$$

Sendo assim, a função w_0^1 é dada por

$$w_0^1(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{\beta=1}^2 \bar{\chi}_\beta \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial x_\beta} + \bar{\chi}_3 \bar{w}_1. \quad (2.33)$$

Verificamos que (2.33) satisfaz (2.27).

Substituindo (2.33) em (2.29), obtemos

$$-2 \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\bar{A} \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_0 \right] - 2 \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\bar{A} \bar{w}_1 \right] = \int_{-1}^1 f d\hat{x}_3, \quad (2.34)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{A}_{ij} &= \int_Y a_{ij} + \sum_{\beta=1}^2 a_{i\beta} \frac{\partial \bar{\chi}_j}{\partial \hat{y}_\beta} d\hat{y}, \quad \text{para } i, j = 1, 2, \\ \bar{A}_i &= \int_Y a_{i3} + \sum_{\beta=1}^2 a_{i\beta} \frac{\partial \bar{\chi}_3}{\partial \hat{y}_\beta} d\hat{y}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Substituindo (2.33) e (2.32) em (2.30), temos

$$-\frac{2\delta^2}{3} \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\bar{A} \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_1 \right] + 2\bar{A}^T \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_0 + 2\bar{A}_{33} \bar{w}_1 = \delta \int_{-1}^1 f \hat{x}_3 d\hat{x}_3. \quad (2.36)$$

Tomando o limite quando δ tende a zero em (2.36) obtemos

$$2\bar{A}^T \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_0 + 2\bar{A}_{33} \bar{w}_1 = 0,$$

donde obtemos

$$\bar{w}_1 = -\frac{1}{\bar{A}_{33}} \bar{A}^T \cdot \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_0. \quad (2.37)$$

Substituindo (2.37) em (2.34)

$$\begin{aligned} -2 \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\overline{B} \nabla_{\hat{x}} \overline{w}_0 \right] &= \int_{-1}^1 f d\hat{x}_3, \\ \overline{w}_0 &= 0, \end{aligned} \tag{2.38}$$

onde

$$\overline{B}_{ij} = \overline{A}_{ij} - \frac{\overline{A}_{i3} \overline{A}_{3j}}{\overline{A}_{33}}, \quad \text{para } i, j = 1, 2.$$

Observemos que, novamente, o problema limite obtido a partir do problema bidimensional via modelagem hierárquica quando consideramos os casos limite quando ϵ tende a zero e a seguir quando δ tende a zero é idêntico ao problema obtido via métodos assintóticos, isto é, o problema (2.38) é idêntico ao problema (2.2). Desta forma, ao aplicarmos a modelagem hierárquica como técnica de redução de dimensão e considerarmos os casos limite, obtemos os mesmos problemas obtidos via métodos assintóticos. Portanto ao aplicarmos a modelagem hierárquica à equação de Poisson (1.1), obtemos o sistema de equações bidimensionais (1.3) e (1.4). A partir deste sistema analisamos os casos limite quando δ tende a zero e a seguir ϵ tende a zero e ϵ tende a zero e a seguir δ tende a zero e, do ponto de vista formal, obtivemos os resultados de Caillerie [Caillerie (1981)].

A seguir apresentamos a consistência para os limites quando δ e ϵ tendem a zero a partir do modelo hierárquico. Para tanto, introduzimos os operadores

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}} : V(P^\delta) &\rightarrow V_1(P^\delta) \\ u_{3D}^{\delta\epsilon} &\mapsto w_0^\epsilon(\underline{x}) + w_1^\epsilon(\underline{x})x_3 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} : V(P) &\rightarrow V_1(P) \\ \overline{u}_{3D}^\delta &\mapsto \overline{w}_0(\hat{x}) + \overline{w}_1(\hat{x})\hat{x}_3, \end{aligned}$$

onde $V_1(P^\delta)$ e $V_1(P)$ são definidos em (2.18). As funções w_0^ϵ e w_1^ϵ são soluções para as equações (1.3) e (1.4) e pertencem a $H_0^1(\Omega)$. As funções \overline{w}_0 e \overline{w}_1 são soluções

para as equações (2.34) e (2.36), pertencendo também a $H_0^1(\Omega)$. Os operadores $\overline{\mathcal{H}}$ e $\hat{\mathcal{H}}$ denotam a redução de dimensão via modelagem hierárquica para a equação de Poisson no domínio P^δ e para a equação homogeneizada no domínio P .

2.4.4 O limite $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \overline{\mathcal{H}}(u_{3D}^{\delta\epsilon})$

O objetivo desta seção é mostrar a convergência de maneira rigorosa quando utilizamos modelagem hierárquica como técnica de redução de dimensão. Para tanto, consideramos a equação de Poisson (1.1) e aplicamos a técnica de modelagem hierárquica a ela, utilizando um modelo hierárquico de ordem um a partir do sistema bidimensional obtido na Seção 2.4.3.

Observemos que o problema limite homogeneizado é um sistema acoplado para as funções \overline{w}_0 e \overline{w}_1 , representado pelas equações (2.34) e (2.36). Provar a convergência das sequências de funções $\{w_0^\epsilon\}$ e $\{w_1^\epsilon\}$, para as funções \overline{w}_0 e \overline{w}_1 , neste caso, não é uma tarefa fácil. Sendo assim, propomos uma nova metodologia: aplicar a modelagem hierárquica ao problema limite homogeneizado (2.16), isto é, verificar se tomar o limite quando ϵ tende a zero no sistema bidimensional (1.3) e (1.4) obtido via modelagem hierárquica é equivalente à aplicação da modelagem hierárquica ao problema tridimensional homogeneizado (2.16). O resultado a seguir comprova esta equivalência.

Lema 2.4.1. *Seja $u_{3D}^{\delta\epsilon}$ a solução para o problema (1.1). As técnicas de redução de dimensão via modelagem hierárquica e método assintótico em ϵ , tomando-se o limite quando ϵ tende a zero, comutam, isto é,*

$$\hat{\mathcal{H}}(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_{3D}^{\delta\epsilon}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \overline{\mathcal{H}}(u_{3D}^{\delta\epsilon}).$$

Demonstração. De fato, pela definição do limite assintótico quando ϵ tende a zero,

isto é, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_{3D}^{\delta\epsilon}$ satisfaz

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{P^\delta} a^\epsilon \nabla u_{3D}^{\delta\epsilon} \nabla \xi d\underline{x} \right) = \int_{P^\delta} \overline{A} \nabla \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_{3D}^{\delta\epsilon} \right) \nabla \xi d\underline{x}, \quad \text{para todo } \xi \in V(P^\delta).$$

Lembremos da definição do espaço $V_1(P^\delta)$. Como $V_1(P^\delta) \subset V(P^\delta)$, podemos escolher, em particular, $\xi \in V_1(P^\delta)$, donde

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{P^\delta} a^\epsilon \nabla u_{3D}^{\delta\epsilon} \nabla \xi d\underline{x} \right) = \int_{P^\delta} \overline{A} \nabla \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_{3D}^{\delta\epsilon} \right) \nabla \xi d\underline{x}, \quad \text{para todo } \xi \in V_1(P^\delta).$$

Pela definição do operador $\hat{\mathcal{H}}$ podemos escrever

$$\int_{P^\delta} \overline{A} \nabla \left[\hat{\mathcal{H}} \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_{3D}^{\delta\epsilon} \right) \right] \nabla \xi d\underline{x} = \int_{P^\delta} \overline{A} \nabla \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_{3D}^{\delta\epsilon} \right) \nabla \xi d\underline{x}, \quad \text{para todo } \xi \in V_1(P^\delta).$$

Por outro lado,

$$\int_{P^\delta} a^\epsilon \nabla \left[\overline{\mathcal{H}} \left(u_{3D}^{\delta\epsilon} \right) \right] \nabla \xi d\underline{x} = \int_{P^\delta} a^\epsilon \nabla u_{3D}^{\delta\epsilon} \nabla \xi d\underline{x}, \quad \text{para todo } \xi \in V_1(P^\delta). \quad (2.39)$$

Aplicando, então, a definição do limite quando ϵ tende a zero a (2.39), temos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{P^\delta} a^\epsilon \nabla \left[\overline{\mathcal{H}} \left(u_{3D}^{\delta\epsilon} \right) \right] \nabla \xi d\underline{x} \right) = \int_{P^\delta} \overline{A} \nabla \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \overline{\mathcal{H}} \left(u_{3D}^{\delta\epsilon} \right) \right] \nabla \xi d\underline{x}$$

para todo $\xi \in V_1(P^\delta)$.

Então

$$\begin{aligned} \int_{P^\delta} \overline{A} \nabla \left[\hat{\mathcal{H}} \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_{3D}^{\delta\epsilon} \right) \right] \nabla \xi d\underline{x} &= \int_{P^\delta} \overline{A} \nabla \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_{3D}^{\delta\epsilon} \right) \nabla \xi d\underline{x} = \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{P^\delta} a^\epsilon \nabla u_{3D}^{\delta\epsilon} \nabla \xi d\underline{x} \right) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{P^\delta} a^\epsilon \nabla \left[\overline{\mathcal{H}} \left(u_{3D}^{\delta\epsilon} \right) \right] \nabla \xi d\underline{x} \right) = \\ &= \int_{P^\delta} \overline{A} \nabla \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \overline{\mathcal{H}} \left(u_{3D}^{\delta\epsilon} \right) \right] \nabla \xi d\underline{x} \quad \text{para todo } \xi \in V_1(P^\delta), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{P^\delta} \overline{A} \nabla \left[\hat{\mathcal{H}} \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_{3D}^{\delta\epsilon} \right) \right] \nabla \xi dx = \int_{P^\delta} \overline{A} \nabla \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \overline{\mathcal{H}} \left(u_{3D}^{\delta\epsilon} \right) \right] \nabla \xi dx,$$

para todo $\xi \in V_1(P^\delta)$.

Logo

$$\hat{\mathcal{H}} \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_{3D}^{\delta\epsilon} \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \overline{\mathcal{H}} \left(u_{3D}^{\delta\epsilon} \right).$$

□

Portanto, aplicar a técnica de modelagem hierárquica ao problema tridimensional original (1.1) e depois homogeneizar o problema resultante é equivalente a homogeneizar o problema tridimensional original e, a seguir, aplicar a técnica de modelagem hierárquica.

A partir do Lema 2.4.1, observemos que, a fim de mostrar a convergência para o caso $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \overline{\mathcal{H}} \left(u_{3D}^{\delta\epsilon} \right)$, é suficiente mostrar a convergência para o caso $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_{3D}^{\delta\epsilon}$ e, em seguida, aplicar a modelagem hierárquica. Desta forma, a convergência $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \overline{\mathcal{H}} \left(u_{3D}^{\delta\epsilon} \right)$ está justificada na Seção B.1 do Apêndice B, pois a mesma é clássica e existe na literatura.

2.4.4.1 O limite $\lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{\mathcal{H}} \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_{3D}^{\delta\epsilon} \right)$

Nesta seção apresentamos argumentos que nos conduzem a encontrar o limite em δ para as sequências $\{\bar{w}_0\}$ e $\{\bar{w}_1\}$, independentes de ϵ , que são soluções para o sistema homogeneizado (2.34) e (2.36), obtido a partir da modelagem hierárquica quando tomamos o limite quando δ tende a zero.

Para tanto, consideremos a formulação variacional para a equação (2.34) e para a

equação (2.36), donde obtemos a seguinte forma bilinear

$$\begin{aligned}
a((\bar{w}_0, \bar{w}_1), (v_0, v_1)) &= \int_{\Omega} \bar{A} \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_0 \nabla_{\hat{x}} v_0 d\hat{x} + \int_{\Omega} \bar{A} \bar{w}_1 \nabla_{\hat{x}} v_0 d\hat{x} + \frac{\delta^2}{3} \int_{\Omega} \bar{A} \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_1 \nabla_{\hat{x}} v_1 d\hat{x} \\
&+ \int_{\Omega} \bar{A}^t \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_0 v_1 d\hat{x} + \int_{\Omega} \bar{A}_{33} \bar{w}_1 v_1 d\hat{x} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{-1}^1 f v_0 d\hat{x}_3 d\hat{x} + \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} \int_{-1}^1 f \hat{x}_3 v_1 d\hat{x}_3 d\hat{x}.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Definimos

$$\|(\bar{w}_0, \bar{w}_1)\|_{1,\Omega}^2 = \|\bar{w}_0\|_{H^1(\Omega)}^2 + \delta^2 \|\bar{w}_1\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Lema 2.4.2. *A forma bilinear $a((\bar{w}_0, \bar{w}_1), (v_0, v_1))$ definida em (2.40), é coerciva, isto é*

$$a((\bar{w}_0, \bar{w}_1), (\bar{w}_0, \bar{w}_1)) \geq C \|(\bar{w}_0, \bar{w}_1)\|_{1,\Omega}^2.$$

Demonstração. Observemos que a matriz \underline{a}^ϵ é positiva definida. Sendo assim, de (B.18) obtemos

$$\bar{A} \underline{\xi} \underline{\xi} + \bar{A} \xi_3 \underline{\xi} + \bar{A}^t \underline{\xi} \xi_3 + \bar{A}_{33} \xi_3^2 \geq \alpha |\underline{\xi}|^2, \quad \text{para todo } \underline{\xi} \in \mathbb{R}^3.$$

Mas

$$\bar{A} \xi_3 \underline{\xi} = \bar{A}^t \underline{\xi} \xi_3.$$

então

$$\bar{A} \underline{\xi} \underline{\xi} + 2 \xi_3 \bar{A}^t \underline{\xi} + \bar{A}_{33} \xi_3^2 \geq \alpha |\underline{\xi}|^2.$$

Escolhendo, em particular, $\underline{\xi} = \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_0$ e $\xi_3 = \bar{w}_1$, temos

$$\bar{A} \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_0 \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_0 + 2 \bar{w}_1 \bar{A}^t \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_0 + \bar{A}_{33} \bar{w}_1 \geq \alpha \left(|\nabla_{\hat{x}} \bar{w}_0|^2 + |\bar{w}_1|^2 \right).$$

Logo

$$\begin{aligned}
a((\bar{w}_0, \bar{w}_1); (\bar{w}_0, \bar{w}_1)) &= \int_{\Omega} \bar{A} \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_0 \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_0 d\hat{x} + 2 \int_{\Omega} \bar{A} \bar{w}_1 \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_0 d\hat{x} \\
&+ \frac{\delta^2}{3} \int_{\Omega} \bar{A} \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_1 \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_1 d\hat{x} + \int_{\Omega} \bar{A}_{33} \bar{w}_1 \bar{w}_1 d\hat{x} \geq \frac{\delta^2}{3} \int_{\Omega} \bar{A} \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_1 \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_1 d\hat{x} \\
&+ \alpha \int_{\Omega} |\nabla_{\hat{x}} \bar{w}_0|^2 + |\bar{w}_1|^2 d\hat{x}. \quad (2.41)
\end{aligned}$$

Mas

$$\bar{A} \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_1 \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_1 \geq \alpha |\nabla_{\hat{x}} \bar{w}_1|^2.$$

Logo

$$\begin{aligned}
a((\bar{w}_0, \bar{w}_1); (\bar{w}_0, \bar{w}_1)) &\geq \frac{\delta^2 \alpha}{3} \int_{\Omega} |\nabla_{\hat{x}} \bar{w}_1|^2 d\hat{x} + \alpha \int_{\Omega} |\bar{w}_1|^2 d\hat{x} + \alpha \int_{\Omega} |\nabla_{\hat{x}} \bar{w}_0|^2 d\hat{x} \\
&\geq C \delta^2 \|\bar{w}_1\|_{H^1(\Omega)}^2 + \alpha \|\nabla_{\hat{x}} \bar{w}_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \underbrace{\geq}_{\text{Poincaré}} \\
&\bar{C} \left(\|\bar{w}_0\|_{H^1(\Omega)}^2 + \delta^2 \|\bar{w}_1\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) \geq \bar{C} \|(\bar{w}_0, \bar{w}_1)\|_{1,\Omega}^2. \quad (2.42)
\end{aligned}$$

□

A seguir, mostramos que a forma bilinear $a((\bar{w}_0, \bar{w}_1); (\bar{w}_0, \bar{w}_1))$ é limitada superiormente, com o objetivo de limitar a sequência $\{\bar{w}_0\}$. Observemos que

$$\begin{aligned}
a((\bar{w}_0, \bar{w}_1); (\bar{w}_0, \bar{w}_1)) &= \frac{1}{2} \int_P f \bar{w}_0 d\hat{x} + \frac{\delta}{2} \int_P f \hat{x}_3 \bar{w}_1 d\hat{x} \\
&\leq \frac{C}{2} \left(\int_P |f|^2 d\hat{x} \right)^{1/2} \left(\int_P |\bar{w}_0|^2 d\hat{x} \right)^{1/2} + \frac{C\delta}{2} \left(\int_P |f|^2 d\hat{x} \right)^{1/2} \left(\int_P |\hat{x}_3 \bar{w}_1|^2 d\hat{x} \right)^{1/2} \\
&= \frac{C}{2} \|f\|_{L^2(P)} \|\bar{w}_0\|_{L^2(\Omega)} + C\delta \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\bar{w}_1\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C \|f\|_{L^2(P)} \left(\|\bar{w}_0\|_{L^2(\Omega)} + \delta \|\bar{w}_1\|_{L^2(\Omega)} \right) \\
&\leq C \|f\|_{L^2(P)} \left(\|\bar{w}_0\|_{H^1(\Omega)} + \delta \|\bar{w}_1\|_{H^1(\Omega)} \right).
\end{aligned}$$

Porém existe uma constante, que denotaremos por C_1 tal que

$$\left(\|\bar{w}_0\|_{H^1(\Omega)}^2 + \delta^2 \|\bar{w}_1\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) \geq C_1 \left(\|\bar{w}_0\|_{H^1(\Omega)} + \delta \|\bar{w}_1\|_{H^1(\Omega)} \right)^2,$$

De (2.42) e usando a desigualdade anterior, temos

$$\begin{aligned} (\|\bar{w}_0\|_{H^1(\Omega)} + \delta\|\bar{w}_1\|_{H^1(\Omega)})^2 &\leq \bar{C} \left(\|\bar{w}_0\|_{H^1(\Omega)}^2 + \delta^2\|\bar{w}_1\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) \\ &\leq C_2\|f\|_{L^2(P)} \left(\|\bar{w}_0\|_{H^1(\Omega)} + \delta\|\bar{w}_1\|_{H^1(\Omega)} \right), \end{aligned}$$

$$\|\bar{w}_0\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\bar{w}_0\|_{H^1(\Omega)} + \delta\|\bar{w}_1\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2\|f\|_{L^2(P)}. \quad (2.43)$$

Portanto a sequência de funções $\{\bar{w}_0\}$, dependentes de δ , é limitada em $H^1(\Omega)$. Pelo Teorema B.1.3, existe uma subsequência de $\{\bar{w}_0\}$ que converge fraco para um limite \bar{w}_0^* em $H^1(\Omega)$. É possível mostrar que a sequência inteira $\{\bar{w}_0\}$ converge para \bar{w}_0^* , denotando por

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \bar{w}_0 = \bar{w}_0^*. \quad (2.44)$$

A seguir limitamos a sequência de funções $\{\bar{w}_1\}$, dependentes de δ , com o objetivo de se obter uma sequência que convirja fraco em $H^1(\Omega)$.

Lembremos da segunda equação do sistema

$$\begin{aligned} -\frac{2\delta^2}{3} \operatorname{div}_{\tilde{x}} \left[\bar{A} \nabla_{\tilde{x}} \bar{w}_1 \right] + 2\bar{A}_{33}\bar{w}_1 &= \delta \int_{-1}^1 f \hat{x}_3 d\hat{x}_3 - 2\bar{A}^t \nabla_{\tilde{x}} \bar{w}_0 \\ \bar{w}_0 = \bar{w}_1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

A formulação variacional para o problema (2.45) é

$$\begin{aligned} \frac{2\delta^2}{3} \int_{\Omega} \bar{A} \nabla_{\tilde{x}} \bar{w}_1 \nabla_{\tilde{x}} v_1 d\hat{x} + 2 \int_{\Omega} \bar{A}_{33} \bar{w}_1 v_1 d\hat{x} &= \delta \int_{-1}^1 f \hat{x}_3 v_1 d\hat{x} - 2 \int_{\Omega} \bar{A}^T \nabla_{\tilde{x}} \bar{w}_0 v_1 d\hat{x} \\ &\text{para todo } v_1 \in H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Logo, a partir de (2.46), temos

$$\delta^2 \|\nabla_{\tilde{x}} \bar{w}_1\|_{L^2(\Omega)} + \|\bar{w}_1\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\delta \|f \hat{x}_3\|_{L^2(\Omega)} + \|\bar{w}_0\|_{H^1(\Omega)} \right).$$

Então, de (2.43)

$$\delta^2 \|\bar{w}_1\|_{H^1(\Omega)} \leq \delta \|\bar{w}_1\|_{H^1(\Omega)} \leq C.$$

Como a sequência $\{\bar{w}_1\}$ é limitada em $H^1(\Omega)$, existe uma subsequência que converge fraco em $H^1(\Omega)$ para um limite \bar{w}_1^* . Tomando o limite quando δ tende a zero em (2.46), temos

$$\int_{\Omega} \bar{A}_{33} \bar{w}_1^* v_1 d\hat{x} = - \int_{\Omega} \bar{A}^T \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_0^* v_1 d\hat{x},$$

donde

$$\bar{w}_1^* = - \frac{1}{\bar{A}_{33}} \bar{A}^T \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_0^*.$$

Lembremos da forma bilinear mista (2.40), obtida pela soma das formas bilineares das duas equações do sistema,

$$\begin{aligned} a((\bar{w}_0, \bar{w}_1), (v_0, v_1)) &= \int_{\Omega} \bar{A} \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_0 \nabla_{\hat{x}} v_0 d\hat{x} + \int_{\Omega} \bar{A} \bar{w}_1 \nabla_{\hat{x}} v_0 d\hat{x} + \frac{\delta^2}{3} \int_{\Omega} \bar{A} \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_1 \nabla_{\hat{x}} v_1 d\hat{x} \\ &+ \int_{\Omega} \bar{A}^t \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_0 v_1 d\hat{x} + \int_{\Omega} \bar{A}_{33} \bar{w}_1 v_1 d\hat{x} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{-1}^1 f v_0 d\hat{x}_3 d\hat{x} + \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} \int_{-1}^1 f \hat{x}_3 v_1 d\hat{x}_3 d\hat{x}. \end{aligned}$$

Tomando o limite quando δ tende a zero em (2.40), obtemos

$$\int_{\Omega} \bar{A} \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_0^* \nabla_{\hat{x}} v_0 d\hat{x} + \int_{\Omega} \bar{A} \left[- \frac{1}{\bar{A}_{33}} \bar{A}^t \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_0^* \right] \nabla_{\hat{x}} v_0 d\hat{x} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{-1}^1 f v_0 d\hat{x}_3 d\hat{x}. \quad (2.47)$$

A formulação forte do problema (2.47) é

$$\begin{aligned} -2 \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\left(\bar{A} - \frac{1}{\bar{A}_{33}} \bar{A}^t \bar{A} \right) \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_0^* \right] &= \int_{-1}^1 f d\hat{x}_3 \quad \text{em } \Omega, \\ \bar{w}_0^* &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2.48)$$

donde podemos reescrevê-lo da seguinte forma

$$\begin{aligned} -2 \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\bar{B} \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_0^* \right] &= \int_{-1}^1 f d\hat{x}_3 \quad \text{em } \Omega, \\ \bar{w}_0^* &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (2.49)$$

onde

$$\bar{B}_{ij} = \bar{A}_{ij} - \frac{\bar{A}_{3j} \bar{A}_{i3}}{\bar{A}_{33}}, \quad \text{para } i, j = 1, 2.$$

O problema (2.49) é idêntico ao problema (2.38), obtido de maneira formal. Logo

$\bar{w}_0 = \bar{w}_0^*$. Isto implica que \bar{w}_0 é a única solução de (2.49). Consequentemente toda a seqüência em (2.44) converge para \bar{w}_0 .

2.5 Aproximações numéricas para o sistema bidimensional obtido via modelagem hierárquica

Ao introduzir a modelagem hierárquica como técnica de redução de dimensão, utilizando um modelo hierárquico de ordem um, geramos o sistema de equações (1.3) e (1.4). A fim de obter as funções w_0^ϵ e w_1^ϵ que são as soluções para o sistema, teríamos que introduzir um método numérico que o aproximasse de forma satisfatória.

Na literatura não há registros de métodos numéricos que resolvam de forma satisfatória este tipo de sistema para δ e ϵ arbitrários, uma vez que a relação entre os mesmos influencia no comportamento da solução. O trabalho de Carius [Carius (2006)] considera a equação de Poisson no domínio P^δ , porém a matriz \underline{a}^ϵ da seguinte forma

$$\underline{a}^\epsilon(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} \underline{a}^\epsilon(\tilde{x}) & 0 \\ 0 & a_{33}^\epsilon(\tilde{x}) \end{bmatrix}.$$

Portanto o sistema formado após a utilização de um modelo hierárquico de ordem um é mais simples, sendo dado por

$$\begin{aligned} -2 \operatorname{div} \left[\underline{a}^\epsilon \nabla w_0^\epsilon \right] &= \int_{-1}^1 f d\hat{x}_3 && \text{em } \Omega, \\ -\frac{2\delta^2}{3} \operatorname{div} \left[\underline{a}^\epsilon \nabla w_1^\epsilon \right] + 2a_{33}^\epsilon w_1^\epsilon &= \delta \int_{-1}^1 f \hat{x}_3 d\hat{x}_3 && \text{em } \Omega, \\ w_0^\epsilon = w_1^\epsilon &= 0 && \text{em } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Observemos que o sistema (2.50) é desacoplado, sendo a primeira equação um problema de difusão cuja solução é a função w_0^ϵ e a segunda é um problema de difusão-reação cuja solução é a função w_1^ϵ , ambos com a presença de coeficientes oscilatórios. Para este caso, Carius [Carius (2006)] utiliza dois métodos de elementos finitos multiescala: o Residual Free Bubbles (RFB) e o Multiscale Finite

Element Method (MsFEM) proposto por Hou et. al [Hou et al. (1999)], obtendo-se excelentes aproximações para a solução do sistema.

2.6 Conclusões

No presente capítulo apresentamos a equação de Poisson em um domínio heterogêneo tridimensional de espessura pequena, denotado por P^δ . Primeiramente apresentamos os métodos assintóticos propostos por Caillerie [Caillerie (1981)]. Observamos que os modelos obtidos a partir desta metodologia apresentavam algumas desvantagens, as quais destacamos: a dependência da periodicidade das inclusões longitudinais no domínio e a obtenção de dois modelos bidimensionais distintos para os casos limite. Objetivando eliminar estas desvantagens, propomos a técnica de redução de dimensão denominada de *modelagem hierárquica*. Ao considerarmos o modelo hierárquico de ordem um, obtivemos um modelo bidimensional **único** sem qualquer relação com a periodicidade do parâmetro ϵ e que se comporta como os modelos bidimensionais obtidos por Caillerie [Caillerie (1981)] nos casos limite, representando uma nova metodologia de redução de dimensão para este tipo de problema. Realizamos a demonstração formal destes resultados e as demonstrações rigorosas se encontram no Apêndice B. Além disso, citamos dois métodos numéricos que podem ser usados para aproximar as soluções do sistema bidimensional obtido a partir da modelagem hierárquica para um caso particular no qual a matriz \underline{a}^ϵ é bloco diagonal. Sugerimos como trabalhos futuros a confecção de um método numérico para o sistema bidimensional obtido via modelagem hierárquica.

Capítulo 3

O problema de elasticidade numa placa heterogênea tridimensional

3.1 Introdução

No Capítulo 2 apresentamos a equação de Poisson em uma placa heterogênea tridimensional. Propomos para este problema uma metodologia alternativa para a obtenção do modelo bidimensional a partir do problema tridimensional, chamada de modelagem hierárquica, a qual foi descrita e analisada no Capítulo 2. Neste capítulo consideramos que o domínio seja novamente a placa P^δ de espessura 2δ com as inclusões características heterogêneas presentes na direção longitudinal, denotadas por ϵ , porém consideramos o problema de elasticidade linear neste domínio. Este problema, assim como a equação de Poisson, apresenta dificuldades relacionadas à presença dos dois parâmetros pequenos e da relação entre eles. Nas engenharias, as derivações destes modelos são feitas utilizando-se argumentos físicos. Ciarlet e Destuynder [Ciarlet e Destuynder (1979)] mostraram que o deslocamento de um corpo homogêneo tridimensional converge para a solução de equações biharmônicas bidimensionais quando a espessura tende a zero. Propomos neste capítulo, mais uma vez, duas metodologias de redução de dimensão, com o objetivo de se encontrar modelos bidimensionais sem a utilização de argumentos físicos: através de métodos assintóticos ou de modelagem hierárquica, como foi feito para a equação de Poisson. Baseados no trabalho de Caillerie [Caillerie (1984)], obtemos através das expan-

sões assintóticas em torno de δ e de ϵ os modelos bidimensionais considerando-se os casos limite: primeiramente quando δ tende a zero e a seguir quando ϵ tende a zero e quando ϵ tende a zero e a seguir quando δ tende a zero. Os problemas limite obtidos são diferentes, como ocorreu no caso da equação de Poisson. Desta forma propomos novamente a modelagem hierárquica como metodologia alternativa e obtemos, para os casos limite, os mesmos problemas de Caillerie [Caillerie (1984)].

Sendo assim, consideramos o problema de elasticidade linear em uma placa heterogênea tridimensional de espessura pequena. Lembremos do problema de elasticidade tridimensional (1.5). Seja $\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon} : P^\delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ o vetor deslocamento e a tensão $\underline{\underline{\sigma}}^{\delta\epsilon} : P^\delta \rightarrow \mathbb{R}_{SIM}^{3 \times 3}$, tais que

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\sigma}}^{\delta\epsilon} &= \underline{e}(\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}), \quad -\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^{\delta\epsilon} = \underline{f}^\delta \quad \text{em } P^\delta, \\ \underline{\underline{\sigma}}^{\delta\epsilon} \cdot \underline{n} &= \underline{g}^\delta \quad \text{em } \partial P_\pm^\delta, \quad \underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon} = 0 \quad \text{em } \partial P_L^\delta, \end{aligned}$$

onde $\mathbb{R}_{SIM}^{3 \times 3}$ é o espaço das matrizes três por três simétricas, \underline{f}^δ representa a carga de volume e \underline{g}^δ a carga de tração nas face superior e inferior da placa. Denotamos a parte simétrica do gradiente de $\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}$ por

$$\underline{e}(\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}) = \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon} + \underline{\nabla}^T \underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}),$$

ou seja, $e_{ij}(\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}) = (\partial_i u_j^{\delta\epsilon} + \partial_j u_i^{\delta\epsilon}) / 2$. Temos ainda que $(\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^{\delta\epsilon})_i = \sum_{j=1}^3 \partial_j \sigma_{ij}^{\delta\epsilon}$.

O tensor de elasticidade $\underline{\underline{A}}$ é tal que

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{\tau}} = \frac{(1 + \nu)}{E} \underline{\underline{\tau}} - \frac{\nu}{E} \operatorname{tr}(\underline{\underline{\tau}}) \underline{I},$$

onde $E > 0$ é o módulo de Young, $\nu \in [0, 1/2)$ é o coeficiente de Poisson e \underline{I} é a matriz identidade três por três.

Definimos ainda

$$\underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\sigma}} = \sum_{i,j=1}^3 \tau_{ij} \sigma_{ij} \tag{3.1}$$

e

$$\underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\sigma}} = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \tau_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}. \quad (3.2)$$

O tensor A^{-1} pode ser caracterizado da seguinte forma

$$\underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{\tau}} = \frac{E}{1 + \nu} \left[\underline{\underline{\tau}} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \text{tr}(\underline{\underline{\tau}}) \underline{\underline{I}} \right].$$

Observemos que o problema descrito anteriormente possui dois parâmetros pequenos: a espessura do domínio, 2δ , e as inclusões características heterogêneas presentes na direção longitudinal, que consideramos periódicas, de período ϵ . Conforme estudo feito no Capítulo 2 para a equação de Poisson, verificamos que, dependendo da relação entre os parâmetros δ e ϵ , obtemos problemas distintos quando consideramos os casos limite quando δ tende a zero e a seguir ϵ tende a zero ou ϵ tende a zero e a seguir δ tende a zero para o problema de elasticidade linear.

3.2 Os problemas limite

3.2.1 O limite quando δ tende a zero e a seguir ϵ tende a zero

O objetivo desta seção é apresentar os problemas limite bidimensionais quando δ tende a zero e a seguir ϵ tende a zero e quando ϵ tende a zero e a seguir δ tende a zero obtidos através dos métodos assintóticos aplicados aos parâmetros δ e ϵ . Como esses resultados se encontram no trabalho de Caillerie [Caillerie (1984)], omitimos o desenvolvimento do processo formal que nos conduz aos problemas apresentados. Consideramos o problema (1.5). Podemos reescrevê-lo da seguinte forma

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}^{\delta\epsilon} &= \underline{\underline{a}} \underline{\underline{e}}(\underline{\underline{u}}_{3D}^{\delta\epsilon}), & -\text{div} \underline{\underline{\sigma}}^{\delta\epsilon} &= \underline{\underline{f}}^\delta & \text{em } P^\delta, \\ \underline{\underline{\sigma}}^{\delta\epsilon} \cdot \underline{\underline{n}} &= \underline{\underline{g}}^\delta & \text{em } \partial P_\pm^\delta, & \underline{\underline{u}}_{3D}^{\delta\epsilon} = 0 & \text{em } \partial P_L^\delta, \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde $\underline{\underline{a}} = \underline{\underline{A}}^{-1}$. Caracterizamos o tensor $\underline{\underline{a}}$ por

$$\underline{\underline{a}} \underline{\underline{\tau}} = \frac{E}{(1 + \nu)} \left[\underline{\underline{\tau}} + \frac{\nu}{(1 - 2\nu)} \text{tr} \underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{I}} \right].$$

Lema 3.2.1. *O tensor de quarta ordem $\underset{\cong}{A}^{-1}$ é coercivo, ou seja, existe $q > 0$ tal que*

$$q\underset{\cong}{\tau} : \underset{\cong}{\tau} \leq \underset{\cong}{A}^{-1}\underset{\cong}{\tau} : \underset{\cong}{\tau}.$$

Demonstração. De acordo com a definição (3.2), temos que

$$\begin{aligned} \underset{\cong}{A}^{-1}\underset{\cong}{\tau} : \underset{\cong}{\tau} &= \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \left(\underset{\cong}{A}^{-1}\underset{\cong}{\tau} \right)_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \left\{ \frac{E}{1+\nu} \left[\underset{\cong}{\tau} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\underset{\cong}{\tau}) \underset{\cong}{I} \right] \right\}_{\alpha\beta} \cdot \tau_{\alpha\beta} \\ &= \frac{E}{1+\nu} \tau_{\alpha\beta} \cdot \tau_{\alpha\beta} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{tr}(\underset{\cong}{\tau}) \text{tr}(\underset{\cong}{\tau}) \geq \\ &\geq q \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \tau_{\alpha\beta} \cdot \tau_{\alpha\beta} \geq q\underset{\cong}{\tau} : \underset{\cong}{\tau}. \end{aligned}$$

Portanto o tensor $\underset{\cong}{A}^{-1}$ é coercivo. □

A seguir, reescrevemos o problema (3.3) no domínio P , definido pela mudança de variáveis (2.3). Desta forma, consideramos o limite quando δ tende a zero no problema (3.3) já reescrito no domínio P . Ao final deste processo obtemos um problema bidimensional.

Para tanto, definimos

$$[V(\Omega)]^3 = \{\underline{w} \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times H_0^2(\Omega)\},$$

munido com a seguinte norma

$$\|\underline{w}\|_{[V(\Omega)]^3}^2 = \int_{\Omega} \left| \underset{\cong}{\nabla} \underset{\cong}{w} \right|^2 d\hat{x} + \int_{\Omega} \left[\underset{\cong}{e} \left(\underset{\cong}{\nabla} w_3 \right) \right]^2 d\hat{x}.$$

Ao aplicarmos a metodologia proposta por Caillerie [Caillerie (1984)] para a redução de dimensão, isto é, tomando o limite quando δ tende a zero via métodos assintóticos, obtemos o seguinte problema bidimensional:

Encontrar $\underline{u}_{3D}^\epsilon = (u_1^\epsilon, u_3^\epsilon, u_3^\epsilon) \in [V(\Omega)]^3$ satisfazendo as equações

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \operatorname{div} \left[A^{-1} \underline{e}(\underline{u}_{3D}^\epsilon) \right] &= g^+ + g^-, & \text{em } \Omega, \\ -\frac{2}{3} \operatorname{div} \left[A^{-1} \underline{e}(\nabla u_3^\epsilon) \right] + Q &= g^+ - g^-, & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} Q + g_3^+ + g_3^- &= 0 & \text{em } \Omega, \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde

$$\begin{aligned} A^{-1} \underline{e}(\underline{u}_{3D}^\epsilon) &= \frac{E}{(1+\nu)} \left[\underline{e}(\underline{u}_{3D}^\epsilon) + \frac{\nu}{1-2\nu} \operatorname{div} \underline{u}_{3D}^\epsilon I \right], \\ A^{-1} \underline{e}(\nabla u_3^\epsilon) &= \frac{E}{1+\nu} \left[\underline{e}(\nabla u_3^\epsilon) + \frac{\nu}{1-2\nu} \Delta u_3^\epsilon I \right], \end{aligned}$$

e $Q \in [H_0^1(\Omega)]^2$. O problema (3.4) é equivalente ao modelo biarmônico e sua formulação variacional é:

Encontrar $\underline{u}_{3D}^\epsilon \in [V(\Omega)]^3$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} A^{-1} \underline{e}(\underline{u}_{3D}^\epsilon) \underline{e}(w) + \frac{2}{3} A^{-1} \underline{e}(\nabla u_3^\epsilon) \underline{e}(\nabla w_3) \right] d\hat{x} = \\ \int_{\Omega} \left[(g^+ + g^-) w + (g_3^+ + g_3^-) w_3 - (g^+ - g^-) \nabla w_3 \right] d\hat{x}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

para todo $\underline{w} \in [V(\Omega)]^3$.

Lema 3.2.2. *As formulações clássica e variacional do problema (3.4) são equivalentes. Entretanto, se o tensor de quarta ordem A^{-1} satisfaz a seguinte condição de coercividade*

Existe $q > 0$ tal que

$$q \underline{\tau} : \underline{\tau} \leq A^{-1} \underline{\tau} : \underline{\tau}, \quad \text{para todo } \underline{\tau} \in \mathbb{R}_{SIM}^{2 \times 2},$$

então o problema (3.4) possui uma única solução.

A partir do Lema 3.2.2 podemos concluir o seguinte resultado:

Teorema 3.2.1. *A função $\underline{u}_{3D}^\epsilon = (u_1^\epsilon, u_2^\epsilon, u_3^\epsilon)$ é a única solução do problema (3.4).*

A seguir aplicamos as técnicas da teoria de homogeneização clássica para o problema (3.4).

Seja $(\underline{\zeta}^{\alpha\beta\gamma})$ o único vetor sobre o espaço

$$[W(Y)]^3 = \left\{ \hat{\varphi} \in [H^1(Y)]^3 \text{ iguais dos lados opostos de } Y \text{ e } \int_Y \hat{\varphi} dy = 0 \right\}$$

satisfazendo

$$\int_Y \left[B_{\approx}^{11} e_{\approx}(\underline{\zeta}^{\alpha\beta\gamma} - \underline{P}^{\alpha\beta\gamma}) e_{\approx}(\hat{\varphi}) + B_{\approx}^{22} e_{\approx} \left[\nabla_{\approx} \left(\zeta_3^{\alpha\beta\gamma} - P_3^{\alpha\beta\gamma} \right) \right] e_{\approx} \left(\nabla_{\approx} \hat{\varphi}_3 \right) \right] dy = 0, \quad \text{para todo } \hat{\varphi} \in [W(Y)]^3, \quad (3.6)$$

onde $\underline{P}^{\alpha\beta\gamma}$ é um vetor definido por

$$\underline{P}^{\alpha\beta\gamma} = \left(\delta_{1\gamma} y_\beta \delta_{1\alpha}, \delta_{1\gamma} y_\beta \delta_{2\alpha}, \delta_{2\gamma} \frac{y_\alpha y_\beta}{2} \right), \quad \alpha, \beta, \gamma \in 1, 2.$$

Observação 3.2.1. *É fácil mostrar com métodos clássicos que o vetor $\underline{\zeta}^{\alpha\beta\gamma}$ satisfaz as seguintes equações*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\approx} \left[B_{\approx}^{11} e_{\approx} \left(\underline{\zeta}^{\alpha\beta\gamma} - \underline{P}^{\alpha\beta\gamma} \right) \right] &= 0 & \text{em } Y, \\ -\operatorname{div}_{\approx}^2 \left[B_{\approx}^{22} e_{\approx} \left[\nabla_{\approx} \left(\zeta_3^{\alpha\beta\gamma} - P_3^{\alpha\beta\gamma} \right) \right] \right] &= 0 & \text{em } Y \end{aligned} \quad (3.7)$$

e condições de fronteira periódicas em Y .

Então, quando ϵ tende a zero, o vetor $\underline{u}_{2D}^\epsilon = (u_1^\epsilon, u_2^\epsilon, u_3^\epsilon)$ converge em $[V(\Omega)]^3$ para $\underline{u}_{2D} = (u_1, u_2, u_3)$, a qual é a única solução do problema

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_{\approx} \left[B_{\approx}^{H11} e_{\approx}(u_{2D}) - B_{\approx}^{H12} e_{\approx}(\nabla_{\approx} u_3) \right] &= g^+ + g^- & \text{em } \Omega, \\ -\operatorname{div}_{\approx} \left[B_{\approx}^{H21} e_{\approx}(u_{2D}) - B_{\approx}^{H22} e_{\approx}(\nabla_{\approx} u_3) \right] + Q &= g^+ + g^- & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div}_{\approx} Q + g_3^+ + g_3^- &= 0 & \text{em } \Omega, \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde

$$\begin{aligned}
\left[B_{\approx}^{H11} e(u_{2D}) \right]_{\alpha\beta} &= \frac{2}{|Y|} \int_Y \frac{E}{1+\nu} \left[I - e \left(\zeta^{\alpha\beta 1} \right) \right]_{\alpha\beta} \left[e(u_{2D}) + \frac{\nu}{1-2\nu} \operatorname{div} u_{2D} I \right]_{\alpha\beta} dy, \\
\left[B_{\approx}^{H12} e(\nabla u_3) \right]_{\alpha\beta} &= \frac{2}{3|Y|} \int_Y \frac{E}{1+\nu} e \left(\nabla \zeta^{\alpha\beta 1} \right)_{\alpha\beta} \left[e(\nabla u_3) + \frac{\nu}{1-2\nu} \Delta u_3 I \right]_{\alpha\beta} dy, \\
\left[B_{\approx}^{H21} e(u_{2D}) \right]_{\alpha\beta} &= \frac{2}{|Y|} \int_Y \frac{E}{1+\nu} e \left(\zeta^{\alpha\beta 2} \right)_{\alpha\beta} \left[e(u_{2D}) + \frac{\nu}{1-2\nu} \operatorname{div} u_{2D} I \right]_{\alpha\beta} dy, \\
\left[B_{\approx}^{H22} e(\nabla u_3) \right]_{\alpha\beta} &= \frac{2}{3|Y|} \int_Y \frac{E}{1+\nu} \left[I - e \left(\nabla \zeta^{\alpha\beta 2} \right) \right]_{\alpha\beta} \left[e(\nabla u_3) + \frac{\nu}{1-2\nu} \Delta u_3 I \right]_{\alpha\beta} dy.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Para detalhes dos cálculos que nos conduzem aos resultados anteriores, ver Caillerie [Caillerie (1984)].

3.2.2 O limite quando ϵ tende a zero e a seguir δ tende a zero

O objetivo desta seção é apresentar o problema limite encontrado por Caillerie [Caillerie (1984)] considerando o problema de elasticidade linear tridimensional (1.5) tomando primeiramente o limite quando ϵ tende a zero e, a seguir, o limite quando δ tende a zero.

Primeiramente, reescrevemos o problema de elasticidade linear (1.5) no domínio P , aplicando a mudança de variáveis (2.3). Para tanto, definimos

$$\begin{aligned}
\hat{u}_{3D}^{\delta\epsilon}(\hat{x}) &= \underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}(\hat{x}, \delta\hat{x}_3) = \underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}(x), \\
\hat{\sigma}_{\approx}^{\epsilon}(\hat{u}_{3D}^{\delta\epsilon}) &= \hat{\sigma}_{\approx}^{\delta\epsilon}(u_{3D}^{\delta\epsilon}), \\
\hat{\sigma}_{\approx}^{\epsilon}(\hat{u}_{3D}^{\delta\epsilon}) &= \delta \hat{\sigma}_{\approx}^{\delta\epsilon}(u_{3D}^{\delta\epsilon}), \\
\sigma_{33}^{\epsilon}(\hat{u}_{3D}^{\delta\epsilon}) &= \delta^2 \sigma_{33}^{\delta\epsilon}(u_{3D}^{\delta\epsilon}), \\
\underline{f}(\hat{x}) &= (\delta^{-1} f_1^{\delta}, \delta^{-1} f_2^{\delta}, \delta^{-2} f_3^{\delta}), \\
\underline{g}(\hat{x}) &= (\delta^{-1} g_1^{\delta}, \delta^{-1} g_2^{\delta}, \delta^{-2} g_3^{\delta}).
\end{aligned}$$

Aplicando técnicas de homogeneização ao problema reescrito no domínio P , temos o seguinte resultado.

Teorema 3.2.2. *Quando ϵ tende a zero, $\hat{u}_{3D}^{\delta\epsilon}$ converge fraco em $[V(P)]^3$ para $\underline{u}_{3D}^{\delta}$,*

a qual é a única solução do problema

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^\delta &= \underline{\underline{a}}^H \underline{\underline{e}}(u_{3D}^\delta), \quad -\operatorname{div} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^\delta = \underline{f} \quad \text{em } P, \\ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^\delta \cdot \underline{n} &= \underline{g} \quad \text{em } \partial P_\pm, \quad u_{3D}^\delta = 0 \quad \text{em } \partial P_L. \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde o tensor $\underline{\underline{a}}^H$ pode ser definido

$$\left(\underline{\underline{a}}^H \underline{\underline{e}}(u_{3D}^\delta) \right)_{ij} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \frac{E}{1+\nu} \left[\underline{I} - \underline{\underline{e}}(\underline{\tilde{\theta}}^{ij}) \right]_{ij} \left[\underline{\underline{e}}(u_{3D}^\delta) + \frac{\nu}{1-2\nu} \operatorname{div}(u_{3D}^\delta) \underline{I} \right]_{ij} dy,$$

considerando-se que a função $\underline{\tilde{\theta}}^{ij}$ é a única solução do problema

$$\int_Y \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\nu}{(1-2\nu)} (\operatorname{tr}(\underline{\tilde{\theta}}^{ij}) - 1) \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{e}}(\underline{\tilde{\theta}}^{ij}) - \underline{\underline{I}} \right] : \underline{\underline{e}}(\varphi) dy = 0,$$

para todo $\varphi \in [W(Y)]^3$. (3.11)

Para a demonstração deste resultado, é possível aplicar à elasticidade a prova descrita nas páginas 71 e seguintes de Bensoussan e Papanicolaou [Bensoussan et al. (1978)].

A seguir apresentamos o resultado encontrado após a aplicação do limite quando δ tende a zero ao problema (3.10).

Teorema 3.2.3. *Quando δ tende a zero, $\underline{u}_{3D}^\delta = (\delta^{-1}u_1^\delta, \delta^{-1}u_2^\delta, u_3^\delta)$ converge fraco em $\underline{V}(P)$ para \underline{u}_{2D} , que é dada por*

$$\begin{aligned} \underline{u}_{2D} &= \underline{\tilde{u}}_{2D} - \hat{x}_3 \underline{\nabla} u_3, \\ (u_{2D})_3 &= u_3. \end{aligned}$$

onde o vetor $\underline{\bar{u}}_{2D} = ((\tilde{u}_{2D})_1, (\tilde{u}_{2D})_2, (u_{2D})_3)$ é a única solução para o problema

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \left[\underline{\underline{D}}^{11} \underline{\underline{e}}(\underline{\bar{u}}_{2D}) \right] &= \underline{g}^+ + \underline{g}^- \quad \text{em } \Omega, \\ -\operatorname{div} \left[\underline{\underline{D}}^{22} \underline{\underline{e}} \left(\underline{\nabla}(\underline{\bar{u}}_{2D})_3 \right) \right] + \underline{Q} &= \underline{g}^+ - \underline{g}^- \quad \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \underline{Q} + g_3^+ + g_3^- &= 0 \quad \text{em } \Omega, \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde

$$D_{\alpha\beta\gamma\delta}^{11} = 2 \left[a_{\alpha\beta\gamma\delta}^H - \frac{a_{\alpha\beta 333}^H a_{333\gamma\delta}^H}{a_{33333}^H} \right],$$

$$D_{\alpha\beta\gamma\delta}^{22} = \frac{2}{3} \left[a_{\alpha\beta\gamma\delta}^H - \frac{a_{\alpha\beta 333}^H a_{333\gamma\delta}^H}{a_{33333}^H} \right],$$

com $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2$.

A demonstração desse resultado encontra-se em Caillerie [Caillerie (1984)]. Observemos que os problemas (3.8) e (3.12) são os problemas limite quando δ tende a zero e a seguir ϵ tende a zero e quando ϵ tende a zero e a seguir δ tende a zero considerando o problema de elasticidade linear tridimensional (1.5) a partir dos métodos assintóticos descritos por Caillerie [Caillerie (1984)].

3.3 Os modelos hierárquicos

Na seção 3.2 apresentamos os problemas limite encontrados quando δ tende a zero e a seguir ϵ tende a zero e quando ϵ tende a zero e a seguir δ tende a zero considerando o problema de elasticidade linear tridimensional (1.5). A partir dos resultados encontrados utilizando os métodos assintóticos, percebemos que uma das desvantagens deste método é gerar dois problemas bidimensionais distintos dependendo da relação entre os parâmetros δ e ϵ , além da dependência de periodicidade para o tamanho característico das inclusões, ϵ .

Considerando as dificuldades anteriormente citadas, propomos uma metodologia alternativa para o processo de redução de dimensão conhecida como *modelagem hierárquica*, já apresentada no Capítulo 2 para a equação de Poisson. Através desta metodologia, geramos um único modelo bidimensional independente da relação entre os parâmetros δ e ϵ e também livre da periodicidade para as inclusões características longitudinais.

O objetivo desta seção é obter um único modelo bidimensional e mostrar que o mesmo é *consistente*, ou seja, que os problemas limite encontrados para os casos quando δ tende a zero e a seguir ϵ tende a zero ou quando ϵ tende a zero e a seguir

δ tende a zero são os mesmos problemas (3.8) e (3.12) apresentados na seção 3.2. A derivação do modelo a seguir se baseia no trabalho de Alessandrini et. al [Alessandrini et al. (1999)].

Para tanto, consideramos novamente o problema de elasticidade linear tridimensional original (1.5). É possível caracterizar a solução deste problema de forma alternativa através do princípio de Hellinger-Reissner, o qual nos oferece uma caracterização variacional para a solução do problema tridimensional (1.5). A fim de enunciar este princípio, definimos os espaços

$$\begin{aligned} [V(P^\delta)]^3 &= \{\underline{v} \in [H^1(P^\delta)]^3 : \underline{v} = 0 \text{ em } \partial P_L^\delta\}, \\ [S(P^\delta)]^{3 \times 3} &= [L^2(P^\delta)]^{3 \times 3}. \end{aligned}$$

O primeiro princípio de Hellinger-Reissner caracteriza a solução do problema de elasticidade linear (1.5), $(\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}, \underline{\sigma}^{\delta\epsilon})$, como o único ponto crítico do funcional $\mathcal{L}(\underline{v}, \underline{\tau})$ definido por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\underline{v}, \underline{\tau}) &= \frac{1}{2} \int_{P^\delta} \underline{A} \underline{\tau} : \underline{\tau} d\underline{x} - \int_{P^\delta} \underline{\tau} : \underline{e}(\underline{v}) d\underline{x} + \int_{P^\delta} \underline{f}^\delta \cdot \underline{v} d\underline{x} + \int_{\partial P_\pm^\delta} \underline{g}^\delta \cdot \underline{v} d\underline{x} \\ &\text{em } [V(P^\delta)]^3 \times [S(P^\delta)]^{3 \times 3}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Encontrar um ponto crítico para o operador \mathcal{L} é equivalente a encontrar $\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon} \in [V(P^\delta)]^3$ e $\underline{\sigma}^{\delta\epsilon} \in [S(P^\delta)]^{3 \times 3}$ tais que

$$\begin{aligned} \int_{P^\delta} \underline{A} \underline{\sigma}^{\delta\epsilon} : \underline{\tau} d\underline{x} - \int_{P^\delta} \underline{e}(\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}) : \underline{\tau} d\underline{x} &= 0 \quad \text{para todo } \underline{\tau} \in [S(P^\delta)]^{3 \times 3}, \\ \int_{P^\delta} \underline{\sigma}^{\delta\epsilon} : \underline{e}(\underline{v}) d\underline{x} &= \int_{P^\delta} \underline{f}^\delta \cdot \underline{v} d\underline{x} + \int_{\partial P_\pm^\delta} \underline{g}^\delta \cdot \underline{v} d\underline{x} \quad \text{para todo } \underline{v} \in [V(P^\delta)]^3. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Um primeiro tipo de modelos aparece quando procuramos por pontos críticos de \mathcal{L} em subespaços de $[V(P^\delta)]^3$ e $[S(P^\delta)]^{3 \times 3}$ com dependência polinomial na variável x_3 .

A fim de descrever os espaços considerados escrevemos $\text{grau}_3 \underline{v} = p$, com $\underline{v} \in [L^2(P^\delta)]^2$ e $p \in \mathbb{Z}$, a qual significa que \underline{v} é um polinômio em x_3 de grau p com

coeficientes em $[L^2(\Omega)]^2$. Se $p < 0$, interpretamos que \underline{v} é identicamente nulo.

Por exemplo, seja p um inteiro positivo. Consideremos

$$\begin{aligned} [V(P^\delta, p)]^3 &= \{\underline{v} \in [V(P^\delta)]^3 : \text{grau}_3 \underline{v} \leq p, \text{grau}_3 v_3 \leq p - 1\}, \\ [S(P^\delta, p)]^{3 \times 3} &= \{\underline{\tau} \in [S(P^\delta)]^{3 \times 3} : \text{grau}_3 \underline{\tau} \leq p, \text{grau}_3 \underline{\tau} \leq p - 1, \text{grau}_3 \tau_{33} \leq p - 2\}. \end{aligned}$$

Então um ponto crítico $(\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}(p), \underline{\sigma}^{\delta\epsilon}(p)) \in [V(P^\delta, p)]^3 \times [S(P^\delta, p)]^{3 \times 3}$ de \mathcal{L} caracteriza o modelo $HR_1(p)$. Variando cuidadosamente os graus dos polinômios componentes do deslocamento e do tensor das tensões em diferentes subespaços, obtemos modelos diferentes.

De forma análoga ao problema tridimensional original (1.5), os modelos podem ser equivalentemente caracterizados por uma formulação variacional, isto é, procuramos $\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon} \in [V(P^\delta, p)]^3$ e $\underline{\sigma}^{\delta\epsilon}(p) \in [S(P^\delta, p)]^{3 \times 3}$ tais que

$$\begin{aligned} \int_{P^\delta} \underline{A} \underline{\sigma}^{\delta\epsilon}(p) : \underline{\tau} d\underline{x} - \int_{P^\delta} \underline{e}(\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}(p)) : \underline{\tau} d\underline{x} &= 0 \quad \text{para todo } \underline{\tau} \in [S(P^\delta, p)]^{3 \times 3}, \\ \int_{P^\delta} \underline{\sigma}^{\delta\epsilon}(p) : \underline{e}(\underline{v}) d\underline{x} &= \int_{P^\delta} \underline{f}^\delta \cdot \underline{v} d\underline{x} + \int_{\partial P^\delta_\pm} \underline{g}^\delta \cdot \underline{v} d\underline{x} \quad \text{para todo } \underline{v} \in [V(P^\delta, p)]^3. \end{aligned} \tag{3.15}$$

3.3.1 O Modelo $HR_1(1)$

Como primeira tentativa de obtenção de um modelo hierárquico, consideramos o modelo $HR_1(1)$, ou seja, o modelo gerado a partir do primeiro princípio de Hellinger-Reissner para polinômios de grau 1 na variável x_3 .

Para a dedução deste modelo escolhemos a formulação variacional (3.15) e consideramos polinômios de grau 1 na variável x_3 . A dedução a seguir se baseia no trabalho de Madureira [Madureira (1999)].

Para tanto, consideremos as funções $(\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}(1), \underline{\sigma}^{\delta\epsilon}(1))$ dadas da seguinte forma

$$\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}(1) = \begin{pmatrix} \eta(\underline{x}) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\varphi(\underline{x})x_3 \\ w(\underline{x}) \end{pmatrix},$$

e

$$\underline{\sigma}^{\delta\epsilon}(1) = \begin{pmatrix} \underline{\sigma}^0(\underline{x}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{\sigma}^1(\underline{x})x_3 & \underline{\sigma}^0(\underline{x}) \\ (\underline{\sigma}^0)^T(\underline{x}) & 0 \end{pmatrix},$$

sendo $\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon} \in [V(P^\delta, 1)]^3$ e $\underline{\sigma}^{\delta\epsilon}(1) \in [S(P^\delta, 1)]^{3 \times 3}$. Consideramos, primeiramente, a função teste $\underline{\tau} \in [S(P^\delta, 0)]^{3 \times 3}$ na primeira equação de (3.15) da seguinte forma

$$\underline{\tau}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \underline{\tau}(\underline{x}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Então

$$\underline{A}\underline{\sigma}^{\delta\epsilon}(1) : \underline{\tau}(\underline{x}) = \frac{(1+\nu)}{E} \left(\underline{\sigma}^0(\underline{x}) + \underline{\sigma}^1(\underline{x})x_3 \right) \underline{\tau}(\underline{x}) - \frac{\nu}{E} \left(\underline{\sigma}^0(\underline{x}) + \underline{\sigma}^1(\underline{x})x_3 \right) \underline{\tau}(\underline{x}),$$

donde

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{-\delta}^{\delta} \underline{A}\underline{\sigma}^{\delta\epsilon}(1) : \underline{\tau}(\underline{x}) dx_3 d\underline{x} \\ &= \int_{\Omega} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{(1+\nu)}{E} \underline{\sigma}^0(\underline{x}) : \underline{\tau}(\underline{x}) + \frac{(1+\nu)}{E} \underline{\sigma}^1(\underline{x}) : \underline{\tau}(\underline{x})x_3 dx_3 d\underline{x} - \\ & \quad \int_{\Omega} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\nu}{E} \underline{\sigma}^0(\underline{x}) : \underline{\tau}(\underline{x}) - \frac{\nu}{E} \underline{\sigma}^1(\underline{x}) : \underline{\tau}(\underline{x})x_3 dx_3 d\underline{x} \\ &= \int_{\Omega} 2\delta \left[\frac{(1+\nu)}{E} \underline{\sigma}^0(\underline{x}) - \frac{\nu}{E} \underline{\sigma}^0(\underline{x}) \right] : \underline{\tau}(\underline{x}) d\underline{x}. \end{aligned}$$

De forma análoga

$$\underline{e}(\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}(1)) : \underline{\tau} = \underline{e}(\eta)\underline{\tau} - x_3 \underline{e}(\varphi)\underline{\tau}.$$

Então

$$\int_{P^\delta} \underline{e}(u_{3D}^{\delta\epsilon}(1)) : \underline{\tau} d\underline{x} = \int_{\Omega} \int_{-\delta}^{\delta} \underline{e}(\underline{\eta}) : \underline{\tau} - x_3 \underline{e}(\underline{\varphi}) : \underline{\tau} dx_3 d\underline{x} = \int_{\Omega} 2\delta \underline{e}(\underline{\eta}) : \underline{\tau} d\underline{x}.$$

Logo

$$\int_{\Omega} 2\delta \left[\frac{1+\nu}{E} \underline{\sigma}^0(\underline{x}) - \frac{\nu}{E} \underline{\sigma}^0(\underline{x}) \right] : \underline{\tau}(\underline{x}) d\underline{x} = \int_{\Omega} 2\delta \underline{e}(\underline{\eta}) : \underline{\tau}(\underline{x}) d\underline{x},$$

donde $A \underline{\sigma}^0 = \underline{e}(\underline{\eta})$ e, portanto,

$$\underline{\sigma}^0 = A^{-1} \underline{e}(\underline{\eta}). \quad (3.17)$$

Analogamente, consideramos a função teste $\underline{v} \in [V(P^\delta, 0)]^3$, isto é, $\underline{v}(\underline{x}) = (\underline{v}(\underline{x}), 0)$ com $\underline{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2$ na segunda equação de (3.15). Portanto

$$\underline{\sigma}^{\delta\epsilon}(1) : \underline{e}(\underline{v}) = \left[\underline{\sigma}^0(\underline{x}) + \underline{\sigma}^1(\underline{x})x_3 \right] : \underline{e}(\underline{v}) = \underline{\sigma}^0(\underline{x}) : \underline{e}(\underline{v}) + \underline{\sigma}^1(\underline{x}) : \underline{e}(\underline{v})x_3.$$

Então

$$\int_{P^\delta} \underline{\sigma}^{\delta\epsilon}(1) : \underline{e}(\underline{v}) d\underline{x} = \int_{\Omega} \int_{-\delta}^{\delta} \underline{\sigma}^0(\underline{x}) : \underline{e}(\underline{v}) + \underline{\sigma}^1(\underline{x}) : \underline{e}(\underline{v})x_3 dx_3 d\underline{x} = \int_{\Omega} 2\delta \underline{\sigma}^0(\underline{x}) : \underline{e}(\underline{v}) d\underline{x}.$$

Logo a segunda equação de (3.15) pode ser escrita como

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma}^0 : \underline{e}(\underline{v}) d\underline{x} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \delta^{-1} \left(\int_{-\delta}^{\delta} \underline{f}^\delta dx_3 \right) \cdot \underline{v} d\underline{x} + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \delta^{-1} \left[\underline{g}^\delta(\underline{x}, \delta) \underline{v} + \underline{g}^\delta(\underline{x}, -\delta) \underline{v} \right] d\underline{x}.$$

Definimos

$$\begin{aligned} \underline{f}^0 &= \delta^{-1} \int_{-\delta}^{\delta} \underline{f}^\delta dx_3, \\ \underline{g}^0 &= \frac{1}{2} \left[\underline{g}^\delta(\underline{x}, \delta) + \underline{g}^\delta(\underline{x}, -\delta) \right]. \end{aligned}$$

e, desta forma,

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma}^0 : \underline{e}(\underline{v}) d\underline{x} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \underline{f}^0 + \delta^{-1} \underline{g}^0 \right) \cdot \underline{v} d\underline{x} \text{ para todo } \underline{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2.$$

De (3.17), temos

$$\int_{\Omega} A^{-1} \underline{\underline{e}}(\underline{\underline{\eta}}) : \underline{\underline{e}}(\underline{\underline{v}}) d\underline{\underline{x}} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \underline{\underline{f}}^0 + \delta^{-1} \underline{\underline{g}}^0 \right) \cdot \underline{\underline{v}} d\underline{\underline{x}} \text{ para todo } \underline{\underline{v}} \in [H_0^1(\Omega)]^2.$$

Aplicando integração por partes, temos

$$- \int_{\Omega} \underline{\underline{\operatorname{div}}} \left[A^{-1} \underline{\underline{e}}(\underline{\underline{\eta}}) \right] \cdot \underline{\underline{v}} d\underline{\underline{x}} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \underline{\underline{f}}^0 + \delta^{-1} \underline{\underline{g}}^0 \right) \cdot \underline{\underline{v}} d\underline{\underline{x}} \text{ para todo } \underline{\underline{v}} \in [H_0^1(\Omega)]^2.$$

Logo a função $\underline{\underline{\eta}}$ satisfaz à equação de membrana (1.6)

$$\begin{aligned} -\delta \underline{\underline{\operatorname{div}}} \left[A^{-1} \underline{\underline{e}}(\underline{\underline{\eta}}) \right] &= \frac{\delta}{2} \underline{\underline{f}}^0 + \underline{\underline{g}}^0 && \text{em } \Omega, \\ \underline{\underline{\eta}} &= 0 && \text{em } \partial\Omega, \end{aligned}$$

e após determiná-la, é possível determinar $\underline{\underline{\sigma}}^0$ por (3.17).

A fim de obter as funções $\underline{\underline{\varphi}}$, w e $\underline{\underline{\sigma}}^1$, consideramos as funções teste $\underline{\underline{\tau}} \in [S(P^\delta, 1)]^{3 \times 3}$

dadas por

$$\underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{x}}) = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{x}}) x_3 & \underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{x}}) \\ \underline{\underline{\tau}}^T(\underline{\underline{x}}) & 0 \end{pmatrix},$$

onde $\underline{\underline{\tau}} \in [L^2(\Omega)]^{2 \times 2}$ e $\underline{\underline{\tau}} \in [L^2(\Omega)]^2$.

Sendo assim

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\sigma}}^{\delta\epsilon}(1) : \underline{\underline{\tau}} &= \frac{(1+\nu)}{E} \underline{\underline{\sigma}}^0(\underline{\underline{x}}) : \underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{x}}) x_3 + \frac{(1+\nu)}{E} \underline{\underline{\sigma}}^1(\underline{\underline{x}}) : \underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{x}}) x_3^2 - \frac{\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}}^0(\underline{\underline{x}}) : \underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{x}}) x_3 \\ &\quad - \frac{\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}}^1(\underline{\underline{x}}) : \underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{x}}) x_3^2 + \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}}^0(\underline{\underline{x}}) \cdot \underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{x}}) + \frac{1+\nu}{E} \left(\underline{\underline{\sigma}}^0 \right)^T(\underline{\underline{x}}) \cdot \underline{\underline{\tau}}^T(\underline{\underline{x}}). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{(1+\nu)}{E} \underline{\underline{\sigma}}^0(\underline{\underline{x}}) : \underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{x}}) x_3 + \frac{(1+\nu)}{E} \underline{\underline{\sigma}}^1(\underline{\underline{x}}) : \underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{x}}) x_3^2 - \frac{\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}}^0(\underline{\underline{x}}) : \underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{x}}) x_3 \\ - \frac{\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}}^1(\underline{\underline{x}}) : \underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{x}}) x_3^2 + \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}}^0(\underline{\underline{x}}) \cdot \underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{x}}) + \frac{1+\nu}{E} \left(\underline{\underline{\sigma}}^0 \right)^T(\underline{\underline{x}}) \cdot \underline{\underline{\tau}}^T(\underline{\underline{x}}) dx_3 d\underline{\underline{x}}, \end{aligned}$$

donde

$$\int_{\Omega} \frac{2\delta^3}{3} \left[\frac{(1+\nu)}{E} \underline{\underline{\sigma}}^1(\underline{\underline{x}}) - \frac{\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}}^1(\underline{\underline{x}}) \right] : \underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{x}}) + 4\delta \frac{(1+\nu)}{E} \underline{\underline{\sigma}}^0(\underline{\underline{x}}) \cdot \underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{x}}) d\underline{\underline{x}}.$$

Por outro lado,

$$\underline{\underline{e}}(u_{3D}^{\delta\epsilon}(1)) : \underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{e}}(\eta) : \underline{\underline{\tau}} x_3 - x_3^2 \underline{\underline{e}}(\varphi) : \underline{\underline{\tau}} - \frac{1}{2} (\varphi - \nabla w) \cdot \underline{\underline{\tau}} - \frac{1}{2} (\varphi - \nabla w)^T \cdot \underline{\underline{\tau}}^T.$$

Então

$$\begin{aligned} \int_{P^\delta} \underline{\underline{e}}(u_{3D}^{\delta\epsilon}(1)) : \underline{\underline{\tau}} d\underline{\underline{x}} &= \int_{\Omega} \int_{-\delta}^{\delta} \underline{\underline{e}}(\eta) : \underline{\underline{\tau}} x_3 - x_3^2 \underline{\underline{e}}(\varphi) : \underline{\underline{\tau}} - (\varphi - \nabla w) \cdot \underline{\underline{\tau}} dx_3 d\underline{\underline{x}} = \\ &= \int_{\Omega} -\frac{2\delta^3}{3} \underline{\underline{e}}(\varphi) : \underline{\underline{\tau}} - 2\delta (\varphi - \nabla w) \cdot \underline{\underline{\tau}} d\underline{\underline{x}}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{2\delta^3}{3} \left[\frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}}^1(\underline{\underline{x}}) - \frac{\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}}^1(\underline{\underline{x}}) \right] : \underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{x}}) + 4\delta \frac{(1+\nu)}{E} \underline{\underline{\sigma}}^0(\underline{\underline{x}}) \cdot \underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{x}}) d\underline{\underline{x}} \\ = \int_{\Omega} -\frac{2\delta^3}{3} \underline{\underline{e}}(\varphi) : \underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{x}}) - 2\delta (\varphi - \nabla w) \cdot \underline{\underline{\tau}} d\underline{\underline{x}}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{2\delta^3}{3} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\sigma}}^1(\underline{\underline{x}}) : \underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{x}}) + 4\delta \frac{(1+\nu)}{E} \underline{\underline{\sigma}}^0(\underline{\underline{x}}) \cdot \underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{x}}) d\underline{\underline{x}} \\ = \int_{\Omega} -\frac{2\delta^3}{3} \underline{\underline{e}}(\varphi) : \underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{x}}) - 2\delta (\varphi - \nabla w) \cdot \underline{\underline{\tau}} d\underline{\underline{x}}, \end{aligned}$$

donde obtemos

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}^1(\underline{\underline{x}}) &= -\underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{e}}(\varphi), \\ \underline{\underline{\sigma}}^0(\underline{\underline{x}}) &= -\lambda (\varphi - \nabla w), \end{aligned} \tag{3.18}$$

onde $\lambda = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

Consideramos, então, $\underline{\underline{v}}(\underline{\underline{x}}) = (\underline{\underline{v}}(\underline{\underline{x}})x_3, 0)$ como função teste com $\underline{\underline{v}} \in [H_0^1(\Omega)]^2$.

Sendo assim, $\underline{v} \in [V(P^\delta, 1)]^3$, isto é,

$$\underline{e}(\underline{v}) = \begin{bmatrix} x_3 \underline{e}(\underline{v}) & \underline{v} \\ \underline{v}^T & 0 \end{bmatrix},$$

donde

$$\underline{\sigma}^{\delta\epsilon}(1) : \underline{e}(\underline{v}) = \underline{\sigma}^0(\underline{x}) : \underline{e}(\underline{v})x_3 + \underline{\sigma}^1(\underline{x}) : \underline{e}(\underline{v})x_3^2 + 2\underline{\sigma}^0(\underline{x}) \cdot \underline{v}.$$

Então

$$\begin{aligned} \int_{P^\delta} \underline{\sigma}^{\delta\epsilon}(1) : \underline{e}(\underline{v}) d\underline{x} &= \int_{\Omega} \int_{-\delta}^{\delta} \underline{\sigma}^0(\underline{x}) : \underline{e}(\underline{v})x_3 + \underline{\sigma}^1(\underline{x}) : \underline{e}(\underline{v})x_3^2 + 2\underline{\sigma}^0(\underline{x}) \cdot \underline{v} dx_3 d\underline{x} = \\ &= \int_{\Omega} \frac{2\delta^3}{3} \underline{\sigma}^1(\underline{x}) : \underline{e}(\underline{v}) + 4\delta \underline{\sigma}^0(\underline{x}) \cdot \underline{v} d\underline{x}. \end{aligned}$$

Substituindo pela relação (3.18), obtemos que

$$\int_{P^\delta} \underline{\sigma}^{\delta\epsilon}(1) : \underline{e}(\underline{v}) d\underline{x} = \int_{\Omega} -\frac{2\delta^3}{3} A^{-1} \underline{e}(\underline{\varphi}) : \underline{e}(\underline{v}) - 4\delta \lambda (\underline{\varphi} - \underline{\nabla} w) \cdot \underline{v} d\underline{x}. \quad (3.19)$$

Temos ainda que

$$\int_{P^\delta} \underline{f}^\delta \cdot \underline{v} d\underline{x} = \int_{\Omega} \int_{-\delta}^{\delta} \underline{f}^\delta \cdot \underline{v} x_3 dx_3 d\underline{x} = \int_{\Omega} \left(\int_{-\delta}^{\delta} \underline{f}^\delta x_3 dx_3 \right) \cdot \underline{v} d\underline{x}.$$

Definimos

$$\begin{aligned} \underline{f}^1 &= \int_{-\delta}^{\delta} \underline{f}^\delta \cdot \underline{v} x_3 dx_3, \\ \underline{g}^1 &= \underline{g}^\delta(\underline{x}, \delta) + \underline{g}^\delta(\underline{x}, -\delta). \end{aligned}$$

Integrando por partes a relação (3.19), obtemos

$$\frac{2\delta^3}{3} \int_{\Omega} \operatorname{div} \left[A^{-1} \underline{e}(\underline{\varphi}) \right] \cdot \underline{v} d\underline{x} - 4\delta \lambda (\underline{\varphi} - \underline{\nabla} w) \cdot \underline{v} d\underline{x} = \delta \int_{\Omega} \underline{f}^1 \cdot \underline{v} d\underline{x} + \int_{\Omega} 2\delta \underline{g}^1 \cdot \underline{v} d\underline{x}.$$

Então

$$-\frac{\delta^3}{3} \operatorname{div} \left[A^{-1} \underline{e}(\underline{\varphi}) \right] + 2\delta \lambda (\underline{\varphi} - \underline{\nabla} w) = -\delta \left(\frac{1}{2} \underline{f}^1 + \underline{g}^1 \right).$$

Considerando $\underline{v}(x) = (0, v(x))$, então

$$\underline{e}(\underline{v}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \underline{\nabla} v \\ (\underline{\nabla} v)^T & 0 \end{bmatrix}$$

e portanto

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\delta\epsilon}(1) : \underline{e}(\underline{v}) = \underline{\underline{\sigma}}^0(x) \cdot \underline{\nabla} v + (\underline{\underline{\sigma}}^0)^T(x)(\underline{\nabla} v)^T = 2\underline{\underline{\sigma}}^0(x) \cdot \underline{\nabla} v.$$

Então a partir de (3.18),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{-\delta}^{\delta} 2\underline{\underline{\sigma}}^0 \cdot \underline{\nabla} v dx_3 d\underline{x} &= \int_{\Omega} \int_{-\delta}^{\delta} -2\lambda (\varphi - \underline{\nabla} w) \cdot \underline{\nabla} v dx_3 d\underline{x}, \\ -2 \int_{\Omega} 2\delta\lambda (\varphi - \underline{\nabla} w) \cdot \underline{\nabla} v d\underline{x} &= -4\delta \int_{\Omega} \lambda (\varphi - \underline{\nabla} w) \cdot \underline{\nabla} v d\underline{x}. \end{aligned}$$

Aplicando integração por partes

$$-4\delta \int_{\Omega} \lambda (\varphi - \underline{\nabla} w) \cdot \underline{\nabla} v d\underline{x} = 4\delta \int_{\Omega} \operatorname{div} [\lambda(\varphi - \underline{\nabla} w)] v d\underline{x}.$$

Temos ainda que

$$\int_{P^\delta} \underline{f}^\delta \cdot \underline{v} d\underline{x} = \int_{P^\delta} f_3^\delta v dx_3 d\underline{x} = \int_{\Omega} \left(\int_{-\delta}^{\delta} f_3^\delta dx_3 \right) v d\underline{x}$$

e

$$\int_{\partial P_{\pm}^\delta} \underline{g}^\delta \cdot \underline{v} d\underline{x} = 2 \int_{\Omega} [g_3^\delta(x, \delta) + g_3^\delta(x, -\delta)] v d\underline{x}.$$

Defino

$$\begin{aligned} f_3^0 &= \delta^{-1} \int_{-\delta}^{\delta} f_3^\delta dx_3 \\ g_3^0 &= [g_3^\delta(x, \delta) + g_3^0(x, -\delta)]. \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$2\delta \operatorname{div} \left[\lambda \left(\varphi - \nabla w \right) \right] = \frac{1}{2} \int_{-\delta}^{\delta} f_3^\delta dx_3 + \left[g_3^\delta(\underline{x}, \delta) + g_3^\delta(\underline{x}, -\delta) \right],$$

donde

$$2\delta \operatorname{div} \left[\lambda \left(\varphi - \nabla w \right) \right] = \frac{\delta}{2} f_3^0 + g_3^0.$$

Podemos concluir que as funções φ e w são soluções para as equações de Reissner-Mindlin (1.7)

$$\begin{aligned} -\frac{\delta^3}{3} \operatorname{div} \left[A^{-1} \underline{\underline{e}}(\varphi) \right] + 2\delta \lambda (\varphi - \nabla w) &= -\delta \left(\frac{1}{2} \underline{\underline{f}}^1 + \underline{\underline{g}}^1 \right) && \text{em } \Omega, \\ 2\delta \lambda \operatorname{div}(\varphi - \nabla w) &= \frac{\delta}{2} f_3^0 + g_3^0 && \text{em } \Omega, \\ \varphi &= 0, \quad w = 0 && \text{em } \partial\Omega, \end{aligned}$$

Uma vez conhecidas as funções φ e w podemos calcular os tensores $\underline{\underline{\sigma}}^1$ e $\underline{\underline{\sigma}}^0$ a partir de (3.18). Aplicando a mudança de variáveis (2.3) ao problema de membrana (1.6), temos

$$\begin{aligned} -2 \operatorname{div} \left[A^{-1} \underline{\underline{e}}(\eta) \right] &= \frac{\delta}{2} \bar{\underline{\underline{f}}}^0 + \bar{\underline{\underline{g}}}^0 && \text{em } \Omega, \\ \eta &= 0 && \text{em } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.20}$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{\underline{\underline{f}}}^0 &= \delta \int_{-\delta}^{\delta} \underline{\underline{f}}^\delta dx_3 = \int_{-1}^1 \underline{\underline{f}} d\hat{x}_3 \\ \bar{\underline{\underline{g}}}^0 &= \underline{\underline{g}}^+(\underline{x}, 1) + \underline{\underline{g}}^-(\underline{x}, -1). \end{aligned}$$

e as funções $\underline{\underline{g}}^+(\underline{x}, 1)$ e $\underline{\underline{g}}^-(\underline{x}, -1)$ são as funções $\underline{\underline{g}}^0(\underline{x}, \delta)$ e $\underline{\underline{g}}^0(\underline{x}, -\delta)$ no domínio escalonado P .

3.4 Consistência formal do modelo hierárquico $HR_1(1)$

Na seção 3.3 propomos a modelagem hierárquica como metodologia alternativa para o processo de redução de dimensão do problema de elasticidade tridimensional (1.5) a problemas bidimensionais. Nesta seção mostraremos, do ponto de vista formal, que os problemas bidimensionais encontrados via modelagem hierárquica coincidem com os problemas bidimensionais encontrados via métodos assintóticos e descritos por Caillerie [Caillerie (1984)].

Observemos que, do ponto de vista formal, a função $\underline{u}_{3D}^\epsilon$, solução da equação (3.4) e que a função $\underline{\eta}$, solução para a equação de membrana (1.6), são soluções para o mesmo problema bidimensional, a partir da definição para o tensor \underline{A}^{-1} . A conclusão anterior também é válida para as funções $\underline{\nabla} u_3^\epsilon$ e $\underline{\varphi}$. Portanto concluímos, de maneira formal, que ao aplicarmos a modelagem hierárquica como técnica de redução de dimensão e, a seguir tomar o limite quando δ tende a zero, obtemos o mesmo problema limite quando δ tende a zero fazendo a redução de dimensão via métodos assintóticos conforme Caillerie [Caillerie (1984)].

Como os problemas limite encontrados para o caso em que δ tende a zero foram os mesmos, podemos aplicar técnicas de homogeneização aos problemas (1.6) e (1.7), seguindo os mesmos passos de Bensoussan [Bensoussan et al. (1978)]. Portanto o problema resultante é idêntico ao problema (3.8).

Consideremos, então, os problemas (1.6) e (1.7). Precisamos aplicar as técnicas de homogeneização a estes problemas, novamente conforme os passos de Bensoussan [?] a fim de obter os modelos hierárquicos homogeneizados e, a seguir, tomar o limite quando δ tende a zero nesses problemas.

Conforme processo realizado para a equação de Poisson, verificamos que o processo de redução de dimensão via modelagem hierárquica e o processo de homogeneização comutam. Sendo assim, não haverá a necessidade de aplicar as técnicas de homogeneização às equações de membrana e Reissner-Mindlin para encontrarmos o problema limite quando δ tende a zero e a seguir ϵ tende a zero para verificar se o mesmo coincide com o problema limite obtido por Caillerie [Caillerie (1984)]

para o mesmo caso.

Portanto, definimos o operador H , que transforma o problema tridimensional original (1.5) em um problema bidimensional via modelagem hierárquica da seguinte forma

$$H : [V(P^\delta)]^3 \times [S(P^\delta)]^{3 \times 3} \rightarrow [V(P^\delta, 1)]^3 \times [S(P^\delta, 1)]^{3 \times 3}$$

$$(\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}, \underline{\underline{\sigma}}^{\delta\epsilon}) \rightarrow (\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}(1), \underline{\underline{\sigma}}^{\delta\epsilon}(1)).$$

onde $(\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}, \underline{\underline{\sigma}}^{\delta\epsilon})$ é solução para o problema de elasticidade tridimensional original (1.5) e $(\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}(1), \underline{\underline{\sigma}}^{\delta\epsilon}(1))$ é solução para o problema bidimensional obtido via modelagem hierárquica.

Definimos ainda o operador \overline{H} , que transforma o problema tridimensional homogeneizado (3.10) em um problema bidimensional homogeneizado via modelagem hierárquica

$$\overline{H} : [V(P)]^3 \times [S(P)]^{3 \times 3} \rightarrow [V(P, 1)]^3 \times [S(P, 1)]^{3 \times 3}$$

$$(\underline{u}_{3D}^\delta, \underline{\underline{\sigma}}^\delta) \rightarrow (\underline{u}_{3D}^\delta(1), \underline{\underline{\sigma}}^\delta(1)).$$

onde $(\underline{u}_{3D}^\delta, \underline{\underline{\sigma}}^\delta)$ é solução para o problema de elasticidade tridimensional homogeneizado (3.10) e $(\underline{u}_{3D}^\delta(1), \underline{\underline{\sigma}}^\delta(1))$ é solução para o problema bidimensional homogeneizado obtido via modelagem hierárquica.

A fim de validar este processo, utilizamos o Lema 3.4.1.

Lema 3.4.1. *Seja $(\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}, \underline{\underline{\sigma}}^{\delta\epsilon})$ a solução para o problema tridimensional original (1.5). As técnicas de redução de dimensão via modelagem hierárquica e homogeneização comutam, isto é*

$$\overline{H} \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}, \underline{\underline{\sigma}}^{\delta\epsilon}) \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (H (\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}, \underline{\underline{\sigma}}^{\delta\epsilon})).$$

Demonstração. Consideremos a formulação variacional para o problema de elasticidade linear (1.5):

Encontrar $(\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}, \underline{\sigma}^{\delta\epsilon}) \in [V(P^\delta)]^3 \times [S(P^\delta)]^{3 \times 3}$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{P^\delta} \underline{A} \underline{\sigma}^{\delta\epsilon} : \underline{\tau} d\underline{x} - \int_{P^\delta} \underline{e}(\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}) : \underline{\tau} d\underline{x} &= 0 \text{ para todo } \underline{\tau} \in [S(P^\delta)]^{3 \times 3}, \\ \int_{P^\delta} \underline{\sigma}^{\delta\epsilon} : \underline{e}(\underline{v}) d\underline{x} &= \int_{P^\delta} \underline{f}^\delta \cdot \underline{v} d\underline{x} + \int_{\partial P^\delta_\pm} \underline{g}^\delta \cdot \underline{v} d\underline{x} \text{ para todo } \underline{v} \in [V(P^\delta)]^3. \end{aligned}$$

Tomando o limite quando ϵ tende a zero nas equações acima

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{P^\delta} \underline{A} \underline{\sigma}^{\delta\epsilon} : \underline{\tau} d\underline{x} - \int_{P^\delta} \underline{e}(\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}) : \underline{\tau} d\underline{x} \right) &= \int_P \left(\underline{a}^H \right)^{-1} \underline{\tilde{\sigma}}^\delta : \underline{\hat{\tau}} d\underline{\hat{x}} - \int_P \underline{e}(\underline{\hat{u}}_{3D}^\delta) : \underline{\hat{\tau}} d\underline{\hat{x}}, \\ &\text{para todo } \underline{\tau} \in [S(P^\delta)]^{3 \times 3} \text{ e para todo } \underline{\hat{\tau}} \in [S(P)]^{3 \times 3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{P^\delta} \underline{\sigma}^{\delta\epsilon} : \underline{e}(\underline{v}) d\underline{x} \right) &= \int_P \underline{\tilde{\sigma}}^\delta : \underline{e}(\underline{\hat{v}}) d\underline{\hat{x}} \\ &\text{para todo } \underline{v} \in [V(P^\delta)]^3 \text{ e para todo } \underline{\hat{v}} \in [V(P)]^3. \end{aligned}$$

Como $[V(P^\delta, 1)]^3 \subset [V(P^\delta)]^3$ e $[S(P^\delta, 1)]^{3 \times 3} \subset [S(P^\delta)]^{3 \times 3}$, podemos escolher, em particular, $(\underline{v}, \underline{\tau}) \in [V(P^\delta, 1)]^3 \times [S(P^\delta, 1)]^{3 \times 3}$. De forma análoga, como $[V(P, 1)]^3 \subset [V(P)]^3$ e $[S(P, 1)]^{3 \times 3} \subset [S(P)]^{3 \times 3}$, podemos também escolher, em particular $(\underline{\hat{v}}, \underline{\hat{\tau}}) \in [V(P, 1)]^3 \times [S(P, 1)]^{3 \times 3}$, donde

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{P^\delta} \underline{A} \underline{\sigma}^{\delta\epsilon} : \underline{\tau} d\underline{x} - \int_{P^\delta} \underline{e}(\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}) : \underline{\tau} d\underline{x} \right) &= \int_P \left(\underline{a}^H \right)^{-1} \underline{\tilde{\sigma}}^\delta : \underline{\hat{\tau}} d\underline{\hat{x}} - \int_P \underline{e}(\underline{\hat{u}}_{3D}^\delta) : \underline{\hat{\tau}} d\underline{\hat{x}}, \\ &\text{para todo } \underline{\tau} \in [S(P^\delta, 1)]^{3 \times 3} \text{ e para todo } \underline{\hat{\tau}} \in [S(P, 1)]^{3 \times 3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{P^\delta} \underline{\sigma}^{\delta\epsilon} : \underline{e}(\underline{v}) d\underline{x} \right) &= \int_P \underline{\tilde{\sigma}}^\delta : \underline{e}(\underline{\hat{v}}) d\underline{\hat{x}} \\ &\text{para todo } \underline{v} \in [V(P^\delta, 1)]^3 \text{ e para todo } \underline{\hat{v}} \in [V(P, 1)]^3. \end{aligned}$$

Pela definição do operador \overline{H} , temos

$$\overline{H} \left(\int_P \left(\underline{a}^H \right)^{-1} \underline{\hat{\sigma}}^\delta : \underline{\hat{\tau}} d\underline{\hat{x}} \right) = \overline{H} \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{P^\delta} \underline{A} \underline{\sigma}^{\delta\epsilon} : \underline{\tau} d\underline{x} \right) \right]$$

para todo $\underline{\tau} \in [S(P^\delta, 1)]^{3 \times 3}$ e para todo $\underline{\hat{\tau}} \in [S(P, 1)]^{3 \times 3}$.

$$\overline{H} \left(\int_P \underline{e}(\underline{\hat{u}}_{3D}^\delta) : \underline{\hat{\tau}} d\underline{\hat{x}} \right) = \overline{H} \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{P^\delta} \underline{e}(\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}) : \underline{\tau} d\underline{x} \right)$$

para todo $\underline{\tau} \in \underline{S}(P^\delta, 1)$ e para todo $\underline{\hat{\tau}} \in \underline{S}(P, 1)$.

$$\overline{H} \left(\int_{P^\delta} \underline{\hat{\sigma}}^\delta : \underline{e}(\underline{\hat{v}}) d\underline{\hat{x}} \right) = \overline{H} \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{P^\delta} \underline{\sigma}^{\delta\epsilon} : \underline{e}(\underline{v}) d\underline{x} \right) \right]$$

para todo $\underline{v} \in [V(P^\delta, 1)]^3$ e para todo $\underline{\hat{v}} \in [V(P, 1)]^3$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} H \left(\int_{P^\delta} \underline{A} \underline{\sigma}^{\delta\epsilon} : \underline{\tau} d\underline{x} - \int_{P^\delta} \underline{e}(\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}) : \underline{\tau} d\underline{x} \right) = \\ \int_{P^\delta} \underline{A} H(\underline{\sigma}^{\delta\epsilon}) : \underline{\tau} d\underline{x} - \int_{P^\delta} \underline{e} [H(\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon})] : \underline{\tau} d\underline{x} = \\ \int_{P^\delta} \underline{A} \underline{\sigma}^{\delta\epsilon} : \underline{\tau} d\underline{x} - \int_{P^\delta} \underline{e}(\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}) : \underline{\tau} d\underline{x} \text{ para todo } \underline{\tau} \in [S(P^\delta, 1)]^{3 \times 3} \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$H \left(\int_{P^\delta} \underline{\sigma}^{\delta\epsilon} : \underline{e}(\underline{v}) d\underline{x} \right) = \int_{P^\delta} H(\underline{\sigma}^{\delta\epsilon}) : \underline{e}(\underline{v}) d\underline{x} = \int_{P^\delta} \underline{\sigma}^{\delta\epsilon} : \underline{e}(\underline{v}) d\underline{x}$$

para todo $\underline{v} \in [V(P^\delta, 1)]^3$. (3.22)

Aplicando a definição do limite quando ϵ tende a zero à (3.21) e (3.22), temos

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[H \left(\int_{P^\delta} A \sigma^{\delta\epsilon} : \tau dx - \int_{P^\delta} e(u_{3D}^{\delta\epsilon}) : \tau dx \right) \right] = \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{P^\delta} AH(\sigma^{\delta\epsilon}) : \tau dx - \int_{P^\delta} [H(u_{3D}^{\delta\epsilon})] : \tau dx \right) = \\ \int_P (a^H)^{-1} \bar{H}(\tilde{\sigma}^\delta) : \hat{\tau} dx - \int_P e[\bar{H}(\hat{u}_{3D}^\delta)] : \hat{\tau} dx \\ \text{para todo } \tau \in [S(P^\delta, 1)]^{3 \times 3} \text{ e para todo } \hat{\tau} \in [S(P, 1)]^{3 \times 3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[H \left(\int_{P^\delta} \sigma^{\delta\epsilon} : e(v) dx \right) \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{P^\delta} H(\sigma^{\delta\epsilon}) : e(\hat{v}) d\hat{x} \right) = \\ \int_P \bar{H}(\sigma^{\delta\epsilon}) : e(\hat{v}) d\hat{x} = \bar{H} \left(\int_P \sigma^{\delta\epsilon} : e(\hat{v}) d\hat{x} \right) \\ \text{para todo } v \in [V(P^\delta, 1)]^3 \text{ e para todo } \hat{v} \in [V(P, 1)]^3. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \bar{H} \left[\int_P (a^H)^{-1} \tilde{\sigma}^\delta : \hat{\tau} d\hat{x} \right] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[H \left(\int_{P^\delta} A \sigma^{\delta\epsilon} : \tau dx \right) \right], \\ \bar{H} \left(\int_P e(\hat{u}_{3D}^{\delta\epsilon}) : \hat{\tau} d\hat{x} \right) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[H \left(\int_{P^\delta} e(u_{3D}^{\delta\epsilon}) : \tau dx \right) \right], \\ \bar{H} \left(\int_P \sigma^{\delta\epsilon} : e(\hat{v}) d\hat{x} \right) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[H \left(\int_{P^\delta} \sigma^{\delta\epsilon} : e(v) dx \right) \right]. \end{aligned}$$

Portanto

$$\bar{H} \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (u_{3D}^{\delta\epsilon}, \sigma^{\delta\epsilon}) \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (H(u_{3D}^{\delta\epsilon}, \sigma^{\delta\epsilon})).$$

□

A partir deste resultado, com o objetivo de mostrar a equivalência do ponto de vista formal para os problemas limite quando ϵ tende a zero e a seguir δ tende a zero, podemos aplicar a modelagem hierárquica ao problema de elasticidade tridimensional homogeneizado.

Consideremos o problema de elasticidade linear tridimensional homogeneizado no domínio P , dado por (3.10).

A formulação variacional para o problema (3.10) é

$$\int_P \left(a^H \right)^{-1} \underline{\tilde{\sigma}}^\delta : \underline{\tau} dx - \int_P e(\underline{u}_{3D}^\delta) : \underline{\tau} dx = 0 \text{ para todo } \underline{\tau} \in [S(P)]^{3 \times 3},$$

$$\int_P \underline{\tilde{\sigma}}^\delta : e(\underline{v}) dx = \int_P \underline{f} \cdot \underline{v} dx + \int_{\partial P_\pm} \underline{g} \cdot \underline{v} dx \text{ para todo } \underline{v} \in [V(P)]^3.$$

Escolhemos novamente o modelo $HR_1(1)$. Sendo assim,

$$\underline{u}_{3D}^\delta(1) = \begin{pmatrix} \bar{\eta}(\underline{x}) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\bar{\varphi}(\underline{x})x_3 \\ \bar{w}(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

e

$$\underline{\tilde{\sigma}}^\delta(1) = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^0(\underline{x}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^1(\underline{x})x_3 & \bar{\sigma}^0(\underline{x}) \\ (\bar{\sigma}^0)^T(\underline{x}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicando o processo análogo ao realizado anteriormente e tomando o limite quando δ tende a zero, verificamos que a função $\bar{\eta}$ é solução para a equação de membrana

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \left[a^H e(\bar{\eta}) \right] &= g^+ + g^- & \text{em } \Omega, \\ \bar{\eta} &= 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.23}$$

e as funções $\bar{\varphi}$ e \bar{w} são soluções para as equações de Reissner-Mindlin

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3} \operatorname{div} \left[a^H e(\bar{\varphi}) \right] + 4\lambda(\bar{\varphi} - \nabla \bar{w}) &= g^+ - g^- & \text{em } \Omega, \\ 4\lambda \operatorname{div}(\bar{\varphi} - \nabla \bar{w}) &= g_3^+ + g_3^- & \text{em } \Omega, \\ \bar{\varphi} = 0, \bar{w} &= 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.24}$$

onde a^H está caracterizado por

$$\left(a^H e(\bar{\eta}) \right)_{\alpha\beta} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \frac{E}{1+\nu} \left[I - e(\theta^{\alpha\beta}) \right]_{\alpha\beta} \left[e(\bar{\eta}) + \frac{\nu}{1-2\nu} \operatorname{div}(\bar{\eta}) I \right]_{\alpha\beta} dy,$$

sendo que as funções $\theta^{\alpha\beta}$ estão definidas em (3.11).

Observemos que as equações de membrana (3.23) e as equações de Reissner-Mindlin

(3.24) coincidem com as equações (3.12).

3.5 Convergência do modelo de Reissner-Mindlin para o modelo de Kirchhoff-Love

Na seção 3.4 mostramos, de maneira formal, que os modelos bidimensionais gerados através dos métodos assintóticos são idênticos aos modelos bidimensionais gerados através da modelagem hierárquica, isto é, as equações de membrana e Reissner-Mindlin coincidem com os sistemas bidimensionais apresentados por Caillerie [Caillerie (1984)]. Nesta seção mostramos a convergência forte da solução do modelo de Reissner-Mindlin para placas para a solução do modelo de Kirchhoff-Love para placas.

O modelo gerado a partir da teoria de Kirchhoff-Love usa hipóteses de natureza geométrica a priori, o que difere substancialmente em relação ao modelo gerado a partir da teoria de Reissner-Mindlin. A teoria de Reissner-Mindlin parte do princípio de se procurar a solução para o problema de elasticidade linear (1.5) em um espaço de aproximação com dependência polinomial para a variável na direção transversa, tanto para o deslocamento $\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}$ quanto para o tensor das tensões $\underline{\underline{\sigma}}^{\delta\epsilon}$. As aproximações para modelos de placas por redução de dimensão via modelagem hierárquica, os quais nos conduzem às equações de Reissner-Mindlin, geram modelos bidimensionais cujas aproximações por elementos finitos são mais simples e fáceis do ponto de vista computacional em comparação com as aproximações numéricas para o modelo gerado pela teoria de Kirchhoff-Love. No entanto, ao se considerar uma formulação variacional com aproximações por elementos finitos via método de Galerkin tradicional para as equações de Reissner-Mindlin (1.7), geramos um problema conhecido como *locking*, o qual será discutido no Capítulo 4.

Uma vez que o modelo de Reissner-Mindlin para placas converge forte quando δ tende a zero para o modelo de Kirchhoff-Love, o mesmo pode ser usado como modelo bidimensional e se gerar aproximações numéricas mais simples, apesar do problema de *locking* citado anteriormente.

Para tanto, definimos

$$[V_{KL}(P)]^3 := \left\{ (v, v_3) \in [V(P)]^3 : \frac{\partial v}{\partial x_3} = -\nabla v_3, \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \right\},$$

ou seja,

$$[V_{KL}(P)]^3 = \left\{ \left(\begin{array}{c} \eta(\tilde{x}) - \hat{x}_3 \nabla w \\ w(\tilde{x}) \end{array} \right) \in [V(P)]^3, \eta \in [H_0^1(\Omega)]^2, w \in H_0^2(\Omega) \right\}.$$

Definição 3.5.1. Dizemos que um modelo de placas é assintoticamente consistente quando, ao se considerar o limite quando δ tende a zero no problema de elasticidade linear tridimensional (1.5), a sequência em δ de soluções ($u_{3D}^\epsilon(1)$) do modelo $HR_1(1)$ converge para a solução \hat{u}_{3D}^ϵ , que é dada por

$$\begin{aligned} \hat{u}_{3D}^\epsilon(\hat{x}, \hat{x}_3) &= u_{3D}^\epsilon(\hat{x}) - \hat{x}_3 \nabla u_{3D}^\epsilon, \\ (\hat{u}_{3D}^\epsilon)_3(\hat{x}) &= u_3^\epsilon(\hat{x}), \end{aligned}$$

onde $u_{3D}^\epsilon = (u_1^\epsilon, u_2^\epsilon, u_3^\epsilon)$ é a única solução do problema (3.4).

Observação 3.5.1. O problema (3.4) é um sistema onde a primeira equação constitui um problema de difusão e a segunda e a terceira, juntas, formam uma equação equivalente ao modelo biharmônico, a saber

$$-\frac{2}{3} \operatorname{div}^2 \left[A^{-1} e \left(\nabla u_3^\epsilon \right) \right] = 2 \operatorname{div}(g^+ - g^-) + 2(g_3^+ + g_3^-) \text{ em } \Omega.$$

Precisamente, uma vez que o domínio P^δ é escalonado pela mudança de variáveis (2.3), o limite da solução do modelo é \hat{u}_{3D}^ϵ , definido por 3.5.1. Para as equações de Reissner-Mindlin (1.7), basta mostrar que

$$\varphi \rightarrow \nabla u_3^\epsilon \text{ e } w \rightarrow u_3^\epsilon,$$

forte quando δ tende a zero.

Teorema 3.5.1. *A sequência de soluções $(\underline{u}_{3D}^\epsilon)$ converge para a solução $\hat{\underline{u}}_{3D}^\epsilon$, definida em 3.5.1, em $[V_{KL}(P)]^3$ onde u_3^ϵ é a solução fraca para as equações de Reissner-Mindlin (1.7).*

Demonstração. Passo 1: Mostrar que as sequências $\{\underline{u}_{3D}^\epsilon\}$ e $\{\underline{e}(\underline{u}_{3D}^\epsilon)\}$ convergem fraco em $[V(P)]^3$.

Primeiramente escrevemos o problema de elasticidade linear tridimensional (1.5) em sua formulação variacional

$$\int_{P^\delta} \underline{A}^{-1} \underline{e}(\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}) : \underline{e}(\underline{v}) d\underline{x} = \int_{P^\delta} \underline{f}^\delta \underline{v} d\underline{x} + \int_{\partial P_{\pm}^\delta} \underline{g}^\delta \underline{v} d\underline{x}$$

para todo $\underline{v} \in [V(P^\delta)]^3$. (3.25)

Aplicando a mudança de variáveis (2.3) ao problema (3.25), temos

$$\int_P \underline{A}^{-1} \underline{e}^\delta(\underline{u}_{3D}^\epsilon) : \underline{e}^\delta(\underline{v}) d\underline{\hat{x}} = \delta \int_P \underline{f} \cdot \underline{v} d\underline{\hat{x}} + \int_{\partial P_{\pm}^\delta} \underline{g} \cdot \underline{v} \text{ para todo } \underline{v} \in [V(P)]^3,$$

onde

$$\underline{e}^\delta(\underline{v}) = \begin{pmatrix} \underline{e}(\underline{v}) & \delta^{-1} \underline{e}(\underline{v}) \\ \delta^{-1} \underline{e}(\underline{v}) & \delta^{-2} e_{33}(\underline{v}) \end{pmatrix}.$$

Mostraremos que as sequências $\{\underline{u}_{3D}^\epsilon\}$ e $\{\underline{e}^\delta(\underline{u}_{3D}^\epsilon)\}$ são limitadas em $[V(P)]^3$. De fato, observemos que, como $\underline{u}_{3D}^\epsilon \in [V(P)]^3$, em particular, podemos escrever

$$\int_P \underline{A}^{-1} \underline{e}^\delta(\underline{u}_{3D}^\epsilon) : \underline{e}^\delta(\underline{u}_{3D}^\epsilon) d\underline{\hat{x}} = \delta \int_P \underline{f} \cdot \underline{u}_{3D}^\epsilon d\underline{\hat{x}} + \int_{\partial P_{\pm}^\delta} \underline{g} \cdot \underline{u}_{3D}^\epsilon d\underline{\hat{x}}.$$

Então

$$\begin{aligned} \|\underline{e}^\delta(\underline{u}_{3D}^\epsilon)\|_{[L^2(P)]^{3 \times 3}}^2 &\leq \int_P \underline{A}^{-1} \underline{e}^\delta(\underline{u}_{3D}^\epsilon) : \underline{e}^\delta(\underline{u}_{3D}^\epsilon) d\underline{\hat{x}} = \delta \int_P \underline{f} \cdot \underline{u}_{3D}^\epsilon d\underline{\hat{x}} + \int_{\partial P_{\pm}^\delta} \underline{g} \cdot \underline{u}_{3D}^\epsilon d\underline{\hat{x}} \\ &\leq C\delta \|\underline{f}\|_{[L^2(P)]^3} \|\underline{u}_{3D}^\epsilon\|_{[L^2(P)]^3} + \|\underline{g}\|_{[L^2(\partial P)]^3} \|\underline{u}_{3D}^\epsilon\|_{[L^2(P)]^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\underline{e}^\delta(\underline{u}_{3D}^\epsilon)\|_{[L^2(P)]^{3 \times 3}}^2 &\leq C\delta\|\underline{f}\|_{[L^2(P)]^3}\|\underline{u}_{3D}^\epsilon\|_{[L^2(P)]^3} + \|\underline{g}\|_{[L^2(\partial P)]^3}\|\underline{u}_{3D}^\epsilon\|_{[L^2(P)]^3}, \\ \|\underline{e}^\delta(\underline{u}_{3D}^\epsilon)\|_{[L^2(P)]^{3 \times 3}}^2 &\leq C\delta\|\underline{f}\|_{[L^2(P)]^3}\|\underline{u}_{3D}^\epsilon\|_{[H^1(P)]^3} + \|\underline{g}\|_{[L^2(\partial P)]^3}\|\underline{u}_{3D}^\epsilon\|_{[H^1(P)]^3} \\ &\leq C\left(\|\underline{f}\|_{[L^2(P)]^3} + \|\underline{g}\|_{[L^2(\partial P)]^3}\right)\|\nabla\underline{u}_{3D}^\epsilon\|_{[L^2(P)]^{3 \times 3}}.\end{aligned}$$

Então, pela desigualdade de Korn, temos

$$\begin{aligned}\|\underline{e}^\delta(\underline{u}_{3D}^\epsilon)\|_{[L^2(P)]^{3 \times 3}}^2 &\leq C\left(\|\underline{f}\|_{[L^2(P)]^3} + \|\underline{g}\|_{[L^2(\partial P)]^3}\right)\|\underline{e}^\delta(\underline{u}_{3D}^\epsilon)\|_{[L^2(P)]^{3 \times 3}} \\ \|\underline{e}^\delta(\underline{u}_{3D}^\epsilon)\|_{[L^2(P)]^{3 \times 3}} &\leq C\|\underline{f}\|_{[L^2(P)]^3}\|\underline{g}\|_{[L^2(\partial P)]^3},\end{aligned}$$

donde concluímos que $\{\underline{e}^\delta(\underline{u}_{3D}^\epsilon)\}$ é limitada em $[L^2(P)]^{3 \times 3}$.

Pela desigualdade de Korn, temos que

$$\|\underline{u}_{3D}^\epsilon\|_{[H^1(P)]^3} \leq C\|\underline{e}^\delta(\underline{u}_{3D}^\epsilon)\|_{[L^2(P)]^{3 \times 3}} \leq C\left(\|\underline{f}\|_{[L^2(P)]^3} + \|\underline{g}\|_{[L^2(\partial P)]^3}\right),$$

donde a sequência $\{\underline{u}_{3D}^\epsilon\}$ também é limitada em $[V(P)]^3$. Portanto existe uma subsequencia tanto de $\{\underline{u}_{3D}^\epsilon\}$ como de $\{\underline{e}(\underline{u}_{3D}^\epsilon)\}$ que converge fraco em $[V(P)]^3$, ou seja,

$$\begin{aligned}\underline{u}_{3D}^\epsilon &\rightharpoonup \underline{u} \text{ em } [V(P)]^3, \\ \underline{e}^\delta(\underline{u}_{3D}^\epsilon) &\rightharpoonup \underline{v} \text{ em } [L^2(P)]^{3 \times 3}.\end{aligned}$$

Passo 2: Mostrar que o limite $\underline{u} \in [V_{KL}(P)]^3$.

Observemos que, como $\underline{u}_{3D}^\epsilon \rightharpoonup \underline{u}$ em $[V(P)]^3$, então $\underline{v} = \underline{e}(\underline{u})$. Em particular, $\underline{e}(\underline{u}_{3D}^\epsilon) = \underline{e}^\delta(\underline{u}_{3D}^\epsilon)$. Logo $\underline{v} = \underline{e}(\underline{u})$. Como $\underline{e}^\delta(\underline{u}_{3D}^\epsilon)$ é limitada, temos

$$\|e_{i3}^\delta(\underline{u}_{3D}^\delta)\|_{[L^2(P)]^3} \leq \delta\|e_{i3}(\underline{u}_{3D}^\delta)\|_{[L^2(P)]^3} \leq C\delta.$$

Portanto $\{e_{i3}(\underline{u}_{3D}^\delta)\}$ converge para zero quando δ tende a zero em $[L^2(P)]^3$. Então $e_{i3}(\underline{u}) = 0$ para $i = 1, 2, 3$. Sendo assim caracterizamos $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ da seguinte forma:

Como $e_{i3}(\underline{u}) = 0$ para $i = 1, 2, 3$, então u_3 é constante com relação à variável \hat{x}_3 e

como $u_3(\hat{x}_3) = 0$ em ∂P_L , então $u_3 = \eta_3(\hat{x})$ para algum $\eta_3 \in H_0^1(\Omega)$. Mas

$$\frac{\partial u_1}{\partial \hat{x}_3} = -\frac{\partial u_3}{\partial \hat{x}_1} \text{ e } \frac{\partial u_2}{\partial \hat{x}_3} = -\frac{\partial u_3}{\partial \hat{x}_2}.$$

Logo

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial \hat{x}_3} = -\nabla_{\sim} \eta_3(\hat{x}).$$

Desta forma, ao considerarmos uma função \underline{u} da forma

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} \eta(\hat{x}) - \hat{x}_3 \nabla_{\sim} \eta_3(\hat{x}) \\ \eta_3(\hat{x}) \end{pmatrix},$$

a mesma satisfaz às condições anteriores e pertence ao espaço $[V_{KL}(P)]^3$.

Passo 3: Mostrar que

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} \underline{e}(u) & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\underline{e}(u)) \end{pmatrix}.$$

Observemos que, a partir de (3.25), temos

$$\delta^2 \int_P \underline{A}^{-1} \underline{e}^\delta(u_{3D}^\epsilon) : \underline{e}^\delta(u_{3D}^\epsilon) d\hat{x} = \delta^3 \int_P \underline{f} \cdot \underline{v} d\hat{x} + \delta^2 \int_{\partial P_\pm} \underline{g} \cdot \underline{v} d\hat{x}.$$

A partir da definição do tensor $\underline{A}^{-1} \underline{e}^\delta(u_{3D}^\epsilon)$, temos

$$\begin{aligned} \int_P \frac{E\delta^2}{1+\nu} \underline{e}^\delta(u_{3D}^\epsilon) : \underline{e}(v) + \frac{2E\delta}{1+\nu} \underline{e}^\delta(u_{3D}^\epsilon) \cdot \underline{e}(v) + \frac{E}{1+\nu} e_{33}^\delta(u_{3D}^\epsilon) e_{33}(v) + \\ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{tr}(\underline{e}^\delta(u_{3D}^\epsilon)) \left[\delta^2 \text{tr}(\underline{e}(v)) + e_{33}(v) \right] d\hat{x} = \\ \delta^3 \int_P \underline{f} \cdot \underline{v} d\hat{x} + \delta^2 \int_{\partial P_\pm} \underline{g} \cdot \underline{v} d\hat{x}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Ao tomarmos o limite quando δ tende a zero, na expressão anterior, temos

$$\int_P \frac{E}{1+\nu} e_{33}(u) e_{33}(v) + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{tr}(\underline{e}(u)) e_{33}(v) d\hat{x} = 0,$$

que é equivalente a

$$\int_P \left[\frac{E}{1+\nu} e_{33}(\underline{u}) + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \operatorname{tr}(\underline{e}(\underline{u})) \right] \frac{\partial v_3}{\partial \hat{x}_3} d\hat{x} = 0$$

para todo $v_3 \in H^1(\Omega)$ tal que $v_3 = 0$ em ∂P_L . Portanto, se $v_3 \neq 0$, então

$$e_{33}(\underline{u}) = -\frac{\nu}{(1-2\nu)} \operatorname{tr}(\underline{e}(\underline{u})),$$

e, a partir da definição para $\operatorname{tr}(\underline{e}(\underline{u}))$, temos

$$e_{33}(\underline{u}) = -\frac{\nu}{1-2\nu} \operatorname{tr}(\underline{e}(\underline{u})).$$

Considerando agora $v_3 = 0$ e dividindo a expressão resultante por δ , temos

$$\begin{aligned} & \int_P \frac{E\delta}{1+\nu} \underline{e}^\delta(\underline{u}_{3D}^\delta) : \underline{e}(\underline{v}) + \frac{2E}{(1+\nu)} \underline{e}^\delta(\underline{u}_{3D}^\delta) : \underline{e}(\underline{v}) + \\ & \frac{E\nu\delta}{(1+\nu)(1-2\nu)} \operatorname{tr}(\underline{e}^\delta(\underline{u}_{3D}^\delta)) \operatorname{tr}(\underline{e}(\underline{v})) d\hat{x} = \delta^2 \int_P \underline{f} \cdot \underline{v} d\hat{x} + \delta \int_{\partial P_\pm} \underline{g} \cdot \underline{v} d\hat{x}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Tomando o limite quando δ tende a zero na expressão (3.27), temos

$$\int_P \frac{2E}{(1+\nu)} \underline{e}(\underline{u}) : \underline{e}(\underline{v}) d\hat{x} = 0 \text{ para todo } \underline{v} \in [V(P)]^3.$$

Como $\underline{u} \in [V_{KL}(P)]^3 \subset [V(P)]^3$, podemos escolher, em particular, $\underline{v} = \underline{u}$. Logo

$$\int_P \frac{2E}{(1+\nu)} \underline{e}(\underline{u}) : \underline{e}(\underline{u}) d\hat{x} = 0,$$

donde $\underline{e}(\underline{u}) = 0$. Então

$$\underline{e}(\underline{u}) = \underline{v} = \begin{pmatrix} \underline{e}(\underline{u}) & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{1-2\nu} \operatorname{tr}(\underline{e}(\underline{u})) \end{pmatrix}.$$

Passo 4: Unicidade do limite \underline{u} .

Consideramos a expressão (3.26). Dividindo (3.26) por δ^2 e considerando apenas

os termos com a potência δ^0 , temos

$$\int_P \frac{E}{1+\nu} \underline{e}^\delta(\underline{u}_{3D}^\delta) : \underline{e}(\underline{v}) + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\text{tr}(\underline{e}^\delta(\underline{u}_{3D}^\delta)) \right] \text{tr}(\underline{e}(\underline{v})) d\hat{x} = \delta \int_P \underline{f} \cdot \underline{v} d\hat{x} + \int_{\partial P_\pm} \underline{g} \cdot \underline{v} d\hat{x} \text{ para todo } \underline{v} \in [V_{KL}(P)]^3. \quad (3.28)$$

Tomando o limite quando δ tende a zero e usando resultados anteriores, obtemos

$$\int_P \frac{E}{1+\nu} \underline{e}(\underline{u}) : \underline{e}(\underline{v}) + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{tr}(\underline{e}(\underline{u})) \text{tr}(\underline{e}(\underline{v})) d\hat{x} = \int_{\partial P_\pm} \underline{g} \cdot \underline{v} d\hat{x}. \quad (3.29)$$

Se a forma bilinear

$$C(\underline{u}, \underline{v}) = \int_P \frac{E}{1+\nu} \underline{e}(\underline{u}) : \underline{e}(\underline{v}) + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{tr}(\underline{e}(\underline{u})) \text{tr}(\underline{e}(\underline{v})) d\hat{x}$$

for coerciva, como o espaço $[V_{KL}(P)]^3$ é fechado, então a função \underline{u} é única. De fato,

$$\begin{aligned} C(\underline{u}, \underline{u}) &= \int_P \frac{E}{1+\nu} |\underline{e}(\underline{u})|^2 + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{tr}(\underline{e}(\underline{u}))^2 d\hat{x} \\ &\geq C \|\underline{e}(\underline{u})\|_{[L^2(P)]^{2 \times 2}}^2 \geq C \|\underline{u}\|_{[V(P)]^3}^2, \end{aligned}$$

através das desigualdades de Korn e Poincaré. Portanto a forma bilinear é coerciva e a função \underline{u} é a única.

Passo 5: Determinação do problema o qual $\underline{u} \in [V_{KL}(P)]^3$ é solução.

Como $\underline{u} \in [V_{KL}(P)]^3$, então o vetor \underline{u} pode ser escrito da seguinte forma

$$\underline{u}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \underline{\xi}(\hat{x}) - \hat{x}_3 \underline{\nabla} \zeta(\hat{x}) \\ \zeta(\hat{x}) \end{pmatrix}.$$

Consideremos, primeiramente, $\underline{v} = (\underline{\eta}(\underline{x}), 0)$ em (3.28). A partir dessas definições

para \underline{u} e \underline{v} , concluímos que a função ξ satisfaz à equação de membrana

$$\begin{aligned} -2\operatorname{div}_{\approx} \left[A^{-1} \underline{e}_{\approx}(\xi) \right] &= \delta \int_{-1}^1 f d\hat{x}_3 + g^+ + g^- \text{ em } \Omega, \\ \xi &= 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Escolhendo então $\underline{v} = (-\hat{x}_3 \nabla_{\approx} \eta, \eta)$ e substituindo novamente na relação (3.28), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \operatorname{div}_{\approx}^2 \left[A^{-1} \underline{e}_{\approx}(\nabla_{\approx} \zeta) \right] &= -\delta \int_{-1}^1 \hat{x}_3 \operatorname{div} f d\hat{x}_3 + \delta \int_{-1}^1 f_3 d\hat{x}_3 + 2 \left[\operatorname{div} g^- - \operatorname{div} g^+ \right] \\ &\quad - 2 (g_3^+ + g_3^-) \text{ em } \Omega, \\ \zeta &= 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Observemos que, tomando o limite quando δ tende a zero no problema (3.31), temos a equação

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3} \operatorname{div}_{\approx}^2 \left[A^{-1} \underline{e}_{\approx}(\nabla_{\approx} \zeta) \right] &= 2 \left[\operatorname{div} g^+ - \operatorname{div} g^- \right] + 2 (g_3^+ + g_3^-) \text{ em } \Omega, \\ \zeta &= 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (3.32)$$

que é equivalente ao problema (3.4).

Portanto o limite \underline{u} está bem definido pelos problemas (3.30) e (3.32), ou seja, quando tomamos o limite quando δ tende a zero, mostramos que a sequência $(\underline{u}_{3D}^\epsilon)$ converge para $\underline{u}_{3D}^\epsilon$ onde $\underline{u}_{3D}^\epsilon$ é a única solução do problema (3.4). \square

Observemos ainda que o problema (3.32) é o modelo biarmônico, semelhante ao modelo derivado através de argumentos físicos por Ciarlet e Destuynder [Ciarlet e Destuynder (1979)]. Podemos concluir que o modelo de Reissner-Mindlin para placas é equivalente ao modelo de Kirchhoff-Love para placas pois ambos, ao se considerar o caso limite quando δ tende a zero, nos conduzem ao modelo biarmônico.

3.6 Conclusões

Este capítulo teve por objetivo apresentar o problema de elasticidade linear (1.5) em uma placa heterogênea tridimensional de espessura pequena, a qual denotamos por P^δ . Dadas as dificuldades implícitas no domínio, verificamos que este problema não é simples e propor aproximações numéricas para o mesmo também não é uma tarefa fácil. Neste contexto surgem os métodos de redução de dimensão para placas, a exemplo do que foi discutido para a equação de Poisson no Capítulo 2. Apresentamos, primeiramente, os resultados obtidos para a aproximação por métodos assintóticos proposta por Caillerie [Caillerie (1984)]. Verificamos que, da mesma forma que para a equação de Poisson, os limites assintóticos não comutam, ou seja, Caillerie [Caillerie (1984)] obteve problemas bidimensionais distintos ao considerar os casos limite quando δ tende a zero e a seguir ϵ tende a zero e ϵ tende a zero e a seguir δ tende a zero. Baseados neste resultado, procuramos uma metodologia que gerasse um único modelo bidimensional independente da relação entre os parâmetros ϵ e δ e que se comportasse, nos casos limite, como os problemas obtidos por Caillerie [Caillerie (1984)]. A partir dos resultados satisfatórios obtidos para a equação de Poisson descritos no Capítulo 2, propomos os modelos hierárquicos como técnica de redução de dimensão para o problema tridimensional. Consideramos o princípio de Hellinger-Reissner e a formulação variacional correspondente ao modelo HR_1 . Consideramos, também, uma aproximação linear para a variável x_3 . Verificamos que o modelo $HR_1(1)$ aproxima o deslocamento $u_{3D}^{\delta\epsilon}$ do problema de elasticidade linear tridimensional original (1.5) pela função $u_{3D}^\epsilon(1)$, que é composta pelas funções η , φ e w , as quais são soluções para a equação de membrana e para as equações de Reissner-Mindlin, respectivamente. Mostramos, do ponto de vista formal, que a equação de membrana e as equações de Reissner-Mindlin, para os casos limite, coincidem com as equações bidimensionais obtidas por Caillerie [Caillerie (1984)]. As principais vantagens do modelo obtido pela modelagem hierárquica são a **não** dependência da relação entre os parâmetros δ e ϵ assim como a **não** exigência de periodicidade para o parâmetro ϵ , que representa

as inclusões características longitudinais. Por fim, mostramos que a solução para o problema de elasticidade linear tridimensional (1.5) converge para uma equação semelhante ao modelo biarmônico quando consideramos o limite quando δ tende a zero, a exemplo do que ocorre quando utilizamos o modelo de Kirchhoff-Love para placas ao invés do modelo hierárquico e as equações de Reissner-Mindlin para placas.

Capítulo 4

Aproximação numérica para o problema de elasticidade em uma placa heterogênea

4.1 Introdução

No Capítulo 3 apresentamos o problema de elasticidade linear em uma placa heterogênea tridimensional. Assim como a equação de Poisson descrita no Capítulo 2, este problema não é simples, em virtude da presença de dois parâmetros pequenos no domínio P^δ : a espessura da placa, 2δ , e as inclusões características heterogêneas presentes na direção longitudinal, denotadas por ϵ . Em consequência das dificuldades acima descritas, a alternativa seria a aproximação numérica do problema tridimensional, a qual seria difícil e despendiosa. Com o objetivo de realizar uma aproximação para a solução do problema tridimensional, diversas técnicas de redução de dimensão costumam ser aplicadas ao problema de placas. No Capítulo 3 discutimos a técnica conhecida por métodos assintóticos, proposta por Caillerie [Caillerie (1984)] e propomos uma nova metodologia de aproximação para este problema, os chamados *modelos hierárquicos*. A partir desta metodologia geramos um único modelo bidimensional composto pela equação de membrana e pelas equações de Reissner-Mindlin sem a dependência da periodicidade para o parâmetro ϵ .

O problema de membrana é um problema semelhante à equação de Poisson com a

presença de um coeficiente oscilatório. Métodos numéricos multiescala se adaptam bem a este tipo de problema, como o Método de Elementos Finitos Multiescala (MsFEM - Multiscale Finite Element Method) sugerido por Hou [Hou et al. (1999)] e o Residual Free Bubbles (RFB) [Brezzi e Russo (1994)].

Já para as equações de Reissner-Mindlin, a primeira tentativa de aproximação se dá utilizando os elementos finitos de Galerkin tradicionais. Porém, ao se considerar elementos finitos deste tipo para a aproximação, independente das oscilações presentes no tensor $\underset{\cong}{A}^{-1}$ e no parâmetro λ , ocorre um fenômeno conhecido como *locking* para a aproximação do vetor que representa o deslocamento: a aproximação para o vetor deslocamento utilizando-se os elementos finitos de Galerkin geram um deslocamento muito menor que o valor real do mesmo. Sendo assim, baseados no trabalho de Arnold [Arnold (1991)], propomos uma formulação mista para as equações de Reissner-Mindlin a qual nos gera um sistema de equações composto por duas equações de Poisson e um sistema de Stokes oscilatório.

As aproximações numéricas para as equações de Poisson são dadas pelo método de Galerkin clássico de forma satisfatória, pois os mesmos não apresentam qualquer oscilação. Porém o sistema de Stokes gerado é oscilatório e não há registros na literatura de métodos numéricos que aproximem este problema de forma satisfatória. A partir desta constatação, apresentamos um método numérico para o problema de Stokes oscilatório, apresentando, também a análise de erro para o método proposto.

4.2 A formulação mista para as equações de Reissner-Mindlin

Considere as equações de Reissner-Mindlin

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{3} \operatorname{div} \left[\underset{\cong}{A}^{-1} \underset{\cong}{e}(\varphi) \right] - 2\delta^{-2} \lambda (\underset{\cong}{\nabla} w - \varphi) &= -\delta^{-2} \left(\frac{1}{2} f^1 + g^1 \right) && \text{em } \Omega, \\
2\lambda \operatorname{div}(\underset{\cong}{\nabla} w - \varphi) &= \frac{1}{2} f_3^0 + \delta^{-1} g_3^0 && \text{em } \Omega, \\
\varphi = 0, \quad w = 0 &&& \text{em } \partial\Omega,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

onde a função φ representa a rotação das fibras normais no plano intermediário Ω e w é o deslocamento transversal também no plano intermediário Ω .

Definimos

$$\begin{aligned} F &= -\delta^{-2} \left(\frac{1}{2} f^1 + g^1 \right), \\ G &= \frac{\delta^{-2}}{2} f_3^0 + \delta^{-3} g_3^0. \end{aligned}$$

Podemos caracterizar a solução do sistema (4.1) como o par $(\varphi, w) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times [H_0^1(\Omega)]$ que minimiza o funcional

$$J(\varphi, w) = \int_{\Omega} \frac{1}{3} A^{-1} \underline{\underline{e}}(\varphi) : \underline{\underline{e}}(\varphi) + 2\lambda\delta^{-2} |\nabla w - \varphi|^2 + F\varphi - Gw dx. \quad (4.2)$$

Introduzimos, então, o vetor $\bar{\zeta} = \lambda\delta^{-2} (\nabla w - \varphi)$ como uma variável independente. Sendo assim, defino o funcional $\mathcal{L}(\varphi, w, \bar{\zeta})$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varphi, w, \bar{\zeta}) := \int_{\Omega} \left[\frac{1}{3} A^{-1} \underline{\underline{e}}(\varphi) : \underline{\underline{e}}(\varphi) + \bar{\zeta}(\nabla w - \varphi) \right] dx \\ + \int_{\Omega} \frac{\delta^2}{\lambda} |\bar{\zeta}|^2 + F\varphi - Gw dx. \quad (4.3) \end{aligned}$$

O trio $(\varphi, w, \bar{\zeta})$ pode ser caracterizado como o único ponto de sela do funcional $\mathcal{L}(\varphi, w, \bar{\zeta})$ em $[H_0^1(\Omega)]^2 \times H_0^1(\Omega) \times [L^2(\Omega)]^2$.

Observemos que a formulação variacional mista não se degenera quando δ é pequeno, ao contrário do que ocorre na formulação variacional (4.2). Porém o operador (4.3) não é positivo definido, fato que faz com que nem todas as discretizações via método de Galerkin sejam estáveis. Outra observação importante é que métodos de Galerkin baseados na formulação variacional para o deslocamento serão estáveis automaticamente, porém tendem ao fenômeno de *locking*. Já os métodos de Galerkin baseados no princípio misto, tenderão a ser uniformes em δ , mas não estáveis.

Além disso, precisamos avaliar a robustez do método numérico baseado em uma formulação mista com relação ao coeficiente de Poisson ν , para materiais no limite

de incompressibilidade. O tensor $\underset{\cong}{A}^{-1}$ explode quando $\nu \rightarrow \frac{1}{2}$. Já o coeficiente λ tende a $\frac{E}{3}$ para materiais incompressíveis.

A partir da diferenciação do operador \mathcal{L} obtemos uma formulação fraca mista para o problema de valor de contorno. O trio $(\varphi, w, \bar{\zeta}) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times H_0^1(\Omega) \times [L^2(\Omega)]^2$ satisfaz

$$\begin{aligned} a(\varphi, \psi) - \int_{\Omega} \bar{\zeta} \cdot \psi dx &= \int_{\Omega} F \cdot \psi dx && \text{para todo } \psi \in [H_0^1(\Omega)]^2, \\ \int_{\Omega} \bar{\zeta} \cdot \nabla \nu dx &= \int_{\Omega} G \nu dx && \text{para todo } \nu \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} [(\nabla w - \varphi) \cdot \eta dx - \lambda^{-1} \delta^2 \bar{\zeta} \cdot \eta] dx &= 0 && \text{para todo } \eta \in [L^2(\Omega)]^2, \end{aligned} \tag{4.4}$$

onde

$$a(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \frac{1}{3} \underset{\cong}{A}^{-1} e(\varphi) : e(\psi) dx.$$

A partir da formulação variacional mista apresentada anteriormente, seguindo o trabalho de Brezzi e Fortin [Brezzi e Fortin (1986)], introduzimos a decomposição para o vetor $\bar{\zeta}$ em suas partes solenoidal e irrotacional. Para tanto, introduzimos a decomposição de Helmholtz

$$\bar{\zeta} = \nabla r + \text{rot} p,$$

onde

$$\text{rot} p = \left(-\frac{\partial p}{\partial x_2}, \frac{\partial p}{\partial x_1} \right),$$

decomposição esta que determina $r \in H_0^1(\Omega)$ e $p \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ unicamente. De forma análoga, decompos a função teste η como

$$\eta = \nabla s + \text{rot} q,$$

onde $s \in H_0^1(\Omega)$ e $q \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$.

Introduzindo estas decomposições na formulação variacional e usando a ortogo-

nalidade entre gradientes e rotacionais, verificamos que a quádrupla $(r, \varphi, p, w) \in H_0^1(\Omega) \times [H_0^1(\Omega)]^2 \times H^1(\Omega)/\mathbb{R} \times H^1(\Omega)$ satisfaz

$$\int_{\Omega} \nabla_{\sim} r \cdot \nabla_{\sim} \nu dx = \int_{\Omega} G \nu dx, \quad (4.5)$$

$$a(\varphi, \psi) - \int_{\Omega} \text{rot} p \cdot \psi dx = \int_{\Omega} (F + \nabla r) \cdot \psi dx, \quad (4.6)$$

$$\int_{\Omega} -\varphi \cdot \text{rot} q dx - \int_{\Omega} \lambda^{-1} \delta^2 \text{rot} p \cdot \text{rot} q dx = 0, \quad (4.7)$$

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla s dx = \int_{\Omega} \varphi \cdot \nabla s - \lambda^{-1} \delta^2 G s dx. \quad (4.8)$$

Observamos que a equação (4.5) é a formulação variacional para a equação de Poisson sem a presença de coeficientes oscilatórios. A discretização via método de Galerkin tradicional se aplica a este problema de forma satisfatória determinando r , cuja formulação forte é

$$\begin{aligned} -\Delta r &= G && \text{em } \Omega, \\ r &= 0 && \text{em } \partial\Omega, \end{aligned}$$

assim como para a equação (4.8), que também é a formulação variacional para a equação de Poisson sem coeficientes oscilatórios. Esta equação determina w e a formulação forte para esse problema é

$$\begin{aligned} \Delta w &= \text{div} \left(\varphi - \lambda^{-1} \delta^2 G \right) && \text{em } \Omega, \\ w &= 0 && \text{em } \partial\Omega. \end{aligned}$$

As equações (4.6) e (4.7) formam um sistema que determina as funções φ e p , com a presença de coeficientes oscilatórios. Ao aplicarmos a mudança de variáveis

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \rightarrow \check{\varphi} = (-\varphi_2, \varphi_1)$$

e para a função ψ

$$\psi = (\psi_1, \psi_2) \rightarrow \check{\psi} = (-\psi_2, \psi_1),$$

obtemos um sistema de Stokes com a presença do coeficiente oscilatório A^{-1} , cuja formulação forte é dada por (1.8)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3} \operatorname{div} \left[A^{-1} \bar{e}(\check{\varphi}) \right] + \nabla p &= \bar{F} - \operatorname{rot} r && \text{em } \Omega, \\ -\operatorname{div} \left(\check{\varphi} - \delta^2 \lambda^{-1} \nabla p \right) &= 0 && \text{em } \Omega, \\ \check{\varphi} &= 0 && \text{em } \partial\Omega, \end{aligned}$$

e $\bar{F} = (-F_2, F_1)$.

Note que $\bar{e}(\check{\varphi}) = \underline{e}(\varphi)$, onde $\check{\varphi} = (-\varphi_2, \varphi_1)$.

Como o sistema de Stokes é oscilatório, não há registros na literatura de métodos numéricos que o aproximem de forma satisfatória. Sendo assim, propomos um método numérico que se adapte adequadamente a este problema.

4.3 Aproximação numérica para o problema de Stokes oscilatório

A partir da formulação variacional mista descrita na Seção 4.2, obtivemos um problema de Stokes com um coeficiente oscilatório. A seguir propomos um método numérico que se adapte a este tipo de problema e apresentamos também a sua análise de erro.

Para tanto, seja Ω um aberto limitado em \mathbb{R}^2 com fronteira poligonal, $\bar{F} - \operatorname{rot} r \in [L^2(\Omega)]^2$ e considere o problema de Stokes (1.8). Considere, ainda, $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ uma família de triangularizações regulares de Ω , construída usando triângulos K com fronteira ∂K . Seja também \mathcal{E}_h o conjunto das arestas internas da triangularização, $h_K := \operatorname{diam}(K)$ e $h := \max\{h_K : K \in \mathcal{T}_h\}$. Consideremos os espaços

$$[V_\epsilon]^2 := \{v \in [H_0^1(\Omega)]^2 : v|_{\partial K} \text{ é linear para cada } K \in \mathcal{T}_h\},$$

$$P_1 := \{v \in H_0^1(\Omega) : v|_K \text{ é linear para cada } K \in \mathcal{T}_h\},$$

$$[P_1^\epsilon]^2 := \{\check{v} \in [V_\epsilon]^2 \text{ e } \operatorname{div} \left[A^{-1} \bar{\check{e}}(\check{v}) \right] |_K = 0 \text{ para cada } K \in \mathcal{T}_h\},$$

$$[B]^2 := \{\check{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2 : \check{v}|_{\partial K} = 0 \text{ para cada } K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Desta forma, o espaço $[V_\epsilon]^2$ pode ser escrito como a soma direta dos espaços $[P_1^\epsilon]^2$ e $[B]^2$, ou seja, $[V_\epsilon]^2 = [P_1^\epsilon]^2 \oplus [B]^2$. Defino

$$\bar{a}(\check{\varphi}, \check{\psi}) := \frac{1}{3} \int_{\Omega} A^{-1} \bar{\check{e}}(\check{\varphi}) : \bar{\check{e}}(\check{\psi}) dx,$$

$$b(\check{\psi}, p) := \int_{\Omega} \operatorname{div} \check{\psi} p dx,$$

$$c(p, q) := \int_{\Omega} \lambda^{-1} \nabla p \cdot \nabla q dx.$$

A partir das definições anteriores, podemos escrever o problema (1.8) em sua formulação variacional, ou seja, encontrar $(\check{\varphi}, p) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} \bar{a}(\check{\varphi}, \check{\psi}) - b(\check{\psi}, p) &= (\bar{F} - \operatorname{rot} r, \check{\psi}) && \text{para todo } \check{\psi} \in [H_0^1(\Omega)]^2, \\ b(\check{\varphi}, q) + \delta^2 c(p, q) &= 0 && \text{para todo } q \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Consideremos $[V_\epsilon]^2$ o espaço de elementos finitos para a velocidade e P_1 o espaço de elementos finitos para a pressão. Podemos aproximar o problema variacional (4.9), onde $\varphi_h \in [V_\epsilon]^2$ e $p_h \in P_1$ tal que

$$\begin{aligned} \bar{a}(\varphi_h, \psi_h) - b(\psi_h, p_h) &= (\bar{F} - \operatorname{rot} r, \psi_h) && \text{para todo } \psi_h \in [V_\epsilon]^2, \\ b(\varphi_h, q_h) + \delta^2 c(p_h, q_h) &= 0 && \text{para todo } q_h \in P_1. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Como $[V_\epsilon]^2 = [P_1^\epsilon]^2 \oplus [B]^2$, temos que $\varphi_h = \varphi_1 + \varphi_b$ e $\psi_h = \psi_1 + \psi_b$. Reescrevendo (4.10) em função de φ_1 , φ_b e p_h , temos

$$\bar{a}(\varphi_1, \psi_1) + \bar{a}(\varphi_b, \psi_1) - b(\psi_1, p_h) + b(\varphi_1, q_h) + b(\varphi_b, q_h) + \delta^2 c(p_h, q_h) = (\bar{F} - \operatorname{rot} r, \psi_1).$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \bar{a}(\varphi_b, \psi_1) &= \int_{\Omega} \frac{1}{3} A^{-1} \bar{e}(\varphi_b) : \bar{e}(\psi_1) dx = \sum_K \int_K \frac{1}{3} A^{-1} \bar{e}(\varphi_b) : \bar{e}(\psi_1) dx = \\ &= -\frac{1}{3} \sum_K \int_K \operatorname{div} \left[A^{-1} \bar{e}(\psi_1) \right] \cdot \varphi_b dx = 0, \end{aligned}$$

pois $\psi_1 \in P_1^c$. Então

$$\bar{a}(\varphi_1, \psi_1) - b(\psi_1, p_h) + b(\varphi_1, q_h) + b(\varphi_b, q_h) + \delta^2 c(p_h, q_h) = (\bar{F} - \operatorname{rot} r, \psi_1). \quad (4.11)$$

O problema que a função φ_b deverá satisfazer, em cada elemento $K \in \mathcal{T}_h$, é dado por

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \operatorname{div} \left[A^{-1} \bar{e}(\varphi_b) \right] &= -\bar{F} + \operatorname{rot} r + \frac{1}{3} \operatorname{div} \left[A^{-1} e(\varphi_1) \right] + \nabla p_h && \text{em } K, \\ \varphi_b &= 0 && \text{em } \partial K. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Desta forma definimos o operador $\mathcal{M}_K : [L^2(K)]^2 \rightarrow [H_0^1(K)]^2$ tal que

$$\varphi_b = \mathcal{M}_K(-\bar{F} + \operatorname{rot} r + \frac{1}{3} \operatorname{div} \left[A^{-1} e(\varphi_1) \right] \nabla p_h) \quad \text{para todo } K \in \mathcal{T}_h. \quad (4.13)$$

Definimos também

$$B((\varphi_1, p_h), (\psi_1, q_h)) := \bar{a}(\varphi_1, \psi_1) - b(\psi_1, p_h) + b(\varphi_1, q_h) + b(\varphi_b, q_h) + \delta^2 c(p_h, q_h), \quad (4.14)$$

e a seguinte norma

$$\|(\check{\varphi}, p)\|_{\Omega}^2 := \|\check{\varphi}\|_{1,\Omega}^2 + \|p\|_{0,\Omega}^2, \quad (4.15)$$

onde $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ denota a norma usual no espaço $L^2(\Omega)$ e $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ denota a norma usual no espaço $H_0^1(\Omega)$. Definimos ainda

$$\|(\varphi_1, p_h)\|_K^2 := \|\varphi_1\|_{1,K}^2 + \|p_h\|_{0,K}^2, \quad \text{para todo } K \in \mathcal{T}_h.$$

Para mostrar os resultados desta seção, faremos uso do Lema 4.3.1.

Lema 4.3.1. *As normas $\|\varphi_b\|_{1,K}$ e $\|p_h\|_{0,K}$ são equivalentes.*

Demonstração. Consideremos o problema

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \operatorname{div} \left[A^{-1} \bar{\varepsilon}(\varphi_b) \right] &= \nabla p_h & \text{em } K, \\ \varphi_b &= 0 & \text{em } \partial K. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Consideremos, ainda, a mudança de variáveis

$$\hat{x} = h^{-1} \tilde{x}. \quad (4.17)$$

A partir da mudança de variáveis (4.17), definimos

$$\begin{aligned} \varphi_b(\tilde{x}) &:= \hat{\varphi} \left(h^{-1} \tilde{x} \right) := \hat{\varphi}_b(\hat{x}), \\ p_h(\tilde{x}) &:= \hat{p}_h \left(h^{-1} \tilde{x} \right) := \hat{p}_h(\hat{x}). \end{aligned}$$

Sendo assim

$$\begin{aligned} \partial_x \varphi_b(\tilde{x}) &= h^{-1} \partial_{\hat{x}} \hat{\varphi}_b(\hat{x}), \\ \partial_{xx} \varphi_b(\tilde{x}) &= h^{-2} \partial_{\hat{x}\hat{x}} \hat{\varphi}_b(\hat{x}), \\ \partial_x p_h(\tilde{x}) &= h^{-1} \partial_{\hat{x}} \hat{p}_h(\hat{x}). \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \operatorname{div} \left[A^{-1} \bar{\varepsilon}(\varphi_b) \right] &= \frac{h^{-2}}{3} \operatorname{div} \left[A^{-1} \bar{\varepsilon}(\hat{\varphi}_b) \right] \\ \nabla p_h &= h^{-1} \nabla \hat{p}_h. \end{aligned}$$

Portanto o problema local (4.16), escrito a partir da mudança de variáveis (4.17), é dado por

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \operatorname{div} \left[A^{-1} \bar{\varepsilon}(\hat{\varphi}_b) \right] &= h \nabla \hat{p}_h & \text{em } \hat{K}, \\ \hat{\varphi}_b &= 0 & \text{em } \partial \hat{K}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde \hat{K} é o elemento escalonado após a mudança de variáveis (4.17).

Observemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h} \|\hat{\mathcal{L}}_b\|_{1,\hat{K}}^2 &\stackrel{\text{Korn}}{\leq} \frac{C}{h} \|\bar{\varepsilon}(\hat{\mathcal{L}}_b)\|_{0,\hat{K}}^2 = \frac{C}{h} \int_{\hat{K}} \bar{\varepsilon}(\hat{\mathcal{L}}_b) : \bar{\varepsilon}(\hat{\mathcal{L}}_b) d\hat{x} \leq \\
&\frac{C}{h} \int_{\hat{K}} \frac{1}{3} A^{-1} \bar{\varepsilon}(\hat{\mathcal{L}}_b) : \bar{\varepsilon}(\hat{\mathcal{L}}_b) d\hat{x} \stackrel{\text{I.P.P.}}{=} -\frac{C}{h} \int_{\hat{K}} \frac{1}{3} \operatorname{div} [A^{-1} \bar{\varepsilon}(\hat{\mathcal{L}}_b)] \hat{\mathcal{L}}_b d\hat{x} \stackrel{\text{prob. loc.}}{=} \\
&-\frac{C}{h} \int_{\hat{K}} h \nabla \hat{p}_h \hat{\mathcal{L}}_b d\hat{x} = -C \int_{\hat{K}} \nabla \hat{p}_h \hat{\mathcal{L}}_b d\hat{x} \stackrel{\text{I.P.P.}}{=} C \int_{\hat{K}} \operatorname{div} \hat{\mathcal{L}}_b \hat{p}_h d\hat{x} \\
&\stackrel{\text{C.S.}}{\leq} C \left(\int_{\hat{K}} |\operatorname{div} \hat{\mathcal{L}}_b|^2 d\hat{x} \right)^{1/2} \left(\int_{\hat{K}} |\hat{p}_h|^2 d\hat{x} \right)^{1/2} \leq C \|\hat{\mathcal{L}}_b\|_{1,\hat{K}} \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{K}}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\frac{1}{h} \|\hat{\mathcal{L}}_b\|_{1,\hat{K}}^2 \leq C \|\hat{\mathcal{L}}_b\|_{1,\hat{K}} \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{K}},$$

donde

$$\|\hat{\mathcal{L}}_b\|_{1,\hat{K}} \leq h \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{K}}. \quad (4.19)$$

Consideremos

$$\|\mathcal{L}_b\|_{0,K}^2 = \int_K |\mathcal{L}_b|^2 dx = h^2 \int_{\hat{K}} |\hat{\mathcal{L}}_b|^2 d\hat{x} = h^2 \|\hat{\mathcal{L}}_b\|_{0,\hat{K}}^2,$$

$$\|\nabla \mathcal{L}_b\|_{0,K}^2 = \int_K |\nabla \mathcal{L}_b|^2 dx = \frac{h^2}{h^2} \int_{\hat{K}} |\hat{\nabla} \hat{\mathcal{L}}_b|^2 d\hat{x} = \|\hat{\nabla} \hat{\mathcal{L}}_b\|_{0,\hat{K}}^2,$$

$$\|\mathcal{L}_b\|_{1,K}^2 = \|\mathcal{L}_b\|_{0,K}^2 + \|\nabla \mathcal{L}_b\|_{0,K}^2 \leq h^2 \|\hat{\mathcal{L}}_b\|_{0,\hat{K}}^2 + \|\hat{\nabla} \hat{\mathcal{L}}_b\|_{0,\hat{K}}^2 \leq \|\hat{\mathcal{L}}_b\|_{0,\hat{K}}^2 + \|\hat{\nabla} \hat{\mathcal{L}}_b\|_{0,\hat{K}}^2 = \|\hat{\mathcal{L}}_b\|_{1,\hat{K}}^2.$$

Logo

$$\|\mathcal{L}_b\|_{1,K} \leq C \|\hat{\mathcal{L}}_b\|_{1,\hat{K}}. \quad (4.20)$$

Então

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}_b\|_{1,K} &\leq C \|\hat{\mathcal{L}}_b\|_{1,\hat{K}} \leq Ch \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{K}} = Ch \left(\int_{\hat{K}} |\hat{p}_h|^2 d\hat{x} \right)^{1/2} = \\
&= C \left(\int_K |p_h|^2 dx \right)^{1/2} = C \|p_h\|_{0,K}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\varphi_b\|_{1,K} \leq C\|p_h\|_{0,K}. \quad (4.21)$$

Para completar a demonstração, precisamos mostrar que

$$\|p_h\|_{0,K} \leq C\|\varphi_b\|_{1,K}.$$

Primeiramente, observemos que, a partir do problema local (4.18), temos que a norma $\|\hat{\varphi}_b\|_{1,\hat{K}}$ é isomorfa à norma $h\|\hat{\nabla}\hat{p}_h\|_{-1,\hat{K}}$. Logo

$$\|p_h\|_{0,K} \leq Ch\|\hat{p}_h\|_{0,\hat{K}} \leq Ch\|\hat{\nabla}\hat{p}_h\|_{-1,\hat{K}} \leq C\|\hat{\varphi}_b\|_{1,\hat{K}} \leq C\|\varphi_b\|_{1,K}.$$

Provamos, então, a equivalência entre as normas $\|\varphi_b\|_{1,K}$ e $\|p_h\|_{0,K}$. \square

Lema 4.3.2. *A seguinte estimativa é válida*

$$\|\hat{\varphi}_b\|_{1,\hat{K}} \leq C\|(\hat{\varphi}_1, \hat{p}_h)\|_{\hat{K}}.$$

Demonstração. Considere o problema

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left[A^{-1} \bar{e}(\varphi_b) \right] &= -\operatorname{div} \left[A^{-1} \bar{e}(\varphi_1) \right] && \text{em } K, \\ \varphi_b &= 0 && \text{em } \partial K. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Reescrevendo o problema acima no domínio escalonado \hat{K} , temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left[A^{-1} \bar{e}(\hat{\varphi}_b) \right] &= -\operatorname{div} \left[A^{-1} \bar{e}(\hat{\varphi}_1) \right] && \text{em } \hat{K}, \\ \hat{\varphi}_b &= 0 && \text{em } \partial\hat{K}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Observemos que

$$\begin{aligned}\|\nabla_{\approx} \hat{\varphi}_b\|_{0,\hat{K}}^2 &= \|\nabla_{\approx} \mathcal{L}_b\|_{0,K}^2, \\ \|\nabla_{\approx} \hat{\varphi}_1\|_{0,\hat{K}}^2 &= \|\nabla_{\approx} \mathcal{L}_1\|_{0,K}^2, \\ \|p_h\|_{0,K}^2 &= h^2 \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{K}}^2.\end{aligned}$$

Consideremos

$$\begin{aligned}\|\nabla_{\approx} \mathcal{L}_b\|_{0,K}^2 &= \|\nabla_{\approx} \hat{\varphi}_b\|_{0,\hat{K}}^2 = \int_{\hat{K}} |\nabla_{\approx} \hat{\varphi}_b|^2 d\hat{x} \leq \\ &\leq \int_{\hat{K}} \bar{\varepsilon}(\hat{\varphi}_b) : \bar{\varepsilon}(\hat{\varphi}_b) d\hat{x} \leq \int_{\hat{K}} A^{-1} \bar{\varepsilon}(\hat{\varphi}_b) : \bar{\varepsilon}(\hat{\varphi}_b) d\hat{x}.\end{aligned}$$

Pelos problemas (4.18) e (4.23), temos

$$\begin{aligned}\|\nabla_{\approx} \hat{\varphi}_b\|_{0,\hat{K}}^2 &\leq \int_{\hat{K}} A^{-1} \bar{\varepsilon}(\hat{\varphi}_b) : \bar{\varepsilon}(\hat{\varphi}_b) d\hat{x} + \int_{\hat{K}} \hat{p}_h \operatorname{div} \hat{\varphi}_b d\hat{x}, \\ \|\nabla_{\approx} \hat{\varphi}_b\|_{0,\hat{K}}^2 &\leq C \|\bar{\varepsilon}(\hat{\varphi}_1)\|_{0,\hat{K}} \|\bar{\varepsilon}(\hat{\varphi}_b)\|_{0,\hat{K}} + \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{K}} \|\bar{\varepsilon}(\hat{\varphi}_b)\|_{0,\hat{K}}, \\ \|\nabla_{\approx} \hat{\varphi}_b\|_{0,\hat{K}}^2 &\leq C \left(\|\nabla_{\approx} \hat{\varphi}_1\|_{0,\hat{K}} + \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{K}} \right) \|\nabla_{\approx} \hat{\varphi}_b\|_{0,\hat{K}}.\end{aligned}$$

□

Portanto

$$\|\nabla_{\approx} \hat{\varphi}_b\|_{0,\hat{K}} \leq C \left(\|\nabla_{\approx} \hat{\varphi}_1\|_{0,\hat{K}} + \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{K}} \right).$$

Pela desigualdade de Poincaré, temos

$$\|\hat{\varphi}_b\|_{1,\hat{K}} \leq \|\nabla_{\approx} \hat{\varphi}_b\|_{0,\hat{K}} \leq \|(\hat{\varphi}_1, \hat{p}_h)\|_{\hat{K}}.$$

A seguir mostramos que a forma bilinear B é coerciva no espaço $[P_1^\varepsilon]^2 \times P_1$.

Lema 4.3.3. *Seja $(\varphi_1, p_h) \in [P_1^\varepsilon]^2 \times P_1$. Então a forma bilinear B , definida em (4.14), satisfaz*

$$B((\varphi_1, p_h), (\varphi_1, p_h)) \geq C \|(\varphi_1, p_h)\|_{\Omega}^2,$$

ou seja, a forma bilinear é coerciva.

Demonstração. Considere

$$B((\varphi_1, p_h), (\varphi_1, p_h)) = \bar{a}(\varphi_1, \varphi_1) + b(\varphi_b, p_h) + \delta^2 c(p_h, p_h).$$

Das hipóteses sobre o tensor A^{-1} , temos

$$\bar{a}(\varphi_1, \varphi_1) \geq C \|\varphi_1\|_{1,\Omega}^2.$$

Também

$$\begin{aligned} b(\varphi_b, p_h) &= \int_{\Omega} \operatorname{div} \varphi_b p_h d\tilde{x} = \sum_K \int_K \operatorname{div} \varphi_b p_h d\tilde{x} \stackrel{\text{I.P.P.}}{=} - \sum_K \int_K \nabla p_h \cdot \varphi_b d\tilde{x} \stackrel{(4.12)}{=} \\ &- \frac{1}{3} \sum_K \int_K \operatorname{div} \left[A^{-1} \bar{\varepsilon}(\varphi_b) \right] \varphi_b d\tilde{x} \stackrel{\text{I.P.P.}}{=} \frac{1}{3} \sum_K \int_K A^{-1} \bar{\varepsilon}(\varphi_b) : \bar{\varepsilon}(\varphi_b) d\tilde{x} \stackrel{\text{Hip. sobre } A^{-1}}{\geq} \\ &\alpha \sum_K \int_K |\bar{\varepsilon}(\varphi_b)|^2 d\tilde{x} = \alpha \|\bar{\varepsilon}(\varphi_b)\|_{0,\Omega}^2 \stackrel{\text{Korn}}{\geq} C \|\varphi_b\|_{1,\Omega}^2 \geq C \|p_h\|_{0,\Omega}^2. \end{aligned}$$

$$\delta^2 c(p_h, p_h) = \delta^2 \int_{\Omega} \lambda^{-1} \nabla p_h \nabla p_h d\tilde{x} \stackrel{\text{Hip. sobre } \lambda}{\geq} \delta^2 C \int_{\Omega} |\nabla p_h|^2 d\tilde{x} \geq \delta^2 C \|\nabla p_h\|_{0,\Omega}^2.$$

Então

$$\begin{aligned} B((\varphi_1, p_h), (\varphi_1, p_h)) &\geq C \|\varphi_1\|_{1,\Omega}^2 + C \|p_h\|_{0,\Omega}^2 + \delta^2 C \|\nabla p_h\|_{0,\Omega}^2 \stackrel{\text{des. Poincaré}}{\geq} \\ &C \left(\|\varphi_1\|_{1,\Omega}^2 + \|p_h\|_{0,\Omega}^2 + \delta^2 \|p_h\|_{0,\Omega} \right) \geq C \|\varphi_1\|_{1,\Omega}^2 + \tilde{C} \|p_h\|_{0,\Omega}^2 \geq \\ &C \left(\|\varphi_1\|_{1,\Omega}^2 + \|p_h\|_{0,\Omega}^2 \right) = C \|(\varphi_1, p_h)\|_{\Omega}^2. \end{aligned}$$

Portanto, a forma bilinear B é coerciva em $[P_1^\epsilon]^2 \times P_1$. \square

Defino a forma bilinear

$$\begin{aligned} \tilde{B}((\varphi_1, p_h), (\psi_1, q_h)) &:= \bar{a}(\varphi_1, \psi_1) + \bar{a}(\varphi_1, \psi_b) + \bar{a}(\varphi_b, \psi_1) + \bar{a}(\varphi_b, \psi_b) - \\ &- b(\varphi_h, p_h) - b(\psi_1, p_h) + b(\varphi_1, q_h) + b(\varphi_b, q_h) + \delta^2 c(p_h, q_h). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Lema 4.3.4. *As formas bilineares B , definida para (φ_1, p_h) e (φ_1, q_h) , ambos pertencentes ao espaço $[P_1^\epsilon]^2 \times P_1$ e a forma bilinear \tilde{B} , definida para (φ_h, p_h) e (ψ_h, q_h) , pertencente ao espaço $[V_h]^2 \times P_1$, são equivalentes.*

Demonstração. Tomemos a forma bilinear \tilde{B}

$$\tilde{B}((\varphi_h, p_h), (\psi_h, q_h)) = \bar{a}(\varphi_h, \psi_h) - b(\psi, p_h) + b(\varphi, q_h) + \delta^2 c(p_h, q_h).$$

Como $\varphi_h \in [V_h]^2 = [V_\epsilon] \oplus [P_1^\epsilon]^2$, então $\varphi_h = \varphi_b + \varphi_1$. De modo análogo, $\psi_h \in [V_h]^2$, donde $\psi_h = \psi_1 + \psi_b$. Então

$$\begin{aligned} \tilde{B}((\varphi_1 + \varphi_b, p_h), (\psi_1 + \psi_b, q_h)) &= \bar{a}(\varphi_1, \psi_1) + \bar{a}(\varphi_b, \psi_1) + \bar{a}(\varphi_1, \psi_b) + \bar{a}(\varphi_b, \psi_b) - \\ &\quad - b(\psi_1, p_h) - b(\psi_b, p_h) + b(\varphi_1, q_h) + b(\varphi_b, q_h) + \delta^2 c(p_h, q_h). \end{aligned}$$

Observemos que

$$\bar{a}(\varphi_b, \psi_1) = 0,$$

pois $\psi_1 \in [P_1^\epsilon]^2$.

De forma análoga,

$$\bar{a}(\varphi_1, \psi_b) = 0,$$

pois $\varphi_1 \in [P_1^\epsilon]^2$.

Como os termos $\bar{a}(\varphi_b, \psi_b)$ e $b(\psi_b, p_h)$ são termos do problema local (4.16), em K , então a forma bilinear B é equivalente a forma bilinear \tilde{B} .

□

A seguir mostramos a continuidade da forma bilinear B .

Lema 4.3.5. *Sejam (φ_1, p_h) e (ψ_1, q_h) , ambos pertencentes ao espaço $[P_1^\epsilon]^2 \times P_1$.*

Então

$$B((\varphi_1, p_h), (\psi_1, q_h)) \leq C \|(\varphi_1, p_h)\|_\Omega \|(\psi_1, q_h)\|_\Omega,$$

ou seja, a forma bilinear B é contínua.

Demonstração. Observemos que

$$\begin{aligned}\bar{a}(\varphi_1, \psi_1) &= \frac{1}{3} \int_{\Omega} A^{-1} \bar{\varepsilon}(\varphi_1) : \bar{\varepsilon}(\psi_1) dx \leq C \int_{\Omega} \bar{\varepsilon}(\varphi_1) : \bar{\varepsilon}(\psi_1) dx \\ &\leq C \|\bar{\varepsilon}(\varphi_1)\|_{0,\Omega} \|\bar{\varepsilon}(\psi_1)\|_{0,\Omega} \leq C \|\nabla_{\sim} \varphi_1\|_{0,\Omega} \|\nabla_{\sim} \psi_1\|_{0,\Omega} \leq C \|\varphi_1\|_{1,\Omega} \|\psi_1\|_{1,\Omega}.\end{aligned}$$

$$b(\psi_1, p_h) = \int_{\Omega} \operatorname{div} \psi_1 \cdot p_h dx \leq C \|\nabla_{\sim} \psi_1\|_{0,\Omega} \|p_h\|_{0,\Omega} \leq C \|\psi_1\|_{1,\Omega} \|p_h\|_{0,\Omega}.$$

$$b(\varphi_b, q_h) = \int_{\Omega} \operatorname{div} \varphi_1 \cdot q_h dx \leq C \|\varphi_b\|_{1,\Omega} \|q_h\|_{0,\Omega} \leq C \|p_h\|_{0,\Omega} \|q_h\|_{0,\Omega}.$$

$$c(p_h, q_h) = \int_{\Omega} \delta^2 \lambda^{-1} \nabla_{\sim} p_h \cdot \nabla_{\sim} q_h dx \leq C \delta^2 \|\nabla_{\sim} p_h\|_{0,\Omega} \|\nabla_{\sim} q_h\|_{0,\Omega} \leq \frac{C \delta^2}{h^2} \|p_h\|_{0,\Omega} \|q_h\|_{0,\Omega},$$

sendo esta última desigualdade obtida através da desigualdade inversa. Portanto,

$$\begin{aligned}\bar{B}((\varphi_1, p_h), (\psi_1, q_h)) &= \bar{a}(\varphi_1, \psi_1) - b(\psi_1, p_h) + b(\varphi_1, q_h) + \delta^2 c(p_h, q_h), \\ &\leq C \|\varphi_1\|_{1,\Omega} \|\psi_1\|_{1,\Omega} + C \|\psi_1\|_{1,\Omega} \|p_h\|_{0,\Omega} + C \|p_h\|_{0,\Omega} \|q_h\|_{0,\Omega} + \frac{C \delta^2}{h^2} \|p_h\|_{0,\Omega} \|q_h\|_{0,\Omega}, \\ &\leq C \|\psi_1\|_{1,\Omega} \left(\|\varphi_1\|_{1,\Omega} + \|p_h\|_{0,\Omega} \right) + C \|q_h\|_{0,\Omega} \left(\|\varphi_1\|_{1,\Omega} + \|p_h\|_{0,\Omega} \right), \\ &\leq C \left(\|\varphi_1\|_{1,\Omega} + \|p_h\|_{0,\Omega} \right) \left(\|\psi_1\|_{1,\Omega} + \|q_h\|_{0,\Omega} \right) \leq C \|(\varphi_1, p_h)\|_{\Omega} \|(\psi_1, q_h)\|_{\Omega}.\end{aligned}$$

Concluimos que a forma bilinear B é contínua. \square

O lema a seguir mostra que o método numérico é consistente.

Lema 4.3.6. *Seja $(\check{\varphi}, p) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times H_0^1(\Omega)$ uma solução fraca para o problema (4.9) e (φ_h, p_h) a solução de (4.10), com $[V_h]^2 = [V_\epsilon]^2$ e $Q_h = P_1$. Então*

$$B((\check{\varphi} - \varphi_h, p - p_h), (\psi_h, q_h)) = 0 \quad \text{para todo } (\psi_h, q_h) \in [V_h]^2 \times Q_h.$$

Demonstração. Pela definição da forma bilinear \tilde{B} , temos

$$\tilde{B}((\check{\varphi}, p), (\psi_h, q_h)) = \bar{a}(\check{\varphi}, \psi_h) - b(\psi_h, p) + b(\check{\varphi}, q_h) + \delta^2 c(p, q_h).$$

Como $[V_h]^2 \subset [H_0^1(\Omega)]^2$ e $P_1 \subset H_0^1(\Omega)$, podemos em (4.9) escolher $\underline{\psi} = \underline{\psi}_h$ e $q = q_h$ de forma que

$$\bar{a}(\underline{\varphi}, \underline{\psi}_h) - b(\underline{\psi}_h, p) + b(\underline{\varphi}, q_h) + \delta^2 c(p, q_h) = (\bar{F} - \text{rot}r, \underline{\psi}_h),$$

ou seja,

$$\tilde{B}((\underline{\varphi}, p), (\underline{\psi}_h, q_h)) = (\bar{F} - \text{rot}r, \underline{\psi}_h).$$

Por outro lado, como $\varphi_h = \varphi_1 + \varphi_b$ e $\psi_h = \psi_1 + \psi_b$, então

$$\bar{a}(\underline{\varphi}, \underline{\psi}_1 + \underline{\psi}_b) - b(\underline{\psi}_1 + \underline{\psi}_b, p) + b(\underline{\varphi}, q_h) + \delta^2 c(p, q_h) = (\bar{F} - \text{rot}r, \underline{\psi}_1 + \underline{\psi}_b),$$

$$\begin{aligned} \bar{a}(\underline{\varphi}, \underline{\psi}_1) + \bar{a}(\underline{\varphi}, \underline{\psi}_b) - b(\underline{\psi}_1, p) - b(\underline{\psi}_b, p) + b(\underline{\varphi}, q_h) + \\ + \delta^2 c(p, q_h) = (\bar{F} - \text{rot}r, \underline{\psi}_1) + (\bar{F} - \text{rot}r, \underline{\psi}_b). \end{aligned}$$

Observemos que

$$\bar{a}(\underline{\varphi}, \underline{\psi}_b) - b(\underline{\psi}_b, p) = (\bar{F} - \text{rot}r, \underline{\psi}_b),$$

ou seja,

$$-\frac{1}{3} \text{div} \left[A^{-1} \bar{\underline{e}}(\underline{\varphi}) \right] = \bar{F} - \text{rot}r - \nabla p.$$

A partir da definição para a forma bilinear B , temos

$$\begin{aligned} \bar{B}((\varphi_1, p_h), (\psi_1, q_h)) = \bar{a}(\varphi_1, \psi_1) - b(\psi_1, p_h) + \\ + b(\varphi_1, q_h) + b(\varphi_b, q_h) + \delta^2 c(p_h, q_h) = (\bar{F} - \text{rot}r, \psi_1). \end{aligned}$$

A partir do problema local (4.12), temos que

$$\bar{a}(\varphi_b, \psi_b) + \bar{a}(\varphi_1, \psi_b) - b(\psi_b, p_h) = (\bar{F} - \text{rot}r, \psi_b),$$

donde

$$\tilde{B}((\varphi_h, p_h), (\psi_h, q_h)) = (\bar{F} - \text{rot}r, \psi_1) + (\bar{F} - \text{rot}r, \psi_b).$$

Como

$$\tilde{B}((\check{\varphi}, p), (\psi_h, q_h)) = (\bar{F} - \text{rot}r, \psi_1) + (\bar{F} - \text{rot}r, \psi_h),$$

então

$$\tilde{B}((\check{\varphi}, p), (\psi_h, q_h)) = \tilde{B}((\varphi_h, p_h), (\psi_h, q_h)),$$

donde

$$\tilde{B}((\check{\varphi} - \varphi_h, p - p_h), (\psi_h, q_h)) = 0,$$

e o método numérico é consistente. \square

A seguir apresentamos o resultado de melhor aproximação, obtido tomando-se como base o trabalho de Araya et. al [Araya et al. (2006)].

Lema 4.3.7. *Seja $(\check{\varphi}, p) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times H_0^1(\Omega)$ uma solução do problema de Stokes oscilatório (1.8) e (φ_1, p_h) a solução do problema aproximado em $[P_1^\epsilon]^2 \times P_1$. Então a seguinte estimativa ocorre*

$$\|\check{\varphi} - \varphi_1\|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq C \left(\|\check{\varphi} - \tilde{\varphi}_h\|_{1,\Omega} + \|p - \tilde{p}_h\|_{0,\Omega} \right), \quad (4.25)$$

para todo $\tilde{\varphi}_h$ em $[P_1^\epsilon]^2$ e \tilde{p}_h em P_1 .

Demonstração. Seja $(\tilde{\varphi}_h, \tilde{p}_h) := (I_h(\varphi), I_h(p)) \in [P_1^\epsilon]^2 \times P_1$. Definimos $\eta^{\check{\varphi}} := \check{\varphi} - \tilde{\varphi}_h$ e $\eta^p := p - \tilde{p}_h$. Pela coercividade do método, temos

$$\|(\varphi_1 - \tilde{\varphi}_h, p_h - \tilde{p}_h)\|_\Omega^2 \leq B((\varphi_1 - \tilde{\varphi}_h, p_h - \tilde{p}_h), (\varphi_1 - \tilde{\varphi}_h, p_h - \tilde{p}_h)).$$

Pela consistência do método, temos

$$B((\check{\varphi} - \varphi_1, p - p_h), (\varphi_1 - \tilde{\varphi}_h, p_h - \tilde{p}_h)) = 0.$$

Em particular, como $(\tilde{\varphi}_h, \tilde{p}_h) \in [P_1^\epsilon]^2 \times P_1$, temos

$$B((\tilde{\varphi} - \varphi_1, p - p_h), (\tilde{\varphi}_h, \tilde{p}_h)) = 0,$$

e como $(\varphi_1, p_h) \in [P_1^\epsilon]^2 \times P_1$, temos

$$\begin{aligned} \|(\varphi_1 - \tilde{\varphi}_h, p_h - \tilde{p}_h)\|_\Omega^2 &\leq B((\varphi_1 - \tilde{\varphi}_h, p_h - \tilde{p}_h), (\varphi_1 - \tilde{\varphi}_h, p_h - \tilde{p}_h)) \\ &+ B((\tilde{\varphi} - \varphi_1, p - p_h), (\varphi_1 - \tilde{\varphi}_h, p_h - \tilde{p}_h)) = B((\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}_h, p - \tilde{p}_h), (\varphi_1 - \tilde{\varphi}_h, p_h - \tilde{p}_h)) = \\ &B((\eta^{\tilde{\varphi}}, \eta^p), (\varphi_1 - \tilde{\varphi}_h, p_h - \tilde{p}_h)) = \bar{a}(\eta^{\tilde{\varphi}}, \varphi_1 - \tilde{\varphi}_h) - b(\varphi_1 - \tilde{\varphi}_h, \eta^p) + b(\eta^{\tilde{\varphi}}, p_h - \tilde{p}_h) + \\ &b(\mathcal{M}_K(\eta^p), p_h - \tilde{p}_h) + \delta^2 c(\eta^p, p_h - \tilde{p}_h). \end{aligned}$$

Como a forma bilinear B é contínua, então

$$B((\eta^{\tilde{\varphi}}, \eta^p), (\varphi_1 - \tilde{\varphi}_h, p_h - \tilde{p}_h)) \leq C \|(\eta^{\tilde{\varphi}}, \eta^p)\|_\Omega \|(\varphi_1 - \tilde{\varphi}_h, p_h - \tilde{p}_h)\|_\Omega.$$

Logo

$$\|(\varphi_1 - \tilde{\varphi}_h, p_h - \tilde{p}_h)\|_\Omega^2 \leq C \|(\eta^{\tilde{\varphi}}, \eta^p)\|_\Omega \|(\varphi_1 - \tilde{\varphi}_h, p_h - \tilde{p}_h)\|_\Omega.$$

Portanto

$$\|(\varphi_1 - \tilde{\varphi}_h, p_h - \tilde{p}_h)\|_\Omega \leq C \|(\eta^{\tilde{\varphi}}, \eta^p)\|_\Omega. \quad (4.26)$$

Considere a seguinte norma

$$\begin{aligned} \|(\tilde{\varphi} - \varphi_1, p - p_h)\|_\Omega &= \|(\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}_h + \tilde{\varphi}_h - \varphi_1, p - \tilde{p}_h + \tilde{p}_h - p_h)\|_\Omega \leq \\ &\|(\eta^{\tilde{\varphi}}, \eta^p)\|_\Omega + \|(\varphi_1 - \tilde{\varphi}_h, p_h - \tilde{p}_h)\|_\Omega. \end{aligned}$$

De (4.26), temos

$$\|(\tilde{\varphi} - \varphi_1, p - p_h)\|_\Omega \leq \|(\eta^{\tilde{\varphi}}, \eta^p)\|_\Omega + C \|(\eta^{\tilde{\varphi}}, \eta^p)\|_\Omega,$$

donde

$$\|(\check{\varphi} - \varphi_1, p - p_h)\|_{\Omega} \leq C (\|(\eta^{\check{\varphi}}, \eta^p)\|_{\Omega}).$$

Então

$$\|\check{\varphi} - \varphi_1\|_{1,\Omega}^2 + \|p - p_h\|_{0,\Omega}^2 \leq C \left(\|\check{\varphi} - \check{\varphi}_h\|_{1,\Omega}^2 + \|p - \tilde{p}_h\|_{0,\Omega}^2 \right),$$

e, portanto,

$$\|\check{\varphi} - \varphi_1\|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq C \left(\|\check{\varphi} - \check{\varphi}_h\|_{1,\Omega} + \|p - \tilde{p}_h\|_{0,\Omega} \right).$$

□

A seguir apresentamos alguns resultados que complementarão a análise de erro.

Teorema 4.3.1. *Seja $\check{\varphi} \in [H^2(\Omega)]^2$ a solução do problema de Stokes oscilatório (1.8) e $\varphi_h \in [V_{\epsilon}]^2$ a solução para o problema aproximado (4.10). Então, temos a seguinte estimativa*

$$\|\check{\varphi} - \varphi_h\|_{1,\Omega} \leq C(h + \epsilon) \|\bar{F} - \text{rot}r\|_{0,\Omega} + C \left(\frac{\epsilon}{h} \right)^{1/2} \|\varphi_0\|_{1,\infty,\Omega}, \quad (4.27)$$

onde $\varphi_0 \in [H^2(\Omega)]^2 \cap [W^{1,\infty}(\Omega)]^2$ é a solução do problema homogeneizado (C.12).

Demonstração. Lembremos da expansão assintótica para a função $\check{\varphi}$

$$\check{\varphi} \sim \varphi_0 + \epsilon \varphi_1 - \epsilon \theta.$$

Passo 1: Escrever a função de interpolação para o primeiro termo da expansão assintótica da função $\check{\varphi}$.

Denotamos por $\varphi_I \in [V_{\epsilon}]^2$ a função de interpolação para o primeiro termo da expansão assintótica da função $\check{\varphi}$. Em cada elemento K , com nós $\{x_i\}$,

$$\varphi_I(\underline{x}) = I_h \varphi_0(\underline{x}) = \sum_j \varphi_0(x_j) \phi_j(\underline{x}) \in [V_{\epsilon}]^2.$$

onde ϕ_j são as funções de base definidas como soluções dos seguintes problemas locais

$$\operatorname{div} \left[A^{-1} \underline{\underline{e}}(\phi_j) \right] = 0 \quad \text{em } K, \quad (4.28)$$

ϕ_j é linear em ∂K .

Passo 2: Considerar a expansão assintótica para as funções de base que compõe a interpolante do primeiro termo da expansão assintótica.

A expansão assintótica para as funções de base pode ser dada por

$$\phi_j(x) \sim \phi_j^0(x) + \epsilon \phi_j^1(x) - \epsilon \theta_I.$$

Nosso objetivo é estimar $\|\check{\varphi} - \varphi_I\|_{1,\Omega}$. Para tanto, iremos estimar $|\check{\varphi} - \varphi_I|_{1,\Omega}$.

Passo 3: Expandir os termos da estimativa.

Note que

$$\|\check{\varphi} - \varphi_I\|_{1,\Omega}^2 \leq C |\check{\varphi} - \varphi_I|_{1,\Omega}^2 = \sum_K |\check{\varphi} - \varphi_I|_{1,K}^2.$$

Portanto, somando e subtraindo os termos das expansões assintóticas para as funções ϕ_j e $\check{\varphi}$, obtemos

$$\begin{aligned} |\check{\varphi} - \varphi_I|_{1,K} &= |\check{\varphi} - (\varphi_0 + \epsilon \varphi_1 - \epsilon \theta) + (\varphi_0 + \epsilon \varphi_1 - \epsilon \theta) - \varphi_I + \\ &\quad \sum_j \left[\varphi_0(x_j) \left(\phi_j^0(x) + \epsilon \phi_j^1(x) - \epsilon \theta_I - \phi_j^0(x) - \epsilon \phi_j^1(x) + \epsilon \theta_I \right) \right] |_{1,K}. \end{aligned}$$

Passo 4: Organizar os termos semelhantes e separá-los por desigualdade triangular

$$\begin{aligned} |\check{\varphi} - \varphi_I|_{1,K} &\leq |\varphi_0 - \sum_j \varphi_0(x_j) \phi_j^0(x)|_{1,K} + |\epsilon \varphi_1 - \epsilon \sum_j \varphi_0(x_j) \phi_j^1(x)|_{1,K} + \\ &\quad |\epsilon \theta - \epsilon \sum_j \varphi_0(x_j) \theta_I|_{1,K} + |\check{\varphi} - (\varphi_0 + \epsilon \varphi_1 - \epsilon \theta)|_{1,K} + \\ &\quad + |\varphi_I - \sum_j \left[\varphi_0(x_j) \phi_j^0(x) + \epsilon \varphi_0(x_j) \phi_j^1(x) - \epsilon \varphi_0(x_j) \theta_I \right]|_{1,K}. \quad (4.29) \end{aligned}$$

Passo 5: Caracterização das funções φ_1 e ϕ_j^1 .

As funções φ_1 e ϕ_j^1 podem ser caracterizadas pelo primeiro termo das suas respectivas expansões assintóticas conjuntamente com a função χ , que é solução do problema de célula (C.10).

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \chi_{\approx \approx x}^{\bar{e}}(\varphi_0) \\ \phi_j^1 &= \chi_{\approx \approx x}^{\bar{e}}(\phi_j^0).\end{aligned}$$

Passo 6: Substituição das caracterizações das funções φ_1 e ϕ_j^1 nas desigualdades em (4.29).

$$\begin{aligned}|\check{\varphi} - \varphi_I|_{1,K} &\leq |\varphi_0 - \sum_j \varphi_0(x_j)\phi_j^0(x)|_{1,K} + |\epsilon \chi_{\approx \approx x}^{\bar{e}}(\varphi_0) - \epsilon \sum_j \varphi_0(x_j)\chi_{\approx \approx x}^{\bar{e}}(\phi_j^0)|_{1,K} \\ &\quad + |\epsilon \check{\theta} - \epsilon \sum_j \varphi_0(x_j)\check{\theta}_I|_{1,K} + |\check{\varphi} - (\varphi_0 + \epsilon \varphi_1 - \epsilon \check{\theta})|_{1,K} \\ &\quad + |\varphi_I - \left[\sum_j \varphi_0(x_j)\phi_j^0(x) + \epsilon \sum_j \varphi_0(x_j)\chi_{\approx \approx x}^{\bar{e}}(\phi_j^0) - \epsilon \sum_j \varphi_0(x_j)\check{\theta}_I \right]|_{1,K}. \quad (4.30)\end{aligned}$$

Passo 7: Estimativas locais

Da teoria de interpolação, temos o seguinte resultado

$$|\varphi_0 - \sum_j \varphi_0(x_j)\phi_j^0(x)|_{1,K} \leq \|\varphi_0 - \sum_j \varphi_0(x_j)\phi_j^0(x)\|_{1,K} \leq Ch\|\bar{F} - \text{rotr}\|_{0,K}.$$

Observemos que

$$\begin{aligned}\sum_K |\varphi_0 - \sum_j \varphi_0(x_j)\phi_j^0(x)|_{1,K}^2 &= |\varphi_0 - \varphi_0(x_j)\phi_j^0(x)|_{1,\Omega}^2 \\ \sum_K \|\bar{F} - \text{rotr}\|_{0,K}^2 &= \|\bar{F} - \text{rotr}\|_{0,\Omega}^2,\end{aligned}$$

donde

$$|\varphi_0 - \sum_j \varphi_0(x_j)\phi_j^0(x)|_{1,\Omega}^2 \leq Ch^2\|\bar{F} - \text{rotr}\|_{0,\Omega}^2. \quad (4.31)$$

Considero

$$\begin{aligned}
|\epsilon \chi_{\tilde{\mathbb{X}}_{\tilde{x}}} \bar{e}(\varphi_0) - \epsilon \sum_j \varphi_0(x_j) \chi_{\tilde{\mathbb{X}}_{\tilde{x}}} \bar{e}(\phi_j^0)|_{1,K}^2 &= |\epsilon \chi_{\tilde{\mathbb{X}}_{\tilde{x}}} [\bar{e}(\varphi_0) - \sum_j \varphi_0(x_j) \bar{e}(\phi_j^0)]|_{1,K}^2 \\
&\leq \epsilon |\chi_{\tilde{\mathbb{X}}_{\tilde{x}}}|_{1,\infty,K}^2 \|\bar{e}(\varphi_0) - \sum_j \varphi_0(x_j) \bar{e}(\phi_j^0)\|_{0,K}^2 + \\
&\quad + \epsilon \|\chi_{\tilde{\mathbb{X}}_{\tilde{x}}}\|_{0,\infty,K}^2 |\varphi_0(x_j) - \sum_j \varphi_0(x_j) \phi_j^0|_{2,K}^2.
\end{aligned}$$

A partir do resultado anterior, usando novamente a estimativa da teoria de interpolação, obtemos

$$|\epsilon \chi_{\tilde{\mathbb{X}}_{\tilde{x}}} \bar{e}(\varphi_0) - \epsilon \sum_j \varphi_0(x_j) \chi_{\tilde{\mathbb{X}}_{\tilde{x}}} \bar{e}(\phi_j^0)|_{1,K}^2 \leq Ch^2 \|\bar{F} - \text{rot}r\|_{0,K}^2 + C\epsilon^2 |\varphi_0|_{2,K}^2.$$

Portanto

$$\sum_K |\epsilon \chi_{\tilde{\mathbb{X}}_{\tilde{x}}} \bar{e}(\varphi_0) - \epsilon \sum_j \varphi_0(x_j) \chi_{\tilde{\mathbb{X}}_{\tilde{x}}} \bar{e}(\phi_j^0)|_{1,K}^2 \leq Ch^2 \sum_K \|\bar{F} - \text{rot}r\|_{0,K}^2 + C\epsilon^2 \sum_K |\varphi_0|_{2,K}^2,$$

donde concluimos que

$$|\epsilon \chi_{\tilde{\mathbb{X}}_{\tilde{x}}} \bar{e}(\varphi_0) - \epsilon \sum_j \varphi_0(x_j) \chi_{\tilde{\mathbb{X}}_{\tilde{x}}} \bar{e}(\phi_j^0)|_{1,\Omega}^2 \leq Ch^2 \|\bar{F} - \text{rot}r\|_{0,\Omega}^2 + C\epsilon^2 |\varphi_0|_{2,\Omega}^2.$$

Consideramos a estimativa de regularidade

$$\|\varphi_0\|_{2,\Omega} \leq C \|\bar{F} - \text{rot}r\|_{0,\Omega}.$$

Então

$$|\epsilon \chi_{\tilde{\mathbb{X}}_{\tilde{x}}} \bar{e}(\varphi_0) - \epsilon \sum_j \varphi_0(x_j) \chi_{\tilde{\mathbb{X}}_{\tilde{x}}}^j \bar{e}(\phi_j^0)|_{1,\Omega}^2 \leq C(\epsilon^2 + h^2) \|\bar{F} - \text{rot}r\|_{0,\Omega}^2.$$

Precisamos estimar o termo

$$|\varphi_I - \sum_j [\varphi_0(x_j) \phi_j^0(x) + \epsilon \varphi_0(x_j) \phi_j^1(x) - \epsilon \varphi_0(x_j) \theta_I]|_{1,K}^2.$$

A partir da definição para a função φ_I , temos

$$\begin{aligned}
& |\varphi_I - \sum_j \varphi_0(x_j) \phi_j^0(\underline{x}) + \epsilon \phi_j^1(\underline{x}) - \epsilon \theta_I|_{1,K}^2 \\
&= \left| \sum_j \varphi_0(x_j) \phi_j(\underline{x}) - \sum_j \varphi_0(x_j) [\phi_j^0(\underline{x}) + \epsilon \phi_j^1(\underline{x}) - \epsilon \theta_I] \right|_{1,K}^2 \\
&= \left| \sum_j \varphi_0(x_j) [\phi_j(\underline{x}) - \phi_j^0(\underline{x}) - \epsilon \phi_j^1(\underline{x}) + \epsilon \theta_I] \right|_{1,K}^2 \leq C \sum_j |\phi_j(\underline{x}) - \phi_j^0(\underline{x}) - \epsilon (\phi_j^1(\underline{x}) - \theta_I)|_{1,K}^2.
\end{aligned}$$

Da teoria de homogeneização temos que

$$\sum_j |\phi_j(\underline{x}) - \phi_j^0(\underline{x}) - \epsilon (\phi_j^1(\underline{x}) - \theta_I)|_{1,K}^2 \leq C \epsilon^2 \sum_j (\|\bar{F} - \text{rot}r\|_{0,K} + |\phi_j^0|_{2,K})^2.$$

Logo

$$|\varphi_I - \sum_j \varphi_0(x_j) \phi_j^0(\underline{x}) + \epsilon \phi_j^1(\underline{x}) - \epsilon \theta_I|_{1,K}^2 \leq C \epsilon^2 \sum_j (\|\bar{F} - \text{rot}r\|_{0,K} + |\phi_j^0|_{2,K})^2.$$

Como as funções de base ϕ_j são soluções para os problemas locais (4.28), então temos

$$|\varphi_I - \sum_j \varphi_0(x_j) \phi_j^0(\underline{x}) + \epsilon \phi_j^1(\underline{x}) - \epsilon \theta_I|_{1,K}^2 \leq C \epsilon^2 \sum_j (\|\bar{F} - \text{rot}r\|_{0,K})^2.$$

Portanto

$$|\varphi_I - \sum_j \varphi_0(x_j) \phi_j^0(\underline{x}) + \epsilon \phi_j^1(\underline{x}) - \epsilon \theta_I|_{1,\Omega}^2 \leq C \epsilon^2 (\|\bar{F} - \text{rot}r\|_{0,\Omega})^2.$$

Observemos que o termo

$$|\check{\varphi} - (\varphi_0 + \epsilon \varphi_1 - \epsilon \theta)|_{1,K}^2$$

também pode ser estimado usando a teoria de homogeneização. Logo

$$|\check{\varphi} - (\varphi_0 + \epsilon \varphi_1 - \epsilon \theta)|_{1,K}^2 \leq C \epsilon^2 (\|\bar{F} - \text{rot}r\|_{0,K} + |\varphi_0|_{2,K})^2,$$

donde concluimos

$$\|\tilde{\varphi} - (\varphi_0 + \epsilon\varphi_1 - \epsilon\tilde{\theta})\|_{1,\Omega}^2 \leq C\epsilon^2(\|\bar{F} - \text{rot}r\|_{0,\Omega} + |\varphi_0|_{2,\Omega})^2.$$

Passo 8: Estimativas para os corretores de fronteira

Observemos que o termo $\|\epsilon\tilde{\theta} - \epsilon \sum_j \varphi_0(x_j)\tilde{\theta}_I\|_{1,K}$ pode ser estimado por

$$\|\epsilon\tilde{\theta} - \epsilon \sum_j \varphi_0(x_j)\tilde{\theta}_I\|_{1,K} \leq \|\epsilon\tilde{\theta}\|_{1,K} + \|\epsilon \sum_j \varphi_0(x_j)\tilde{\theta}_I\|_{1,K}.$$

A seguir apresentamos as duas estimativas obtidas para os corretores de fronteira no domínio Ω .

Teorema 4.3.2. *Seja $\tilde{\theta}$ a função que representa o corretor de fronteira para a expansão assintótica da função $\tilde{\varphi}$. Então a seguinte estimativa ocorre*

$$\|\epsilon\tilde{\theta}\|_{1,\Omega} \leq C\sqrt{\epsilon}\|\varphi_0\|_{1,\infty,\Omega} + C\epsilon|\varphi_0|_{2,\Omega}. \quad (4.32)$$

Teorema 4.3.3. *Seja $\tilde{\theta}_I$ a função que representa o corretor de fronteira para a expansão assintótica das funções de base ϕ_j . Então a seguinte estimativa ocorre*

$$\|\epsilon\tilde{\theta}_I\|_{1,\Omega} \leq C\left(\frac{\epsilon}{h}\right)^{1/2}\|\varphi_0\|_{1,\infty,\Omega}.$$

A partir das estimativas para os corretores de fronteira, podemos concluir que

$$|\tilde{\varphi} - \varphi_I|_{1,\Omega} \leq C(\epsilon + h)\|\bar{F} - \text{rot}r\|_{0,\Omega} + C\left(\frac{\epsilon}{h}\right)^{1/2}\|\varphi_0\|_{1,\infty,\Omega}.$$

Pela desigualdade de Poincaré,

$$\|\tilde{\varphi} - \varphi_I\|_{1,\Omega} \leq C|\tilde{\varphi} - \varphi_I|_{1,\Omega} \leq C(\epsilon + h)\|\bar{F} - \text{rot}r\|_{0,\Omega} + C\left(\frac{\epsilon}{h}\right)^{1/2}\|\varphi_0\|_{1,\infty,\Omega}.$$

Considerando

$$\|\check{\varrho} - \varrho_h\|_{1,\Omega} = \|\check{\varrho} - \varrho_I + \varrho_I - \varrho_h\|_{1,\Omega} \leq \|\check{\varrho} - \varrho_I\|_{1,\Omega} + \|\varrho_I - \varrho_h\|_{1,\Omega},$$

e utilizando novamente a estimativa da teoria de interpolação clássica, temos

$$\|\check{\varrho} - \varrho_h\|_{1,\Omega} \leq C(\epsilon + h)\|\bar{F} - \text{rot}r\|_{0,\Omega} + C\left(\frac{\epsilon}{h}\right)^{1/2}\|\varrho_0\|_{1,\infty,\Omega}.$$

□

Lema 4.3.8. *Seja $(\check{\varrho}, p) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times H_0^1(\Omega)$ uma solução para o problema de Stokes oscilatório (1.8) e \tilde{p}_h a função de interpolação em P_1 para o primeiro termo da expansão assintótica da função p , isto é, p_0 . Então a seguinte estimativa ocorre*

$$\|p - \tilde{p}_h\|_{0,\Omega} \leq C(\epsilon + h^2)\|p_0\|_{2,\Omega}.$$

Demonstração. Observemos que

$$\|p - \tilde{p}_h\|_{0,\Omega} \leq \|p - p_0\|_{0,\Omega} + \|p_0 - \tilde{p}_h\|_{0,\Omega}.$$

Da teoria de homogeneização temos o seguinte resultado

$$\|p - p_0\|_{0,\Omega} \leq C\epsilon\|p_0\|_{2,\Omega}.$$

E da teoria de interpolação clássica, temos

$$\|p_0 - \tilde{p}_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^2\|p_0\|_{2,\Omega}.$$

Portanto

$$\|p - \tilde{p}_h\|_{0,\Omega} \leq \|p - p_0\|_{0,\Omega} + \|p_0 - \tilde{p}_h\|_{0,\Omega} \leq C\epsilon\|p_0\|_{2,\Omega} + Ch^2\|p_0\|_{2,\Omega} \leq C(\epsilon + h^2)\|p_0\|_{2,\Omega}.$$

□

Observemos que, como $\varphi_h = \varphi_1 + \varphi_b$, então

$$\|\check{\varphi} - \varphi_1\|_{1,\Omega} \leq \|\varphi - \varphi_h\|_{1,\Omega}.$$

A partir dos resultados anteriores e usando o teorema de melhor aproximação, obtemos a estimativa entre a solução exata $(\check{\varphi}, p) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times H_0^1(\Omega)$ para o problema de Stokes oscilatório (1.8) e a solução aproximada $(\varphi_1, p_h) \in [P_\epsilon^1]^2 \times P_1$ para o problema (4.11).

Teorema 4.3.4. *Seja $(\check{\varphi}, p) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times H_0^1(\Omega)$ a solução para o problema de Stokes oscilatório (1.8) e $(\varphi_1, p_1) \in [P_\epsilon^1]^2 \times P_1$ a solução para o problema aproximado (4.11). Então a seguinte estimativa ocorre*

$$\begin{aligned} \|\check{\varphi} - \varphi_1\|_{1,\Omega} + \|p - p_1\|_{0,\Omega} &\leq C(h + \epsilon) \|\bar{F} - \text{rot}r\|_{0,\Omega} + C\left(\frac{\epsilon}{h}\right)^{1/2} \|\varphi_0\|_{1,\infty,\Omega} \\ &\quad + C(\epsilon + h^2) \|p_0\|_{2,\Omega}, \end{aligned}$$

onde $(\varphi_0, p_0) \in \left[\left([H^2(\Omega)]^2 \cap W^{1,\infty}(\Omega) \right) \times H_0^1(\Omega) \right]$ é a solução do problema homogeneizado (C.12).

Demonstração. A demonstração segue diretamente do Lema 4.3.7 de melhor aproximação, do Teorema 4.3.1 e do Lema 4.3.8. □

Teorema 4.3.5. *Seja $(\varphi, w) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times H_0^1(\Omega)$ a solução para as equações de Reissner-Mindlin (4.1) e $(\check{\varphi}_1, w_1) \in [P_\epsilon^1]^2 \times P_1$ a solução aproximada para as equações de Reissner-Mindlin. Então a seguinte estimativa ocorre*

$$\begin{aligned} \|\varphi - \check{\varphi}_1\|_{1,\Omega} + \|w - w_1\|_{1,\Omega} &\leq C(h + \epsilon) \|\bar{F} - \text{rot}r\|_{0,\Omega} + C\left(\frac{\epsilon}{h}\right)^{1/2} \|\varphi_0\|_{1,\infty,\Omega} \\ &\quad + C(\epsilon + h^2) \|p_0\|_{2,\Omega}, \end{aligned}$$

onde $(\varphi_0, p_0) \in \left[\left([H^2(\Omega)]^2 \cap W^{1,\infty}(\Omega) \right) \times H_0^1(\Omega) \right]$ é a solução do problema homogeneizado (C.12).

Demonstração. Lembremos que $\check{\varphi} = (-\varphi_2, \varphi_1)$. Definimos $\check{\varphi}_1 = (-\varphi_1)_2, (\varphi_1)_1$.

Então

$$\|\check{\varphi} - \varphi_1\|_{1,\Omega}^2 = \int_{\Omega} |\check{\varphi} - \varphi_1|^2 + |\nabla_{\check{\varphi}} [\check{\varphi} - \varphi_1]|^2 dx.$$

Mas $|\check{\varphi} - \varphi_1|^2 = |\varphi - \check{\varphi}_1|^2$. Portanto

$$\|\varphi - \check{\varphi}_1\|_{1,\Omega} = \|\check{\varphi} - \varphi_1\|_{1,\Omega}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \|\varphi - \check{\varphi}_1\|_{1,\Omega} &\leq C(h + \epsilon) \|\bar{F} - \text{rot}r\|_{0,\Omega} + C\left(\frac{\epsilon}{h}\right)^{1/2} \|\varphi_0\|_{1,\infty,\Omega} \\ &\quad + C(\epsilon + h^2) \|p_0\|_{2,\Omega}. \end{aligned}$$

A partir da equação (4.8) temos que

$$\begin{aligned} \|w - w_1\|_{1,\Omega} &\leq \|\varphi - \check{\varphi}_1\|_{0,\Omega}^2 \leq \|\varphi - \check{\varphi}_1\|_{1,\Omega}^2 \leq C(h + \epsilon) \|\bar{F} - \text{rot}r\|_{0,\Omega} + C\left(\frac{\epsilon}{h}\right)^{1/2} \|\varphi_0\|_{1,\infty,\Omega} \\ &\quad + C(\epsilon + h^2) \|p_0\|_{2,\Omega}, \end{aligned}$$

donde concluímos que

$$\begin{aligned} \|\varphi - \check{\varphi}_1\|_{1,\Omega} + \|w - w_1\|_{1,\Omega} &\leq C(h + \epsilon) \|\bar{F} - \text{rot}r\|_{0,\Omega} + C\left(\frac{\epsilon}{h}\right)^{1/2} \|\varphi_0\|_{1,\infty,\Omega} \\ &\quad + C(\epsilon + h^2) \|p_0\|_{2,\Omega}. \end{aligned}$$

□

4.4 Conclusões

O Capítulo 4 teve por objetivo propor e analisar um método numérico para o problema de Stokes oscilatório (1.8), gerado a partir da formulação mista para as equações de Reissner-Mindlin (1.7) proposta por Arnold [Arnold (1991)].

Como dito anteriormente, não há registros na literatura de métodos numéricos

para o problema de Stokes com a presença de um coeficiente oscilatório. Baseados no trabalho de Araya [Araya et al. (2006)] e nos métodos tipo bolha tradicionais, como o RFB e o MsFEM, propomos uma formulação bolha a fim de capturar a influência do coeficiente oscilatório na solução do problema. Posteriormente apresentamos a análise de erro para o problema quando consideramos o parâmetro h da malha de elementos finitos maior que o parâmetro ϵ , tamanho característico das inclusões longitudinais, e obtivemos a seguinte estimativa para a solução aproximada $(\check{\varphi}_1, w_1) \in [P_\epsilon^1]^2 \times P^1$ em relação à solução exata $(\varphi, w) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times H_0^1(\Omega)$ para as equações de Reissner-Mindlin (4.1)

$$\begin{aligned} \|\varphi - \check{\varphi}_1\|_{1,\Omega} + \|w - w_1\|_{1,\Omega} &\leq C(h + \epsilon) \|\bar{F} - \text{rot}r\|_{0,\Omega} + C\left(\frac{\epsilon}{h}\right)^{1/2} \|\varphi_0\|_{1,\infty,\Omega} \\ &\quad + C(\epsilon + h^2) \|p_0\|_{2,\Omega}. \end{aligned}$$

Capítulo 5

Conclusão

O presente trabalho teve por objetivo apresentar a modelagem para o problema de placas tridimensionais, no domínio P^δ . Como ponto de partida na análise das dificuldades relacionadas ao domínio P^δ , escolhemos a equação de Poisson (1.1) neste domínio. A seguir analisamos as dificuldades deste domínio no problema de elasticidade linear tridimensional (1.5). Como denotado durante todo o trabalho, a espessura do domínio foi considerada 2δ e as inclusões características presentes na direção longitudinal foram indicadas por ϵ . A relação entre esses dois parâmetros torna o problema proposto difícil, sobretudo no que diz respeito às aproximações numéricas que poderiam ser utilizadas neste tipo de problema tridimensional.

A fim de minimizar as dificuldades existentes no domínio P^δ , várias metodologias foram propostas para os modelos de placas, com o intuito de derivar problemas bidimensionais no plano intermediário, denotado por Ω , que aproximassem de forma satisfatória o problema tridimensional original. Esses processos recebem o nome genérico de *redução de dimensão*. Nessa linha destacamos neste trabalho dois processos distintos que derivam os problemas bidimensionais no plano intermediário Ω : os *métodos assintóticos*, utilizados por Caillerie [Caillerie (1981), Caillerie (1984)] tanto na derivação de modelos bidimensionais para a equação de Poisson (1.1) quanto para o problema de elasticidade linear tridimensional (1.5) e os *modelos hierárquicos*, propostos nos trabalhos de Destuynder [Destuynder (1980)], Miara [Miara (1989)] e Madureira [Madureira (1999)]. Os modelos bidimensionais gerados

via métodos assintóticos apresentam algumas desvantagens, as quais destacamos: a dependência da relação entre os parâmetros δ e ϵ na obtenção do modelo bidimensional adequado e a dependência da periodicidade para as inclusões características longitudinais ϵ . Conforme descrito anteriormente, geramos um problema bidimensional quando a espessura do domínio 2δ é muito menor que as inclusões características ϵ e outro modelo bidimensional quando a relação entre estes parâmetros pequenos é inversa, isto é, as inclusões características longitudinais ϵ são muito menores que a espessura do domínio, 2δ .

Após a verificação destas dificuldades, propomos os *modelos hierárquicos*, os quais tanto para a equação de Poisson (1.1) quanto para o problema de elasticidade linear tridimensional (1.5) geraram um único modelo bidimensional no plano intermediário Ω , em cada caso, sem a dependência da periodicidade para as inclusões longitudinais ϵ . Do ponto de vista computacional, no entanto, gerar um único modelo bidimensional representa um avanço na implementação do problema tridimensional e na obtenção da solução aproximada para o problema tridimensional original, em ambos os casos, porém ainda há a necessidade de se propor métodos numéricos que aproximem as soluções para os problemas bidimensionais obtidos. Sendo assim, verificamos que, tanto o problema bidimensional gerado a partir da equação de Poisson (1.1) quanto o problema de elasticidade linear tridimensional (1.5) necessitavam de aproximações numéricas para a obtenção das soluções bidimensionais. No caso do problema de elasticidade linear tridimensional (1.5), os problemas bidimensionais obtidos foram a equação de membrana (1.6) e as equações de Reissner-Mindlin (1.7), ambos com a presença de coeficientes oscilatórios. A equação de membrana é um problema difusivo com um coeficiente oscilatório, o qual pode ser aproximado utilizando-se métodos de elementos finitos multiescala como RFB ou o MsFEM. Problemas deste tipo aparecem nos trabalhos Hou [Hou et al. (1999)], Hou e Efendiev [Efendiev (2009)] e Carius [Carius (2006)]. Ao aplicar o método de Galerkin padrão para aproximar as equações de Reissner-Mindlin, ocorre o fenômeno conhecido como *locking*, como foi descrito neste tra-

balho. Em virtude desta dificuldade, optamos por uma formulação variacional mista, seguindo o trabalho de Arnold [Arnold (1991)], a qual derivamos um sistema de quatro equações: duas delas são equações de Poisson sem a presença de coeficientes oscilatórios e as outras duas formam um sistema de Stokes com a presença de um coeficiente oscilatório. Para as duas equações de Poisson, o método de Galerkin se comporta muito bem e deve ser utilizado na aproximação da solução deste problema. Para as outras duas equações que formam o sistema de Stokes oscilatório, o qual não havia, até o presente momento, um método numérico que aproximasse de forma satisfatória este tipo de problema.

Neste contexto este trabalho objetivou, também, propor uma aproximação numérica para o sistema de Stokes oscilatório, formulando um método numérico tipo bolha, a exemplo dos métodos já citados, RFB e MsFEM, e também baseados no trabalho de Araya [Araya et al. (2006)]. Obtivemos uma estimativa de erro para esta aproximação da ordem de h e ϵ .

Como trabalhos futuros, sugerimos a escolha ou adaptação de um método numérico que resolva de forma satisfatória o sistema bidimensional gerado pela modelagem hierárquica para a equação de Poisson, dado pelas equações (1.3) e (1.4), bem como a análise de erro do possível método proposto. Além disso, sugerimos também a implementação do método numérico proposto para a equação de membrana (1.6) e para as equações de Reissner-Mindlin (1.7), a qual não será simples. Lembremos que, para obter a solução aproximada no domínio Ω que representa o plano intermediário da placa P^δ , precisamos implementar o sistema de Stokes oscilatório, as outras duas equações de Poisson sem a presença dos coeficientes oscilatórios e a equação de membrana, a fim de obter as funções η , φ e w que compõem a solução aproximada $(\underline{u}_{3D}^{\delta\epsilon}(1), \underline{\underline{\sigma}}^{\delta\epsilon}(1))$ para o problema bidimensional que aproxima o problema de elasticidade linear tridimensional.

Referências Bibliográficas

- S. M Alessandrini, D. N. Arnold, R. S. Falk, e A. L. Madureira. Derivation and justification of plate models by variational methods. **CRM Proceedings and Lecture Notes, Centre de Recherches Mathématiques Université de Montréal, Plates and Shells**, 21:1–20, 1999.
- R. Araya, G. R. Barrenechea, e F. Valentin. Stabilized finite element methods based on multiscale enrichment for the stokes problem. **SIAM J. Numer. Anal.**, 44:322–348, 2006.
- D. N. Arnold. Innovative finite element methods for plates. **Matemática Aplicada e Computacional**, 10, nº2:77–88, 1991.
- A. Bensoussan, J.-L. Lions, e G. Papanicolaou. **Asymptotic Analysis for Periodic Structures**. Amsterdam; New York: North-Holland Pub. Co., 1^a edição, 1978.
- F. Brezzi e M. Fortin. Numerical approximation of reissner-mindlin plates. **Math. Comp.**, 47:151–158, 1986.
- F. Brezzi e A. Russo. Choosing bubbles for advection-diffusion problems. **Math. Models Methods Applied Science**, 4:571–587, 1994.
- D. Caillerie. Homogénéisation des Équations de la diffusion stationnaire dans les domaines cylindriques aplatis. **R.A.I.R.O. Analyse Numerique**, 15:295–319, 1981.
- D. Caillerie. Thin elastic and periodic plates. **Mathematic Method in the Applied Science**, 6:159–191, 1984.

- A. C. Carius. Modelagem hierárquica para a equação do calor em uma placa heterogênea. Dissertação de Mestrado, Laboratório Nacional de Computação Científica, Brasil, 2006.
- P. G. Ciarlet. **Plates and Junctions in Elastic Multi-Structures: An Asymptotic Analysis**. Masson, Paris, 1^a edição, 1990.
- P. G. Ciarlet e P. Destuynder. A justification of the two-dimensional linear plate model. **J. de Mécanique**, 18:315–344, 1979.
- D. Cioranescu e P. Donato. **An Introduction to Homogenization**. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications 17, 1^a edição, 1999.
- D. Destuynder. **Sur une Justification des Modèles de Plaques et de Coques par les Méthodes Asymptotiques**. Tese de Doutorado, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1980.
- P. Destuynder. **Une Théorie Asymptotique des Plaques Minces en Elasticité Linéaire**. Masson, Paris, 1^a edição, 1986.
- Hou T. Y. Efendiev, Y. **Multiscale Finite Element Methods**. Springer, 1^a edição, 2009.
- T. Y. Hou, X. Wu, e Z. Cai. Convergence of a multiscale finite element method for elliptic problems with rapidly oscillating coefficients. **Mathematics of Computation**, 68:913–943, 1999.
- A.E.H.A. Love. **Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity**. Dover Pub., 4^a edição, 1944.
- A. L. Madureira. **Asymptotics and Hierarchical Modeling of Thin Domains**. Tese de Doutorado, The Pennsylvania State University, The Graduate School, Department of Mathematics, 1999.
- B. Miara. Optimal spectral approximation in linearized plate theory. **Applicable Anal.**, 31:291–307, 1989.

- D. Morgenstern. Herleitung der plattentheorie aus der dreidimensionalen elastizitätstheorie. **Arch. Rational Mech. Anal.**, 4:145–152, 1959.
- P. M. Naghdi. The theory of shells and plates. **Handbuch der Physik**, VI a/2: 425–640, 1959.
- E. Reissner. On the theory of bending of elastic plates. **J. Math. Phys.**, 23: 184–191, 1944.
- G. Sangalli. Capturing small scales in elliptic problems using a residual-free bubbles finite element method. **SIAM Multiscale Modeling Simulation**, 4:278–306, 2005.
- S. Timoshenko. **Theory of Elasticity**. McGraw-Hill, New York, 1^a edição, 1951.

Apêndice A

Problemas limite via métodos assintóticos para a equação de Poisson

A.1 A expansão assintótica em torno de ϵ para o problema bidimensional

Consideremos o problema bidimensional (2.15) e a expansão assintótica para a função u^{ϵ^0} em torno de ϵ .

$$u^{\epsilon^0} \sim u_{2D}^0 + \epsilon u_{2D}^1 + \epsilon^2 u_{2D}^2 + \dots \quad (\text{A.1})$$

Como $\underline{\underline{A}}^\epsilon$ é constituída por elementos da matriz $\underline{\underline{a}}^\epsilon$, que é periódica de período ϵ , então $\underline{\underline{A}}^\epsilon$ também é periódica de período ϵ na célula retangular Y . Definimos a variável $\hat{y} = \epsilon^{-1}\hat{x}$ e portanto, $\underline{\underline{A}}(\hat{y}) = \underline{\underline{A}}(\epsilon^{-1}\hat{x}) = \underline{\underline{A}}^\epsilon(\hat{x})$.

Aplicando a regra da cadeia ao operador divergente do problema (2.15) e substituindo pela expansão (A.1), obtemos

$$\begin{aligned} & -\epsilon^{-2} \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underline{\underline{A}}(\hat{y}) \nabla_{\hat{y}} u_{2D}^0 \right] - \epsilon^{-1} \left(\operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\underline{\underline{A}}(\hat{y}) \nabla_{\hat{y}} u_{2D}^0 \right] + \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underline{\underline{A}}(\hat{y}) \nabla_{\hat{x}} u_{2D}^0 \right] \right) \\ & - \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\underline{\underline{A}}(\hat{y}) \nabla_{\hat{x}} u_{2D}^0 \right] - \epsilon^{-1} \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underline{\underline{A}}(\hat{y}) \nabla_{\hat{y}} u_{2D}^1 \right] - \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\underline{\underline{A}}(\hat{y}) \nabla_{\hat{y}} u_{2D}^1 \right] - \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underline{\underline{A}}(\hat{y}) \nabla_{\hat{x}} u_{2D}^1 \right] \\ & - \epsilon \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\underline{\underline{A}}(\hat{y}) \nabla_{\hat{x}} u_{2D}^1 \right] - \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underline{\underline{A}}(\hat{y}) \nabla_{\hat{y}} u_{2D}^2 \right] - \dots \Big|_{\hat{y}=\epsilon^{-1}\hat{x}} = \int_{-1}^1 f d\hat{x}_3. \end{aligned}$$

Agrupando os termos com a potência ϵ^{-2} , temos

$$\operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\approx}{A} \nabla_{\hat{y}} u_{2D}^0 \right] = 0 \quad \text{em } \Omega \times Y.$$

Desta forma concluímos que a função u_{2D}^0 é independente de \hat{y} , ou seja,

$$u_{2D}^0(\hat{x}, \hat{y}) := \bar{u}_{2D}(\hat{x}),$$

para alguma função \bar{u}_{2D} .

Agrupando os termos com a potência ϵ^{-1}

$$\operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\approx}{A} \nabla_{\hat{y}} u_{2D}^1 \right] = - \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial \hat{y}_{\alpha}} \frac{\partial \bar{u}_{2D}}{\partial \hat{x}_{\beta}}. \quad (\text{A.2})$$

Agrupando os termos com a potência ϵ^0

$$- \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\underset{\approx}{A} \nabla_{\hat{x}} \bar{u}_{2D} \right] - \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\underset{\approx}{A} \nabla_{\hat{y}} u_{2D}^1 \right] - \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\approx}{A} \nabla_{\hat{x}} u_{2D}^1 \right] - \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\approx}{A} \nabla_{\hat{y}} u_{2D}^2 \right] = \int_{-1}^1 f d\hat{x}_3. \quad (\text{A.3})$$

Utilizando argumentos de periodicidade, concluímos que

$$\int_Y \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\approx}{A} \nabla_{\hat{x}} u_{2D}^1 + \underset{\approx}{A} \nabla_{\hat{y}} u_{2D}^2 \right] d\hat{y}_1 d\hat{y}_2 = 0.$$

Então integrando a relação (A.3) em Y

$$- \operatorname{div}_{\hat{x}} \int_Y \left[\underset{\approx}{A} \nabla_{\hat{x}} \bar{u}_{2D} + \underset{\approx}{A} \nabla_{\hat{y}} u_{2D}^1 \right] d\hat{y} = \int_Y \int_{-1}^1 f d\hat{x}_3 d\hat{y}. \quad (\text{A.4})$$

Introduzimos os problemas de célula

$$\operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\approx}{A} \nabla_{\hat{y}} \chi_{\beta} \right] = - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial \hat{y}_{\alpha}} \quad \text{em } Y, \quad (\text{A.5})$$

com condições de contorno periódicas para $\beta = 1, 2$.

Consideramos

$$u_{2D}^1(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{\beta=1}^2 \chi_{\beta}(\hat{y}) \frac{\partial \bar{u}_{2D}}{\partial \hat{x}_{\beta}}. \quad (\text{A.6})$$

É fácil ver que (A.6) satisfaz (A.2).

Então o problema homogeneizado é

$$\begin{aligned} -2 \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[B \nabla_{\hat{x}} \bar{u}_{2D} \right] &= \int_{-1}^1 f d\hat{x}_3 && \text{em } \Omega, \\ \bar{u}_{2D} &= 0 && \text{em } \partial\Omega, \end{aligned}$$

onde

$$B_{ij} = \int_Y A_{ij} + \sum_{\beta=1}^2 A_{i\beta} \frac{\partial \chi_{\beta}}{\partial \hat{y}_{\alpha}} d\hat{y}_1 d\hat{y}_2, \quad i, j = 1, 2.$$

A.2 A expansão assintótica em torno de ϵ para o problema tridimensional

Consideremos a equação de Poisson (1.1). Com o objetivo de encontrar o limite assintótico quando ϵ tende a zero, utilizamos a expansão assintótica para a função $u_{3D}^{\delta\epsilon}$

$$u_{3D}^{\delta\epsilon}(\underline{x}) \sim u_{3D}^{\delta 0}(\underline{x}, \epsilon^{-1}\underline{x}, 0) + \epsilon u_{3D}^{\delta 1}(\underline{x}, \epsilon^{-1}\underline{x}, 0) + \epsilon^2 u_{3D}^{\delta 2}(\underline{x}, \epsilon^{-1}\underline{x}, 0) + \dots \quad (\text{A.7})$$

Consideramos $\underline{a}^{\epsilon}(\underline{x}) = \underline{a}(\epsilon^{-1}\underline{x})$, onde $\underline{a} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{SIM}^{3 \times 3}$ é periódica com respeito à célula Y e definimos o operador \mathcal{L}^{ϵ} da seguinte forma

$$\mathcal{L}^{\epsilon} := -\operatorname{div} \left[\underline{a}(\epsilon^{-1}\underline{x}) \nabla(\cdot) \right]. \quad (\text{A.8})$$

Fazendo a mudança de variáveis $\underline{y} = (\epsilon^{-1}\underline{x}, 0)$ e aplicando a regra da cadeia ao operador (A.8), obtemos

$$\nabla_{\underline{y}} v(\underline{x}, \epsilon^{-1}\underline{x}, 0) = \begin{bmatrix} \nabla_{\underline{y}} v(\underline{x}, \epsilon^{-1}\underline{x}, 0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\operatorname{div}_{\underline{y}} v(\underline{x}, \epsilon^{-1}\underline{x}, 0) = \operatorname{div}_{\underline{y}} v(\underline{x}, \epsilon^{-1}\underline{x}, 0).$$

Substituindo a expansão (A.7), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\epsilon u_{3D}^{\delta\epsilon}(\underline{x}) &= -\epsilon^{-2} \operatorname{div}_{\underline{y}} \left[\underline{a} \nabla_{\underline{y}} u_{3D}^{\delta 0} \right] - \epsilon^{-1} \left(\operatorname{div}_{\underline{x}} \left[\underline{a} \nabla_{\underline{y}} u_{3D}^{\delta 0} \right] + \operatorname{div}_{\underline{y}} \left[\underline{a} \nabla_{\underline{x}} u_{3D}^{\delta 0} \right] \right) \\ &\quad - \operatorname{div}_{\underline{x}} \left[\underline{a} \nabla_{\underline{x}} u_{3D}^{\delta 0} \right] - \epsilon^{-1} \operatorname{div}_{\underline{y}} \left[\underline{a} \nabla_{\underline{y}} u_{3D}^{\delta 1} \right] - \operatorname{div}_{\underline{x}} \left[\underline{a} \nabla_{\underline{y}} u_{3D}^{\delta 1} \right] - \operatorname{div}_{\underline{y}} \left[\underline{a} \nabla_{\underline{x}} u_{3D}^{\delta 1} \right] \\ &\quad - \epsilon \operatorname{div}_{\underline{x}} \left[\underline{a} \nabla_{\underline{x}} u_{3D}^{\delta 1} \right] - \operatorname{div}_{\underline{y}} \left[\underline{a} \nabla_{\underline{y}} u_{3D}^{\delta 2} \right] - \dots \Big|_{\underline{y}=(\epsilon^{-1}\underline{x}, x_3)}. \end{aligned}$$

Agrupando os termos com a potência ϵ^{-2} , obtemos

$$\operatorname{div}_{\underline{y}} \left[\underline{a} \nabla_{\underline{y}} u_{3D}^{\delta 0} \right] = 0 \quad \text{em } P^\delta \times Y. \quad (\text{A.9})$$

Observemos que, baseados em (A.9), verificamos que $u_{3D}^{\delta 0}$ independe de \underline{y} , isto é, existe uma função $\bar{u}_{3D}^\delta : P^\delta \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$u_{3D}^{\delta 0}(\underline{x}, \underline{y}) := \bar{u}_{3D}^\delta(\underline{x}).$$

Agrupando os termos multiplicados por ϵ^{-1}

$$-\operatorname{div}_{\underline{x}} \left[\underline{a} \nabla_{\underline{y}} \bar{u}_{3D}^\delta \right] - \operatorname{div}_{\underline{y}} \left[\underline{a} \nabla_{\underline{x}} \bar{u}_{3D}^\delta \right] - \operatorname{div}_{\underline{y}} \left[\underline{a} \nabla_{\underline{y}} u_{3D}^{\delta 1} \right] = 0 \quad \text{em } P^\delta \times Y.$$

Como \bar{u}_{3D}^δ é independente de \underline{y} , então podemos reescrever a equação anterior como

$$\operatorname{div}_{\underline{y}} \left[\underline{a} \nabla_{\underline{y}} u_{3D}^{\delta 1} \right] = - \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial a_{\alpha j}}{\partial y_\alpha} \frac{\partial \bar{u}_{3D}^\delta}{\partial x_j}. \quad (\text{A.10})$$

Agrupando os termos multiplicados por ϵ^0

$$-\operatorname{div}_{\underline{x}} \left[\underline{\underline{a}} \nabla_{\underline{x}} \bar{u}_{3D}^\delta \right] - \operatorname{div}_{\underline{x}} \left[\underline{\underline{a}} \nabla_{\underline{y}} u_{3D}^{\delta 1} \right] - \operatorname{div}_{\underline{y}} \left[\underline{\underline{a}} \nabla_{\underline{x}} u_{3D}^{\delta 1} \right] - \operatorname{div}_{\underline{y}} \left[\underline{\underline{a}} \nabla_{\underline{y}} u_{3D}^{\delta 2} \right] = f^\delta.$$

Integrando a equação anterior em relação à Y

$$-\int_Y \operatorname{div}_{\underline{x}} \left[\underline{\underline{a}} \nabla_{\underline{x}} \bar{u}_{3D}^\delta + \underline{\underline{a}} \nabla_{\underline{y}} u_{3D}^{\delta 1} \right] d\underline{y} - \int_Y \operatorname{div}_{\underline{y}} \left[\underline{\underline{a}} \nabla_{\underline{x}} u_{3D}^{\delta 1} + \underline{\underline{a}} \nabla_{\underline{y}} u_{3D}^{\delta 2} \right] d\underline{y} = \int_Y f^\delta d\underline{y}.$$

Utilizando integração por partes e argumentos de periodicidade em Y , verificamos que

$$\int_Y \operatorname{div}_{\underline{y}} \left[\underline{\underline{a}} \nabla_{\underline{x}} u_{3D}^{\delta 1} + \underline{\underline{a}} \nabla_{\underline{y}} u_{3D}^{\delta 2} \right] d\underline{y} = 0.$$

Então obtemos

$$-\operatorname{div}_{\underline{x}} \int_Y \underline{\underline{a}} \nabla_{\underline{x}} \bar{u}_{3D}^\delta + \underline{\underline{a}} \nabla_{\underline{y}} u_{3D}^{\delta 1} d\underline{y} = f^\delta. \quad (\text{A.11})$$

Consideremos

$$u_{3D}^{\delta 1}(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{j=1}^3 \bar{\chi}_j(\underline{y}) \frac{\partial \bar{u}_{3D}^\delta}{\partial x_j}, \quad (\text{A.12})$$

onde as funções $\bar{\chi}_j$ são soluções dos problemas de célula

$$\operatorname{div}_{\underline{y}} \left[\underline{\underline{a}} \nabla_{\underline{y}} \bar{\chi}_j \right] = - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial a_{\alpha j}}{\partial y_\alpha} \quad \text{em } Y, \quad (\text{A.13})$$

com condições de contorno periódicas para $j = 1, 2, 3$.

É fácil ver que (A.12) satisfaz (A.10). Substituindo (A.12) em (A.11), obtemos o problema homogeneizado

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_{\underline{x}} \left[\bar{\underline{\underline{a}}} \nabla_{\underline{x}} \bar{u}_{3D}^\delta \right] &= f^\delta && \text{em } P^\delta, \\ \bar{u}_{3D}^\delta &= 0 && \text{em } \partial P_L^\delta, \\ \left(\bar{\underline{\underline{a}}} \nabla_{\underline{x}} \bar{u}_{3D}^\delta \right) \cdot \underline{n} &= 0 && \text{em } \partial P_\pm^\delta, \end{aligned}$$

onde

$$\bar{A}_{ij} = \int_Y a_{ij} + \sum_{\beta=1}^2 a_{i\beta} \frac{\partial \bar{\chi}_j}{\partial y_\beta} dy_1 dy_2, \quad \text{para } i, j = 1, 2, 3.$$

A.3 O método assintótico para δ para o problema tridimensional homogeneizado

A seguir detalhamos o processo de redução de dimensão via métodos assintóticos para o problema tridimensional homogeneizado (2.16). Para tanto, reescrevemos o problema (2.16) no domínio $P = \Omega \times (-1, 1)$, utilizando a mudança de variáveis (2.3).

$$\begin{aligned}
-\operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\bar{A} \nabla_{\hat{x}} \bar{u}_{3D}^\delta \right] - \delta^{-1} \operatorname{div} \left(\bar{A} \frac{\partial \bar{u}_{3D}^\delta}{\partial \hat{x}_3} \right) - \delta^{-1} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \left(\bar{A} \cdot \nabla_{\hat{x}} \bar{u}_{3D}^\delta \right) \\
- \delta^{-2} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \left(\bar{A}_{33} \frac{\partial \bar{u}_{3D}^\delta}{\partial \hat{x}_3} \right) = f. \quad (\text{A.14})
\end{aligned}$$

Tomemos a expansão assintótica da função \bar{u}_{3D}^δ em torno de δ

$$\bar{u}_{3D}^\delta \sim \bar{u}^0 + \delta \bar{u}^1 + \delta^2 \bar{u}^2 + \dots \quad (\text{A.15})$$

Substituindo (A.15) em (A.14), obtemos

$$\begin{aligned}
-\operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\bar{A} \nabla_{\hat{x}} \bar{u}^0 \right] - \delta \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\bar{A} \nabla_{\hat{x}} \bar{u}^1 \right] - \delta^2 \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\bar{A} \nabla_{\hat{x}} \bar{u}^2 \right] \\
- \delta^{-1} \left[\operatorname{div} \left(\bar{A} \frac{\partial \bar{u}^0}{\partial \hat{x}_3} \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \left(\bar{A} \cdot \nabla_{\hat{x}} \bar{u}^0 \right) \right] - \operatorname{div} \left(\bar{A} \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial \hat{x}_3} \right) - \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \left(\bar{A} \cdot \nabla_{\hat{x}} \bar{u}^1 \right) - \\
\delta^{-2} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \left(\bar{A}_{33} \frac{\partial \bar{u}^0}{\partial \hat{x}_3} \right) - \delta^{-1} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \left(\bar{A}_{33} \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial \hat{x}_3} \right) - \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \left(\bar{A}_{33} \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial \hat{x}_3} \right) - \dots = f \quad \text{em } P,
\end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

com condições de contorno

$$\begin{aligned}
\bar{A}^T \nabla_{\hat{x}} \bar{u}^0 + \delta \bar{A}^T \nabla_{\hat{x}} \bar{u}^1 + \delta^2 \bar{A}^T \nabla_{\hat{x}} \bar{u}^2 + \delta^{-1} \bar{A}_{33} \frac{\partial \bar{u}^0}{\partial \hat{x}_3} + \bar{A}_{33} \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial \hat{x}_3} + \delta \bar{A}_{33} \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial \hat{x}_3} = 0 \\
\text{em } \Omega \times \{-1, 1\}. \quad (\text{A.17})
\end{aligned}$$

Agrupando os termos com a potência δ^{-2}

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \left(\bar{A}_{33} \frac{\partial \bar{u}^0}{\partial \hat{x}_3} \right) = 0 \quad \text{em } P, \quad (\text{A.18})$$

e contorno com a potência δ^{-1}

$$\bar{A}_{33} \frac{\partial \bar{u}^0}{\partial \hat{x}_3} = 0 \quad \text{em } \Omega \times \{-1, 1\}. \quad (\text{A.19})$$

Observemos que \bar{A}_{33} , por hipótese, é não nula e independente de \hat{x}_3 . Logo (A.18) pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 \bar{u}^0}{\partial \hat{x}_3^2} = 0 \quad \text{em } P.$$

Portanto \bar{u}^0 é linear com relação à variável \hat{x}_3 , ou seja, é linear nas fibras. Mas, por (A.19), temos que \bar{u}^0 é independente de \hat{x}_3 .

Agrupando os termos com a potência δ^{-1} , temos

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \left(\bar{A}_{33} \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial \hat{x}_3} \right) = 0 \quad \text{em } P, \quad (\text{A.20})$$

e contorno com a potência δ^0

$$\bar{A}^T \nabla_{\hat{x}} \bar{u}^0 + \bar{A}_{33} \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial \hat{x}_3} = 0 \quad \text{em } \Omega \times \{-1, 1\}. \quad (\text{A.21})$$

A exemplo de (A.18), podemos concluir de (A.20) que \bar{u}^1 é linear em relação à \hat{x}_3 .

Ainda temos que

$$\frac{\partial \bar{u}^1}{\partial \hat{x}_3} = -\frac{1}{\bar{A}_{33}} \left(\bar{A}^T \nabla_{\hat{x}} \bar{u}^0 \right). \quad (\text{A.22})$$

Agrupando os termos com a potência δ^0

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\bar{A} \nabla_{\hat{x}} \bar{u}^0 \right] + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_1} \left(\bar{A}_{13} \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial \hat{x}_3} \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} \left(\bar{A}_{23} \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial \hat{x}_3} \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \left(\bar{A}_{31} \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial \hat{x}_1} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \left(\bar{A}_{32} \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial \hat{x}_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \left(\bar{A}_{33} \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial \hat{x}_3} \right) = -f. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Integrando (A.23) em relação à \hat{x}_3 e utilizando a relação (A.22), obtemos

$$-2 \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\bar{A} \nabla_{\hat{x}} \bar{u}^0 \right] + 2 \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\bar{A} \cdot \frac{1}{\bar{A}_{33}} \cdot \bar{A}^T \nabla_{\hat{x}} \bar{u}^0 \right] = - \int_{-1}^1 f d\hat{x}_3 \quad \text{em } \Omega,$$

donde podemos escrever

$$\begin{aligned} -2 \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\bar{B} \nabla_{\hat{x}} \bar{u}^0 \right] &= \int_{-1}^1 f d\hat{x}_3 \quad \text{em } \Omega, \\ \bar{u}^0 &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{aligned}$$

onde

$$\bar{B}_{ij} = \bar{A}_{ij} - \frac{\bar{A}_{i3} \bar{A}_{3j}}{\bar{A}_{33}}, \quad \text{para } i, j = 1, 2.$$

A.4 Homogeneização para o problema bidimensional via Modelagem Hierárquica

Para tanto, consideremos a expansão assintótica em torno de ϵ para a função w_0^ϵ

$$w_0^\epsilon \sim w_0^0 + \epsilon w_0^1 + \epsilon^2 w_0^2 + \dots \quad (\text{A.24})$$

Considerando $\hat{y} = \epsilon^{-1} \hat{x}$, aplicando a regra da cadeia ao operador divergente e definindo $\underline{A}^\epsilon = \underline{A}(\hat{y})$, obtemos

$$\begin{aligned} -2\epsilon^{-2} \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underline{A} \nabla_{\hat{y}} w_0^\epsilon \right] - 2\epsilon^{-1} \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underline{A} \nabla_{\hat{x}} w_0^\epsilon \right] - 2\epsilon^{-1} \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\underline{A} \nabla_{\hat{y}} w_0^\epsilon \right] \\ - 2 \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\underline{A} \nabla_{\hat{x}} w_0^\epsilon \right] = \int_{-1}^1 f d\hat{x}_3. \end{aligned}$$

Substituindo a expansão assintótica (A.24) na expressão anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
& -2\epsilon^{-2} \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\approx}{A} \nabla_{\hat{y}} w_0^0 \right] - 2\epsilon^{-1} \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\approx}{A} \nabla_{\hat{x}} w_0^0 \right] - 2\epsilon^{-1} \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\underset{\approx}{A} \nabla_{\hat{y}} w_0^0 \right] - 2 \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\underset{\approx}{A} \nabla_{\hat{x}} w_0^0 \right] \\
& - 2\epsilon^{-1} \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\approx}{A} \nabla_{\hat{y}} w_0^1 \right] - 2 \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\approx}{A} \nabla_{\hat{x}} w_0^1 \right] - 2 \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\underset{\approx}{A} \nabla_{\hat{y}} w_0^1 \right] - 2\epsilon \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\underset{\approx}{A} \nabla_{\hat{x}} w_0^1 \right] \\
& \quad - 2 \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\approx}{A} \nabla_{\hat{y}} w_0^2 \right] - \dots = \int_{-1}^1 f d\hat{x}_3.
\end{aligned}$$

Agrupando os termos com a potência ϵ^{-2} , temos

$$\operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\approx}{A} \nabla_{\hat{y}} w_0^0 \right] = 0 \quad \text{em } \Omega \times Y.$$

Por argumentos de periodicidade, podemos concluir que

$$w_0^0(\hat{x}, \hat{y}) := \bar{w}_0(\hat{x}),$$

ou seja, w_0^0 é independente de \hat{y} .

Agrupando os termos com a potência ϵ^{-1} , temos

$$\operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\approx}{A} \nabla_{\hat{y}} w_0^1 \right] = - \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial \hat{y}_\alpha} \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \hat{x}_\beta}. \quad (\text{A.25})$$

Agrupando os termos com a potência ϵ^0

$$2 \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\underset{\approx}{A} \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_0 \right] + 2 \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\approx}{A} \nabla_{\hat{x}} w_0^1 \right] + 2 \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\underset{\approx}{A} \nabla_{\hat{y}} w_0^1 \right] + 2 \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\approx}{A} \nabla_{\hat{y}} w_0^2 \right] = - \int_{-1}^1 f d\hat{x}_3.$$

Integrando a expressão acima em relação a Y e, por periodicidade, é fácil ver que

$$\int_Y 2 \operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\approx}{A} \nabla_{\hat{x}} w_0^1 + \underset{\approx}{A} \nabla_{\hat{y}} w_0^2 \right] d\hat{y} = 0.$$

Logo, obtemos

$$-2 \operatorname{div}_{\hat{x}} \int_Y \underset{\approx}{A} \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_0 + \underset{\approx}{A} \nabla_{\hat{y}} w_0^1 d\hat{y} = \int_Y \int_{-1}^1 f d\hat{x}_3 d\hat{y}.$$

Consideremos os problemas de célula

$$\operatorname{div}_{\hat{y}} \left[\underset{\sim}{A} \nabla_{\hat{y}} \chi_\beta \right] = - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial \hat{y}_\alpha} \quad (\text{A.26})$$

e as funções

$$w_0^1(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{\beta=1}^2 \chi_\beta \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial x_\beta}. \quad (\text{A.27})$$

É fácil verificar que (A.27) satisfaz (A.25).

Logo o problema homogeneizado é

$$\begin{aligned} -2 \operatorname{div}_{\hat{x}} \left[\underset{\sim}{B} \nabla_{\hat{x}} \bar{w}_0 \right] &= \int_{-1}^1 f d\hat{x}_3 && \text{em } \Omega, \\ \bar{w}_0 &= 0 && \text{em } \partial\Omega, \end{aligned}$$

onde

$$B_{ij} = \int_Y A_{ij} + \sum_{\beta=1}^2 A_{i\beta} \frac{\partial \chi_j}{\partial \hat{y}_\beta} d\hat{y}.$$

Apêndice B

Justificativas matemáticas para os problemas limite da equação de Poisson

O objetivo deste capítulo é fazer as demonstrações, de forma rigorosa, das convergências da sequência de funções $\{u_{3D}^{\delta\epsilon}\}$, soluções para a equação de Poisson (1.1) tanto para a função \bar{u}_{2D} quanto para \bar{u}^0 tanto para a modelagem via métodos assintóticos quanto para a modelagem via modelos hierárquicos. Mostramos também a equivalência entre os dois tipos de modelagem utilizados, isto é, entre os métodos assintóticos e a modelagem hierárquica.

Pretendemos então, a partir da definição para o operador $\bar{\mathcal{H}}$, é demonstrar a equivalência

$$\begin{aligned}\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_{3D}^{\delta\epsilon} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{\mathcal{H}}(u_{3D}^{\delta\epsilon}) \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} u_{3D}^{\delta\epsilon} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \bar{\mathcal{H}}(u_{3D}^{\delta\epsilon}).\end{aligned}\tag{B.1}$$

Isto significa que, se tomarmos os limites quando ϵ tende a zero e a seguir quando δ tende a zero utilizando o método assintótico como técnica de redução de dimensão é equivalente a tomarmos os dois limites utilizando modelagem hierárquica como técnica de redução de dimensão. O mesmo ocorre quando tomamos o limite quando δ tende a zero e a seguir quando ϵ tende a zero.

B.1 Justificativa para o limite quando ϵ tende a zero e a seguir δ tende a zero no problema original

Esta seção tem por objetivo demonstrar, de maneira rigorosa, a convergência da sequência de soluções $u_{3D}^{\delta\epsilon}$ em ϵ primeiramente, realizada de maneira formal no apêndice A, com o emprego de técnicas de homogeneização para a função \bar{u}_{3D}^δ , solução do problema (2.16). A partir do problema homogeneizado, mostramos a convergência da sequência de soluções $\{\bar{u}_{3D}^\delta\}$ para a função \bar{u}^δ , solução do problema (2.2), através do emprego dos métodos assintóticos para δ , bem como a equivalência entre os problemas limite quando ϵ tende a zero e a seguir δ tende a zero via métodos assintóticos e via modelagem hierárquica.

B.1.1 O limite $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_{3D}^{\delta\epsilon}$

A seguir, apresentamos o método de convergência em duas escalas, utilizado para demonstrar a convergência da sequência de funções $\{u_{3D}^{\delta\epsilon}\}_{\epsilon > 0}$, que são soluções para a equação de Poisson (1.1), para a função \bar{u}_{3D}^δ , solução do problema homogeneizado (2.16). A prova abaixo segue Cioranescu [Cioranescu e Donato (1999)]. Primeiramente, definimos \bar{Y} como o fecho de Y .

Para a Definição B.1.1 utilizamos os seguintes espaços

- $C_{\text{per}}^\infty(Y)$ é o subespaço de $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ das funções Y -periódicas.
- Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} P^\delta &\rightarrow C_{\text{per}}^\infty(Y) \\ \underline{x} &\mapsto u(\underline{x}, \cdot). \end{aligned}$$

O espaço $\mathcal{D}(P^\delta; C_{\text{per}}^\infty(Y))$ é o espaço das funções mensuráveis em $P^\delta \times \mathbb{R}^3$ tais que

- * para cada $\underline{x} \in P^\delta$, tem-se $u(\underline{x}, \cdot) \in C_{\text{per}}^\infty(Y)$;
- * para cada $\underline{y} \in Y$, tem-se $u(\cdot, \underline{y})$ infinitamente diferenciável e com suporte compacto.

Definição B.1.1. Seja $\{v^\epsilon\}$ uma sequência de funções em $L^2(P^\delta)$. Dizemos que $\{v^\epsilon\}$ **converge em duas escalas** para $\bar{v}_0 \in L^2(P^\delta \times Y)$ se para qualquer função $\psi \in \mathcal{D}(P^\delta; C_{\text{per}}^\infty(Y))$, temos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{P^\delta} v^\epsilon(\underline{x}) \psi(\underline{x}, \epsilon^{-1} \underline{x}) d\underline{x} \right) = \int_{P^\delta} \int_Y \bar{v}_0(\underline{x}, \underline{y}) \psi(\underline{x}, \underline{y}) dy d\underline{x}. \quad (\text{B.2})$$

Definição B.1.2. Definimos a forma bilinear $a(\underline{\lambda}, \underline{\lambda})$ por

$$a(\underline{\lambda}, \underline{\lambda}) = \int_{P^\delta} \underline{a}^\epsilon \underline{\lambda} \cdot \underline{\lambda} d\underline{x}, \quad \text{para todo } \underline{\lambda} \in \mathbb{R}^3.$$

Definição B.1.3. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $0 < \alpha < \beta$. Denotamos por $M(\alpha, \beta, P^\delta)$ o conjunto das funções $\underline{a}^\epsilon \in [L^\infty(P^\delta)]^{3 \times 3}$ tais que

$$(1) \quad a(\underline{\lambda}, \underline{\lambda}) \geq \alpha |\underline{\lambda}|^2,$$

$$(2) \quad |\underline{a}^\epsilon \underline{\lambda}| \leq \beta |\underline{\lambda}|,$$

para qualquer $\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^3$.

Observemos que o item 1 da Definição B.1.3 é equivalente a

Existe $\alpha > 0$ tal que $\sum_{i,j=1}^3 \int_{P^\delta} a_{ij}^\epsilon(\underline{x}) \lambda_i \lambda_j d\underline{x} \geq \alpha \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2$, para todo $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Apresentamos a seguir alguns resultados que serão utilizados na demonstração do resultado principal de convergência da sequência $\{u_{3D}^{\delta\epsilon}\}_{\epsilon>0}$ para a função \bar{u}_{3D}^δ .

Denotamos por $H_{\text{per}}^1(Y)$ como o fecho de $C_{\text{per}}^\infty(Y)$, munido com a norma H^1 usual. Definimos o espaço quociente $W_{\text{per}}(Y) = H_{\text{per}}^1(Y)/\mathbb{R}$ como o espaço das classes de equivalência com respeito à relação

$$u \simeq v \Leftrightarrow u - v \text{ é uma constante q. s. (quase sempre).}$$

Denotamos por \dot{u} a classe de equivalência representada por u . Portanto a seguinte quantidade

$$\|\dot{u}\|_{W_{\text{per}}(Y)} = \|\underline{\nabla}u\|_{[L^2(Y)]^3}, \quad \text{para todo } u \in \dot{u} \in W_{\text{per}}(Y),$$

define uma norma em $W_{\text{per}}(Y)$.

Lema B.1.1. *Seja $u_{3D}^{\delta\epsilon}$ a solução para o problema (1.1). Então $u_{3D}^{\delta\epsilon}$ é limitada em $V(P^\delta)$.*

Demonstração. Primeiramente, escrevemos o problema (1.1) em sua formulação variacional, ou seja,

$$\begin{aligned} &\text{Encontrar } u_{3D}^{\delta\epsilon} \in V(P^\delta) \text{ tal que} \\ &a(u_{3D}^{\delta\epsilon}, v) = (f^\delta, v)_{L^2(P^\delta)} \quad \text{para todo } v \in V(P^\delta), \end{aligned} \tag{B.3}$$

onde

$$a(u_{3D}^{\delta\epsilon}, v) = \int_{P^\delta} a^\epsilon \underline{\nabla} u_{3D}^{\delta\epsilon} \underline{\nabla} v dx \quad \text{e} \quad (f^\delta, v) = \int_{P^\delta} f^\delta v dx.$$

Através do lema de Lax-Milgram, verificamos a existência e a unicidade de solução para o problema (B.3).

Como (B.3) é válida para toda função $v \in V(P^\delta)$, podemos escolher em particular $v = u_{3D}^{\delta\epsilon}$. Logo

$$\begin{aligned} \alpha \|u_{3D}^{\delta\epsilon}\|_{H^1(P^\delta)}^2 &\leq a(u_{3D}^{\delta\epsilon}, u_{3D}^{\delta\epsilon}) = (f^\delta, u_{3D}^{\delta\epsilon})_{L^2(P^\delta)} \leq C \|f^\delta\|_{L^2(P^\delta)} \|u_{3D}^{\delta\epsilon}\|_{H^1(P^\delta)}, \\ \|u_{3D}^{\delta\epsilon}\|_{H^1(P^\delta)} &\leq \frac{C}{\alpha} \|f^\delta\|_{L^2(P^\delta)}, \end{aligned} \tag{B.4}$$

onde C é uma constante que depende apenas da geometria do domínio, ou seja, C depende de δ , a espessura do domínio mas não de ϵ , as heterogeneidades longitudinais. □

As demonstrações do Teorema B.1.1 e do Lema B.1.2 se encontram em Cioranescu [Cioranescu e Donato (1999)].

Definição B.1.4. *Seja X um espaço de Banach, $P^\delta \subset \mathbb{R}^3$ e p tal que $1 \leq p \leq \infty$.*

Denotamos $L^p(P^\delta; X)$ como o conjunto das funções mensuráveis u em $P^\delta \times \mathbb{R}^3$

- *para cada $\underline{x} \in P^\delta$, tem-se $u(\underline{x}, \cdot) \in X$;*
- *para cada $u(\underline{x}, \cdot) \in X$, tem-se que $\|u(\underline{x}, \cdot)\| \in L^p(P^\delta)$, onde*

$$\|u\|_{L^p(P^\delta; X)} = \left(\int_{P^\delta} \|u(\underline{x}, \cdot)\|_X^p d\underline{x} \right)^{1/p}.$$

Teorema B.1.1. *Seja $\{v^\epsilon\}_{\epsilon>0}$ uma sequência de funções em $H^1(P^\delta)$, tal que*

$$v^\epsilon \rightharpoonup u_{3D}^{\delta 0} \quad \text{em } H^1(P^\delta).$$

Então:

- (1) $\{v^\epsilon\}_{\epsilon>0}$ *converge em duas escalas para $u_{3D}^{\delta 0}$;*
- (2) *Existe uma subsequência $u_{3D}^{\delta \epsilon}$ de $\{v^\epsilon\}_{\epsilon>0}$ e uma função*

$$u_{3D}^{\delta 1}(\underline{x}, \underline{y}) \in L^2(P^\delta; W_{per}(Y))$$

tal que $\nabla_{\underline{x}} u_{3D}^{\delta \epsilon}$ converge em duas escalas para $\nabla_{\underline{x}} u_{3D}^{\delta 0} + \nabla_{\underline{y}} u_{3D}^{\delta 1}$.

Observação B.1.1. *O espaço $L^2(P^\delta; W_{per}(Y))$ foi definido em B.1.4.*

Lema B.1.2. • *Seja $\varphi \in L^p(P^\delta; C_{per}(Y))$ com $1 \leq p < \infty$, definido em B.1.4. Então $\varphi(\cdot, \cdot/\epsilon) \in L^p(P^\delta)$ com*

$$\|\varphi(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon})\|_{L^p(P^\delta)} \leq \|\varphi(\cdot, \cdot)\|_{L^p(P^\delta; C_{per}(Y))}$$

e

$$\varphi(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon}) \rightharpoonup \int_Y \varphi(\cdot, \underline{y}) d\underline{y} \quad \text{fraco em } L^p(P^\delta).$$

Em particular, se $\varphi \in L^2(P^\delta; C_{per}(Y))$, então

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{P^\delta} \left[\varphi \left(\underline{x}, \frac{\underline{x}}{\epsilon} \right) \right]^2 d\underline{x} \right) = \int_{P^\delta} \int_Y [\varphi(\underline{x}, \underline{y})]^2 d\underline{y} d\underline{x}.$$

- Suponha que $\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = \varphi_1(\underline{x})\varphi_2(\underline{y})$, onde $\varphi_1 \in L^s(P^\delta)$, $\varphi_2 \in L^r_{per}(Y)$ com $1 \leq r, s < \infty$ tal que $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{p}$. Então $\varphi(\cdot, \cdot/\epsilon) \in L^p(P^\delta)$ e

$$\varphi(\cdot, \cdot/\epsilon) \rightharpoonup \varphi_1(\cdot) \int_Y \varphi_2(\underline{y}) d\underline{y} \text{ fraco em } L^p(P^\delta).$$

O resultado que se segue é o principal, no qual demonstramos a convergência da sequência $\{u_{3D}^{\delta\epsilon}\}_{\epsilon>0}$ para a função \bar{u}_{3D}^δ , que é a solução do problema homogeneizado (2.16).

Teorema B.1.2. *Sejam $f^\delta \in L^2(P^\delta)$ e $u_{3D}^{\delta\epsilon}$ a solução para o problema (1.1). Assumimos que $\underline{a}^\epsilon \in M(\alpha, \beta, P^\delta)$ e que \underline{a}^ϵ é periódica. Então*

$$(1) \ u_{3D}^{\delta\epsilon} \rightharpoonup \bar{u}_{3D}^\delta \text{ fraco em } V(P^\delta),$$

$$(2) \ \underline{a}^\epsilon \nabla u_{3D}^{\delta\epsilon} \rightharpoonup \bar{\underline{A}} \nabla \bar{u}_{3D}^\delta \text{ fraco em } [L^2(P^\delta)]^3,$$

onde \bar{u}_{3D}^δ é a única solução em $V(P^\delta)$ de (2.16) e $\bar{\underline{A}}$ também está definida em (2.16).

Demonstração. Como a sequência $\{u_{3D}^{\delta\epsilon}\}_{\epsilon>0}$ é limitada em $V(P^\delta)$ pelo Lema B.1.1 e este espaço é reflexivo, segue que existe uma subsequência denotada ainda por $\{u_{3D}^{\delta\epsilon}\}_{\epsilon>0}$ e um elemento $u_{3D}^{\delta 0} \in V(P^\delta)$ tal que

$$u_{3D}^{\delta\epsilon} \rightharpoonup u_{3D}^{\delta 0} \text{ fraco em } V(P^\delta). \tag{B.5}$$

Introduzimos

$$\underline{\sigma}^{\delta\epsilon} = \underline{a}^\epsilon \nabla u_{3D}^{\delta\epsilon},$$

que satisfaz

$$\int_{P^\delta} \underline{\sigma}^{\delta\epsilon} \cdot \underline{\nabla} v d\underline{x} = (f^\delta, v)_{L^2(P^\delta)}, \quad \text{para todo } v \in V(P^\delta). \quad (\text{B.6})$$

Novamente escolhendo $v = u_{3D}^{\delta\epsilon}$, temos

$$\|\underline{\sigma}^{\delta\epsilon}\|_{[L^2(P^\delta)]^3} \leq \frac{C}{\alpha} \|f^\delta\|_{L^2(P^\delta)}, \quad (\text{B.7})$$

onde C novamente denota uma constante que depende apenas da geometria do domínio P^δ .

Então, como a sequência $\{\underline{\sigma}^{\delta\epsilon}\}_{\epsilon>0}$ é limitada em $[L^2(P^\delta)]^3$, segue que existe uma subsequência ainda denotada por $\{\underline{\sigma}^{\delta\epsilon}\}_{\epsilon>0}$ e um elemento $\underline{\sigma}^{\delta 0} \in [L^2(P^\delta)]^3$ tal que

$$\underline{\sigma}^{\delta\epsilon} \rightharpoonup \underline{\sigma}^{\delta 0} \quad \text{fraco em } [L^2(P^\delta)]^3. \quad (\text{B.8})$$

Logo podemos passar o limite em (B.6) escrito para a subsequência $\{\underline{\sigma}^{\delta\epsilon}\}_{\epsilon>0}$, obtendo

$$\int_{P^\delta} \underline{\sigma}^{\delta 0} \cdot \underline{\nabla} v d\underline{x} = (f^\delta, v)_{L^2(P^\delta)}, \quad \text{para todo } v \in V(P^\delta). \quad (\text{B.9})$$

Concluimos então que $u_{3D}^{\delta 0}$ satisfaz um problema de valor de contorno se pudermos escrever $\underline{\sigma}^{\delta 0}$ em termos de $u_{3D}^{\delta 0}$.

Como $\{u_{3D}^{\delta\epsilon}\}_{\epsilon>0}$ é uma sequência de funções em $H^1(P^\delta)$ e a convergência (B.5) vale, as hipóteses do Teorema B.1.1 são satisfeitas. Portanto, a partir deste resultado, concluimos que:

- (1) $\{u_{3D}^{\delta\epsilon}\}_{\epsilon>0}$ converge em duas escalas para $u_{3D}^{\delta 0}$;
- (2) existe $u_{3D}^{\delta 1} \in L^2(P^\delta; W_{\text{per}}(Y))$ e uma subsequência $\{u_{3D}^{\delta\epsilon}\}_{\epsilon>0}$ tal que

$$\underline{\nabla} u_{3D}^{\delta\epsilon} \text{ converge em duas escalas para } \underline{\nabla} u_{3D}^{\delta 0} + \underline{\nabla}_y u_{3D}^{\delta 1}.$$

Nosso objetivo é mostrar que o limite $u_{3D}^{\delta 0}$ satisfaz o problema (2.16), concluindo que $u_{3D}^{\delta 0} = \bar{u}_{3D}$ e que **toda** a sequência converge para a solução do problema

homogeneizado (2.16).

Consideremos a função

$$v_0(\cdot) + \epsilon v_1(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon}), \quad (\text{B.10})$$

onde $v_0 \in C_0^\infty(P^\delta)$ e $v_1 \in \mathcal{D}(P^\delta; C_{\text{per}}^\infty(Y))$.

A partir das definições de v_0 e v_1 , podemos concluir que a função (B.10) pertence a $V(P^\delta)$. Então esta função pode ser usada como uma função teste em (B.3), donde obtemos

$$\int_{P^\delta} \underline{\nabla} u_{3D}^{\delta\epsilon} \underline{a}^\epsilon \left[\underline{\nabla}_{\underline{x}} v_0 + \underline{\nabla}_{\underline{y}} v_1 \right] d\underline{x} + \epsilon \int_{P^\delta} \underline{a}^\epsilon \underline{\nabla} u_{3D}^{\delta\epsilon} \underline{\nabla}_{\underline{x}} v_1 d\underline{x} = (f^\delta, v_0 + \epsilon v_1)_{L^2(P^\delta)}, \quad (\text{B.11})$$

onde desejamos tomar o limite quando ϵ tende a zero.

Consideramos, então, o primeiro termo de (B.11).

Definimos o espaço $L_{\text{per}}^2(Y; C(\overline{P}^\delta))$ como o espaço das funções mensuráveis

$$u : \underline{y} \in Y \rightarrow u(\underline{y}) \in C(\overline{P}^\delta) \text{ tal que } \|u(\underline{x})\|_{C(\overline{P}^\delta)} \in L_{\text{per}}^2(Y).$$

Como $\underline{a} \in C^\infty(Y)$, $\underline{\nabla}_{\underline{x}} v_0 + \underline{\nabla}_{\underline{y}} v_1$ pertence a $L_{\text{per}}^2(Y; C(\overline{P}^\delta))$ e $C^\infty(Y)$ é denso em $L^\infty(Y)$, temos que $\underline{a}^\epsilon \left[\underline{\nabla}_{\underline{x}} v_0 + \underline{\nabla}_{\underline{y}} v_1 \right]$ pode ser usada como uma função teste na convergência em duas escalas de $\underline{\nabla} u_{3D}^{\delta\epsilon}$. Logo, o primeiro termo de (B.11) satisfaz as hipóteses da Definição B.1.1, donde obtemos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{P^\delta} \underline{\nabla} u_{3D}^{\delta\epsilon} \underline{a}^\epsilon \left[\underline{\nabla}_{\underline{x}} v_0 + \underline{\nabla}_{\underline{y}} v_1 \right] d\underline{x} \right) = \int_{P^\delta} \int_Y \left[\underline{\nabla}_{\underline{x}} u_{3D}^{\delta 0} + \underline{\nabla}_{\underline{y}} u_{3D}^{\delta 1} \right] \underline{a}(\underline{y}) \left[\underline{\nabla}_{\underline{x}} v_0 + \underline{\nabla}_{\underline{y}} v_1 \right] d\underline{x} d\underline{y}.$$

A fim de obter o limite quando ϵ tende a zero para o segundo termo de (B.11), consideramos

- o Lema B.1.2, escrito para $\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{\nabla}_{\underline{x}} v_1(\underline{x}, \underline{y})$;
- a desigualdade de Cauchy-Schwartz;
- O fato de $\underline{a}^\epsilon \underline{\nabla} u_{3D}^{\delta\epsilon}$ ser limitado em $[L^2(P^\delta)]^3$.

Desta forma, obtemos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\epsilon \left| \int_{P^\delta} a^\epsilon \nabla_{\underline{x}} u_{3D}^{\delta\epsilon} \nabla_{\underline{x}} v_1(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{x} \right| k \right) \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\epsilon \|\sigma^{\delta\epsilon}\|_{L^2(P^\delta)} \|\nabla_{\underline{x}} v_1\|_{L^2(P^\delta)} \right) \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon C) = 0.$$

Logo

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\epsilon \int_{P^\delta} a^\epsilon \nabla_{\underline{x}} u_{3D}^{\delta\epsilon} \nabla_{\underline{x}} v_1\left(\underline{x}, \frac{\underline{x}}{\epsilon}\right) d\underline{x} \right) = 0.$$

Por fim, tomamos o limite no último termo de (B.11).

Observemos que, pela definição de v_0 e v_1 temos

$$v_0 + \epsilon v_1 \left(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon} \right) \rightharpoonup v_0 \quad \text{fraco em } V(P^\delta).$$

Logo, passando o limite em (B.11), temos

$$\int_{P^\delta} \int_Y \left[\nabla_{\underline{x}} u_{3D}^{\delta 0} + \nabla_{\underline{y}} u_{3D}^{\delta 1} \right] a^\epsilon \left[\nabla_{\underline{x}} v_0 + \nabla_{\underline{y}} v_1 \right] d\underline{y} d\underline{x} = (f^\delta, v_0)_{L^2(P^\delta), V(P^\delta)}. \quad (\text{B.12})$$

Mostraremos que (B.12) é uma formulação variacional no espaço

$$\mathcal{H} = V(P^\delta) \times L^2(P^\delta; W_{\text{per}}(Y)).$$

As hipóteses do lema de Lax-Milgram são satisfeitas para a formulação (B.12) no espaço \mathcal{H} . De fato, munimos o espaço \mathcal{H} com a norma

$$\|V\|_{\mathcal{H}}^2 = \|v_0\|_{V(P^\delta)}^2 + \|v_1\|_{L^2(P^\delta; W_{\text{per}}(Y))}^2,$$

e a forma bilinear definida por

$$a(U, V) := \int_{P^\delta} \int_Y a(\nabla_{\underline{x}} u_{3D}^{\delta 0} + \nabla_{\underline{y}} u_{3D}^{\delta 1})(\nabla_{\underline{x}} v_0 + \nabla_{\underline{y}} v_1) d\underline{y} d\underline{x}$$

para qualquer $U = (u_{3D}^{\delta 0}, u_{3D}^{\delta 1}) \in \mathcal{H}$ e $V = (v_0, v_1) \in \mathcal{H}$.

- Continuidade

$$a(U, V) = \int_{P^\delta} \int_Y \underline{a}(\underline{\nabla} u_{3D}^{\delta 0} + \underline{\nabla}_y u_{3D}^{\delta 1})(\underline{\nabla}_x v_0 + \underline{\nabla}_y v_1) d\underline{y} d\underline{x} \leq \\ \beta \int_{P^\delta} \int_Y (\underline{\nabla} u_{3D}^{\delta 0} + \underline{\nabla}_y u_{3D}^{\delta 1})(\underline{\nabla}_x v_0 + \underline{\nabla}_y v_1) d\underline{y} d\underline{x},$$

utilizando a hipótese de que $\underline{a} \in M(\alpha, \beta, P^\delta)$. Aplicando a propriedade distributiva e utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, obtemos

$$a(U, V) \leq \beta (\|\underline{\nabla} u_{3D}^{\delta 0}\|_{[L^2(P^\delta)]^3} + \|\underline{\nabla}_y u_{3D}^{\delta 1}\|_{[L^2(P^\delta; W_{\text{per}}(Y))]^3}) \cdot \\ (\|\underline{\nabla}_x v_0\|_{[L^2(P^\delta)]^3} + \|\underline{\nabla}_y v_1\|_{[L^2(P^\delta; W_{\text{per}}(Y))]^3}).$$

donde concluimos que

$$a(U, V) \leq \beta \|U\|_{\mathcal{H}} \|V\|_{\mathcal{H}}.$$

- Coercividade

$$a(V, V) = \int_{P^\delta} \int_Y \underline{a}(\underline{\nabla}_x v_0 + \underline{\nabla}_y v_1)(\underline{\nabla}_x v_0 + \underline{\nabla}_y v_1) d\underline{y} d\underline{x} \\ \geq \alpha \int_{P^\delta} \int_Y (\underline{\nabla}_x v_0 + \underline{\nabla}_y v_1)(\underline{\nabla}_x v_0 + \underline{\nabla}_y v_1) d\underline{y} d\underline{x} = \alpha \|\underline{\nabla}_x v_0 + \underline{\nabla}_y v_1\|_{L^2(P^\delta \times Y)}^2.$$

Por outro lado,

$$\|\underline{\nabla}_x v_0 + \underline{\nabla}_y v_1\|_{[L^2(P^\delta \times Y)]^3}^2 = \|\underline{\nabla}_x v_0\|_{[L^2(P^\delta)]^3}^2 \\ + 2 \int_{P^\delta} \int_Y \underline{\nabla}_x v_0 \underline{\nabla}_y v_1 d\underline{y} d\underline{x} + \|\underline{\nabla}_y v_1\|_{[L^2(P^\delta; W_{\text{per}}(Y))]^3}^2.$$

Como

$$\int_{P^\delta} \int_Y \underline{\nabla}_x v_0 \underline{\nabla}_y v_1 d\underline{y} d\underline{x} = \int_{P^\delta} \left(\int_Y \underline{\nabla}_y (\underline{\nabla}_x v_0 v_1) d\underline{y} \right) d\underline{x}$$

e aplicando integração por partes, temos

$$\int_{P^\delta} \left(\int_{\partial Y} \nabla_{\underline{x}} v_0 v_1 n(\underline{y}) dS_{\underline{y}} \right) d\underline{x} = 0.$$

Aplicando a desigualdade de Poincaré, concluímos que

$$a(V, V) \geq \alpha \|V\|_{\mathcal{H}}^2.$$

- Simetria

$$\begin{aligned} a(U, V) &= \int_{P^\delta} \int_Y \left[\underline{a} \left(\nabla_{\underline{x}} u_{3D}^{\delta 0} + \nabla_{\underline{y}} u_{3D}^{\delta 1} \right) \right]^T (\nabla_{\underline{x}} v_0 + \nabla_{\underline{y}} v_1) d\underline{y} d\underline{x} \\ &= \int_{P^\delta} \int_Y \left[\underline{a} (\nabla_{\underline{x}} v_0 + \nabla_{\underline{y}} v_1) \right]^T (\nabla_{\underline{x}} u_{3D}^{\delta 0} + \nabla_{\underline{y}} u_{3D}^{\delta 1}) d\underline{y} d\underline{x} = a(V, U). \end{aligned}$$

Logo

$$a(U, V) = a(V, U).$$

Conseqüentemente a aplicação

$$\begin{aligned} F : \mathcal{H} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_0, v_1) &\rightarrow (f^\delta, v_0)_{L^2(P^\delta), V(P^\delta)} \end{aligned}$$

é linear e contínua em \mathcal{H} .

Então podemos aplicar o lema de Lax-Milgram para obter a existência e a unicidade da solução $(u_{3D}^{\delta 0}, u_{3D}^{\delta 1})$ para a formulação variacional (B.12) no espaço \mathcal{H} para qualquer $(v_0, v_1) \in \mathcal{H}$.

Escolhendo $v_0 \equiv 0$ em (B.12), temos

$$\operatorname{div}_{\underline{y}} \left[\underline{a} \nabla_{\underline{y}} u_{3D}^{\delta 1} \right] = - \operatorname{div}_{\underline{y}} \left[\underline{a} \nabla_{\underline{x}} u_{3D}^{\delta 0} \right] = - \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial a_{\alpha j}}{\partial y_\alpha} \frac{\partial u_{3D}^{\delta 0}}{\partial x_j} \quad \text{em } P^\delta \times Y. \quad (\text{B.13})$$

Escolhendo $v_1 \equiv 0$ em (B.12), temos

$$\int_{P^\delta} \int_Y \left[\underline{a} \nabla u_{3D}^{\delta 0} + \underline{a} \nabla_y u_{3D}^{\delta 1} \right] \nabla_x v_0 dy dx = (f^\delta, v_0)_{L^2(P^\delta), V(P^\delta)},$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_x \left[\int_Y \underline{a} \left[\nabla u_{3D}^{\delta 0} + \nabla_y u_{3D}^{\delta 1} \right] dy \right] &= f^\delta && \text{em } P^\delta, \\ u_{3D}^{\delta 0} &= 0 && \text{em } \partial P_L^\delta, \\ u_{3D}^{\delta 1} &\text{ é } Y\text{-periódica.} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Observemos que (B.13) é exatamente o problema (A.10), cuja solução é da forma

$$u_{3D}^{\delta 1}(x, y) = \sum_{j=1}^3 \bar{\chi}_j(y) \frac{\partial u_{3D}^{\delta 0}}{\partial x_j},$$

onde as funções $\bar{\chi}_j$ são soluções dos problemas de célula

$$\operatorname{div}_y \left[\underline{a} \nabla_y \bar{\chi}_j \right] = - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial a_{\alpha j}}{\partial y_\alpha} \quad \text{em } Y,$$

com condições de contorno periódicas para $j = 1, 2, 3$. Substituindo $u_{3D}^{\delta 1}$ em (B.14), temos

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \left[\underline{\bar{A}}(y) \nabla u_{3D}^{\delta 0} \right] &= f^\delta && \text{em } P^\delta, \\ u_{3D}^{\delta 0} &= 0 && \text{em } \partial P_L^\delta, \\ (\underline{\bar{A}} \nabla u_{3D}^{\delta 0}) \cdot \underline{n} &= 0 && \text{em } \partial P_\pm^\delta. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

onde

$$\bar{A}_{ij} = \int_Y a_{ij} + \sum_{\beta=1}^2 a_{i\beta} \frac{\partial \bar{\chi}_j}{\partial y_\beta} dy_1 dy_2, \quad \text{para } i, j = 1, 2, 3.$$

Observemos que $u_{3D}^{\delta 0}$ é solução para o problema (B.15), que é o problema (2.16), cuja solução é \bar{u}_{3D}^δ , encontrada de maneira formal pelo método das expansões assintóticas. Isto implica que $u_{3D}^{\delta 0}$ é a única solução de (2.16). Consequentemente,

toda a sequência em (B.5) converge para \bar{u}_{3D}^δ . Temos ainda que $\underline{\underline{a}}^\epsilon \nabla u_{3D}^{\delta\epsilon}$ converge fraco para $\underline{\underline{\sigma}}^{\delta 0}$, definido por

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\delta 0} = \underline{\underline{A}} \nabla \bar{u}_{3D}^\delta.$$

Sendo assim, podemos escrever $\underline{\underline{\sigma}}^{\delta 0}$ em função de \bar{u}_{3D}^δ , uma vez que \bar{u}_{3D}^δ satisfaz um problema de valor de contorno, concluindo a prova do Teorema B.1.2. \square

B.1.1.1 O limite $\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_{3D}^{\delta\epsilon}$

Na seção anterior, utilizando como referência Cioranescu [Cioranescu e Donato (1999)], justificamos a convergência em ϵ de uma sequência de funções $\{u_{3D}^{\delta\epsilon}\}_{\epsilon>0}$ para a função $u_{3D}^{\delta 0}$, solução do problema homogeneizado (B.15). Nesta seção justificaremos a convergência em δ de uma sequência de funções $\{u_{3D}^{\delta 0}\}_{\delta>0}$ para a função \bar{u}^0 , solução do problema limite (2.2). A demonstração a seguir se baseia em Caillerie [Caillerie (1981)].

Para tanto, consideremos a formulação variacional do problema (B.15)

$$\begin{aligned} &\text{Encontrar } u_{3D}^{\delta 0} \in V(P^\delta) \text{ tal que} \\ &\int_{P^\delta} \underline{\underline{A}} \nabla u_{3D}^{\delta 0} \nabla v d\underline{\underline{x}} = \int_{P^\delta} f^\delta v d\underline{\underline{x}} \quad \text{para todo } v \in V(P^\delta). \end{aligned} \tag{B.16}$$

Como $u_{3D}^{\delta 0} \in V(P^\delta)$, em particular, podemos escolher $v = u_{3D}^{\delta 0}$ e reescrever (B.16) como

$$\int_{P^\delta} \underline{\underline{A}} \nabla u_{3D}^{\delta 0} \nabla u_{3D}^{\delta 0} d\underline{\underline{x}} = \int_{P^\delta} f^\delta u_{3D}^{\delta 0} d\underline{\underline{x}}.$$

Precisamos verificar se $\underline{\underline{A}}$ é positiva definida. Consideremos o elemento \bar{A}_{11} de $\underline{\underline{A}}$

$$\bar{A}_{11} = \int_Y a_{11}^\epsilon + a_{11}^\epsilon \frac{\partial \bar{\chi}_1}{\partial y_1} + a_{12}^\epsilon \frac{\partial \bar{\chi}_1}{\partial y_2} dy_1 dy_2.$$

Seja ξ um vetor de \mathbb{R}^3 . Então

$$\bar{A}_{11} \xi_1^2 = \int_Y a_{11}^\epsilon \xi_1^2 + a_{11}^\epsilon \xi_1^2 \frac{\partial \bar{\chi}_1}{\partial y_1} + a_{12}^\epsilon \xi_1^2 \frac{\partial \bar{\chi}_1}{\partial y_2} dy_1 dy_2 \geq \int_Y a_{11}^\epsilon \xi_1^2 dy_1 dy_2.$$

Aplicando o mesmo processo para todos os elementos da matriz $\underline{\underline{\bar{A}}}$, podemos escrever

$$\bar{A}\xi^2 + \bar{A}\xi_3\xi + \bar{A}^t\xi\xi_3 + \bar{A}_{33}\xi^2 \geq \underline{a}\xi^2 + \underline{a}\xi_3\xi + \underline{a}^t\xi\xi_3 + a_{33}\xi_3^2 \geq \alpha|\underline{\xi}|^2. \quad (\text{B.17})$$

Logo $\underline{\underline{\bar{A}}}$ é positiva definida.

Com o objetivo de eliminar a dependência do parâmetro δ para o domínio P^δ , aplicamos novamente a mudança de variáveis (2.3). No domínio P , definimos

$$\tilde{u}_{3D}^{\delta 0}(\hat{x}) = u_{3D}^{\delta 0}(\hat{x}, \delta\hat{x}_3) = u_{3D}^{\delta 0}(x).$$

Como a relação (B.17) é válida para todo vetor $\underline{\xi} \in \mathbb{R}^3$, escolhemos, em particular, um vetor $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \delta^{-1}\xi_3)$. Substituindo $\bar{\xi}$ em (B.17), obtemos

$$\bar{A}\xi^2 + \delta^{-1}\bar{A}\xi_3\xi + \delta^{-1}\bar{A}^t\xi\xi_3 + \delta^{-2}\bar{A}_{33}\xi_3^2 \geq \alpha(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \delta^{-2}\xi_3^2).$$

Como δ é um parâmetro pequeno, temos que $\delta^{-2}\xi_3^2 > \xi_3^2$. Desta forma,

$$\bar{A}\xi^2 + \delta^{-1}\bar{A}\xi_3\xi + \delta^{-1}\bar{A}^t\xi\xi_3 + \delta^{-2}\bar{A}_{33}\xi_3^2 \geq \alpha(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) = \alpha|\underline{\xi}|^2. \quad (\text{B.18})$$

Reescrevendo (B.16) no novo domínio P , escolhendo $v = \tilde{u}_{3D}^{\delta 0}$ e considerando (B.18), temos

$$\begin{aligned} \alpha \int_P |\nabla \tilde{u}_{3D}^{\delta 0}|^2 d\hat{x} &\leq \int_P \bar{A} \nabla \tilde{u}_{3D}^{\delta 0} \nabla \tilde{u}_{3D}^{\delta 0} d\hat{x} + 2\delta^{-1} \int_P \bar{A} \frac{\partial \tilde{u}_{3D}^{\delta 0}}{\partial \hat{x}_3} \nabla \tilde{u}_{3D}^{\delta 0} d\hat{x} + \\ &\quad \delta^{-2} \int_P \bar{A}_{33} \frac{\partial \tilde{u}_{3D}^{\delta 0}}{\partial \hat{x}_3} \frac{\partial \tilde{u}_{3D}^{\delta 0}}{\partial \hat{x}_3} d\hat{x} \leq \delta C \|f\|_{L^2(P)} \|\tilde{u}_{3D}^{\delta 0}\|_{H^1(P)}. \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Poincaré, concluímos

$$\|\tilde{u}_{3D}^{\delta 0}\|_{H^1(P)} \leq C \|f\|_{L^2(P)}, \quad (\text{B.19})$$

onde a constante C depende apenas da geometria do domínio. Ao reescrever o problema (B.16) no domínio P , podemos limitar a norma da função f por uma constante independente de δ . Logo

$$\|\tilde{u}_{3D}^{\delta_0}\|_{H^1(P)} \leq C. \quad (\text{B.20})$$

Teorema B.1.3. *Seja $\{\tilde{u}_{3D}^{\delta_0}\}_{\delta>0}$ uma seqüência limitada em $V(P)$. Então existe uma subseqüência que converge fraco em $V(P)$ para algum w .*

Como a seqüência $\{\tilde{u}_{3D}^{\delta_0}\}_{\delta>0}$ é limitada, então existe uma subseqüência que converge fraco para algum $w \in V(P)$.

A partir do Teorema B.1.3, verificamos que o resultado (B.20) ocorre para uma subseqüência de $\{\tilde{u}^{\delta_0}\}_{H^1(P)}$ que converge para algum $w \in V(P)$. Tomando o limite quando δ tende a zero em (B.20), temos

$$\|w\|_{H^1(P)} \leq C.$$

Como

$$\int_P |\nabla \tilde{u}_{3D}^{\delta_0}|^2 d\hat{x} = \left\| \frac{\partial \tilde{u}_{3D}^{\delta_0}}{\partial \hat{x}_1} \right\|_{L^2(P)}^2 + \left\| \frac{\partial \tilde{u}_{3D}^{\delta_0}}{\partial \hat{x}_2} \right\|_{L^2(P)}^2 + \delta^{-2} \left\| \frac{\partial \tilde{u}_{3D}^{\delta_0}}{\partial \hat{x}_3} \right\|_{L^2(P)}^2,$$

a partir de (B.18) temos

$$\left\| \frac{\partial u_{3D}^{\delta_0}}{\partial \hat{x}_1} \right\|_{L^2(P)}^2 + \left\| \frac{\partial u_{3D}^{\delta_0}}{\partial \hat{x}_2} \right\|_{L^2(P)}^2 + \delta^{-2} \left\| \frac{\partial u_{3D}^{\delta_0}}{\partial \hat{x}_3} \right\|_{L^2(P)}^2 \leq C. \quad (\text{B.21})$$

Multiplicando a relação anterior por δ^2 ,

$$\delta^2 \left\| \frac{\partial u_{3D}^{\delta_0}}{\partial \hat{x}_1} \right\|_{L^2(P)}^2 + \delta^2 \left\| \frac{\partial u_{3D}^{\delta_0}}{\partial \hat{x}_2} \right\|_{L^2(P)}^2 + \left\| \frac{\partial u_{3D}^{\delta_0}}{\partial \hat{x}_3} \right\|_{L^2(P)}^2 \leq C\delta^2.$$

Tomando o limite quando δ tende a zero em ambos os membros, concluímos que

$$\frac{\partial w}{\partial \hat{x}_3} = 0.$$

Logo w é uma função independente de \hat{x}_3 .

Lema B.1.3. *Consideremos a sequência $\{\underline{\underline{A}}\nabla_{\underline{\underline{x}}}\tilde{u}_{3D}^{\delta_0}\}$. A partir das condições de existência para a matriz $\underline{\underline{A}}$, da Definição B.1.3 e de (B.21), concluímos que a sequência é limitada em $L^2(P)$. Desta forma, existe uma subsequência, denotada ainda por $\{\underline{\underline{A}}\nabla_{\underline{\underline{x}}}\tilde{u}_{3D}^{\delta_0}\}$ e um elemento $\underline{\underline{\sigma}} \in [L^2(P)]^3$ tal que*

$$\underline{\underline{A}}\nabla_{\underline{\underline{x}}}\tilde{u}_{3D}^{\delta_0} \rightharpoonup \underline{\underline{\sigma}} \text{ fraco em } [L^2(P)]^3.$$

Lema B.1.4. *O limite σ_3 é nulo.*

Demonstração. Consideremos φ uma função em $\mathcal{D}(P)$. Então

$$v = \int_0^{\hat{x}_3} \varphi(\hat{x}_1, \hat{x}_2, s) ds.$$

Lembremos da formulação variacional para o problema (B.16) no domínio P

$$\int_P \underline{\underline{A}}\nabla_{\underline{\underline{x}}}\tilde{u}_{3D}^{\delta_0} \nabla_{\underline{\underline{x}}} v d\underline{\underline{x}} + 2\delta^{-1} \int_P \underline{\underline{A}}\nabla_{\underline{\underline{x}}}\tilde{u}_{3D}^{\delta_0} \nabla_{\underline{\underline{x}}} v d\underline{\underline{x}} + \delta^{-2} \int_P \underline{\underline{A}}_{33} \frac{\partial \tilde{u}_{3D}^{\delta_0}}{\partial \hat{x}_3} \frac{\partial v}{\partial \hat{x}_3} d\underline{\underline{x}} = \delta \int_P f v d\underline{\underline{x}}.$$

Multiplicando a relação anterior por δ^2 , temos

$$\delta^2 \int_P \underline{\underline{A}}\nabla_{\underline{\underline{x}}}\tilde{u}_{3D}^{\delta_0} \nabla_{\underline{\underline{x}}} v d\underline{\underline{x}} + 2\delta \int_P \underline{\underline{A}}\nabla_{\underline{\underline{x}}}\tilde{u}_{3D}^{\delta_0} \nabla_{\underline{\underline{x}}} v d\underline{\underline{x}} + \int_P \underline{\underline{A}}_{33} \frac{\partial \tilde{u}_{3D}^{\delta_0}}{\partial \hat{x}_3} \frac{\partial v}{\partial \hat{x}_3} d\underline{\underline{x}} = \delta^3 \int_P f v d\underline{\underline{x}}.$$

Tomando o limite quando δ tende a zero na relação anterior

$$\int_P \sigma_3 \varphi d\underline{\underline{x}} = 0,$$

e como $\varphi \in \mathcal{D}(P)$, concluímos que $\sigma_3 = 0$ □

A partir do Lema B.1.4, concluímos que a sequência $\underline{\underline{A}}\nabla_{\underline{\underline{x}}}\tilde{u}_{3D}^{\delta_0}$ converge para

$(\sigma, 0)$. A partir da formulação variacional (B.16), podemos escrever

$$\int_{P^\delta} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \bar{A}_{\alpha\beta}^\epsilon \frac{\partial u_{3D}^{\delta 0}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v}{\partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^2 \bar{A}_{\alpha 3}^\epsilon \frac{\partial u_{3D}^{\delta 0}}{\partial x_3} \frac{\partial v}{\partial x_\alpha} + \bar{A}_{33}^\epsilon \frac{\partial u_{3D}^{\delta 0}}{\partial x_3} \frac{\partial v}{\partial x_3} d\bar{x} = \int_{P^\delta} f^\delta v d\bar{x},$$

para todo $v \in V(P^\delta)$.

Aplicando a mudança de variáveis (2.3) na formulação variacional anterior, temos

$$\int_P \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \bar{A}_{\alpha\beta} \frac{\partial \tilde{u}_{3D}^{\delta 0}}{\partial \hat{x}_\alpha} \frac{\partial v}{\partial \hat{x}_\beta} + \sum_{\alpha=1}^2 \delta^{-1} \bar{A}_{\alpha 3} \frac{\partial \tilde{u}_{3D}^{\delta 0}}{\partial \hat{x}_3} \frac{\partial v}{\partial \hat{x}_\alpha} + \delta^{-2} \bar{A}_{33} \frac{\partial \tilde{u}_{3D}^{\delta 0}}{\partial \hat{x}_3} \frac{\partial v}{\partial \hat{x}_3} d\hat{x} = \int_P f v d\hat{x},$$

para todo $v \in V(P)$. (B.22)

Definimos

$$\tilde{\sigma}_3 = \delta \sigma_3 = \delta \bar{A}_{31} \frac{\partial \tilde{u}_{3D}^{\delta 0}}{\partial \hat{x}_1} + \delta \bar{A}_{32} \frac{\partial \tilde{u}_{3D}^{\delta 0}}{\partial \hat{x}_2} + \bar{A}_{33} \frac{\partial \tilde{u}_{3D}^{\delta 0}}{\partial \hat{x}_3},$$

donde podemos escrever

$$\frac{\partial \tilde{u}_{3D}^{\delta 0}}{\partial \hat{x}_3} = \frac{1}{\bar{A}_{33}} \left[\tilde{\sigma}_3 - \delta \bar{A}_{31} \frac{\partial \tilde{u}_{3D}^{\delta 0}}{\partial \hat{x}_1} - \delta \bar{A}_{32} \frac{\partial \tilde{u}_{3D}^{\delta 0}}{\partial \hat{x}_2} \right].$$

Substituindo a relação anterior na formulação variacional (B.22), temos

$$\int_P \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \left(\bar{A}_{\alpha\beta} - \frac{\bar{A}_{\alpha 3} \bar{A}_{3\beta}}{\bar{A}_{33}} \right) \frac{\partial \tilde{u}_{3D}^{\delta 0}}{\partial \hat{x}_\beta} \frac{\partial v}{\partial \hat{x}_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\bar{A}_{\alpha 3}}{\bar{A}_{33}} \tilde{\sigma}_3 \frac{\partial v}{\partial \hat{x}_\alpha} d\hat{x} = \int_P f v d\hat{x},$$

para todo $v \in V(P)$.

Tomando o limite quando δ tende a zero, temos

$$\int_P \bar{B} \nabla_{\hat{x}} w \nabla_{\hat{x}} v d\hat{x} = \int_P f v d\hat{x}, \quad \text{para todo } v \in V(P), \quad (\text{B.23})$$

onde os elementos da matriz \bar{B} são dados por

$$\bar{B}_{ij} = \bar{A}_{ij} - \frac{\bar{A}_{i3} \bar{A}_{3j}}{\bar{A}_{33}}, \quad \text{para } i, j = 1, 2.$$

A definição anterior coincide com (2.38).

A partir da formulação variacional (B.23), concluímos que w é solução para

$$\begin{aligned} -2 \operatorname{div} \left[\overline{B} \underset{\approx}{\nabla} w \right] &= \int_{-1}^1 f d\hat{x}_3 && \text{em } \Omega, \\ w &= 0 && \text{em } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{B.24}$$

Observemos que o problema (B.24) é idêntico ao problema (2.2) encontrado de maneira formal, utilizando-se o método assintótico. Portanto podemos concluir que

$$u_{3D}^{\delta\epsilon} \rightharpoonup \bar{u}^0 \text{ fraco em } H_0^1(\Omega). \tag{B.25}$$

Observemos que a sequência de funções $\{u_{3D}^{\delta\epsilon}\}$ converge para a função \bar{u}^0 , solução do problema (B.24) quando consideremos primeiramente o parâmetro ϵ tendendo a zero e, a seguir, o parâmetro δ tendendo a zero. Mostramos que a sequência $\{u_{3D}^{\delta\epsilon}\}$ converge para a solução de um problema bidimensional idêntico ao problema bidimensional (2.2), encontrado formalmente no Capítulo 2.

B.1.2 Justificativa para o limite quando δ tende a zero e a seguir ϵ tende a zero no problema original

Nesta seção demonstramos de forma rigorosa os resultados obtidos de maneira formal nas seções 2.2.1 e 2.2.2 para o limite quando δ tende a zero e, a seguir, o limite quando ϵ tende a zero.

B.1.2.1 O limite $\lim_{\delta \rightarrow 0} u_{3D}^{\delta\epsilon}$

Primeiramente faremos a demonstração para o limite quando δ tende a zero. Os passos desta demonstração seguem Caillerie [Caillerie (1981)].

Lembremos do problema inicial

$$\begin{aligned}
-\operatorname{div} [\underline{a}^\epsilon \underline{\nabla} u_{3D}^{\delta\epsilon}] &= f^\delta && \text{em } P^\delta, \\
(\underline{a}^\epsilon \underline{\nabla} u_{3D}^{\delta\epsilon}) \cdot \underline{n} &= 0 && \text{em } \partial P_\pm^\delta, \\
u_{3D}^{\delta\epsilon} &= 0 && \text{em } \partial P_L^\delta.
\end{aligned} \tag{B.26}$$

A formulação variacional do problema (B.26) é dada por

Encontrar $u_{3D}^{\delta\epsilon} \in V(P^\delta)$ tal que

$$\int_{P^\delta} \underline{a}^\epsilon \underline{\nabla} u_{3D}^{\delta\epsilon} \underline{\nabla} v d\underline{x} = \int_{P^\delta} f^\delta v d\underline{x} \quad \text{para todo } v \in V(P^\delta).$$

Como $u_{3D}^{\delta\epsilon} \in V(P^\delta)$, em particular, podemos reescrever a relação anterior como

$$\int_{P^\delta} \underline{a}^\epsilon \underline{\nabla} u_{3D}^{\delta\epsilon} \underline{\nabla} u_{3D}^{\delta\epsilon} d\underline{x} = \int_{P^\delta} f^\delta u_{3D}^{\delta\epsilon} d\underline{x}.$$

Usando o fato de $\underline{a}^\epsilon \in M(\alpha, \beta, P^\delta)$, temos

$$\begin{aligned}
\alpha \int_{P^\delta} |\underline{\nabla} u_{3D}^{\delta\epsilon}|^2 d\underline{x} &= \alpha \int_{P^\delta} \left(\frac{\partial u_{3D}^{\delta\epsilon}}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_{3D}^{\delta\epsilon}}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_{3D}^{\delta\epsilon}}{\partial x_3} \right)^2 d\underline{x} = \\
&\alpha \sum_{i=1}^3 \left\| \frac{\partial u_{3D}^{\delta\epsilon}}{\partial x_i} \right\|_{L^2(P^\delta)}^2 \leq \int_{P^\delta} \underline{a}^\epsilon \underline{\nabla} u_{3D}^{\delta\epsilon} \underline{\nabla} u_{3D}^{\delta\epsilon} d\underline{x} = \int_{P^\delta} f^\delta u_{3D}^{\delta\epsilon} d\underline{x} \\
&\leq C \left(\int_{P^\delta} |f^\delta|^2 d\underline{x} \right)^{1/2} \left(\int_{P^\delta} |u_{3D}^{\delta\epsilon}|^2 d\underline{x} \right)^{1/2} = C \|f^\delta\|_{L^2(P^\delta)} \|u_{3D}^{\delta\epsilon}\|_{H^1(P^\delta)},
\end{aligned}$$

e utilizando a desigualdade de Poincaré, podemos concluir

$$\|u_{3D}^{\delta\epsilon}\|_{H^1(P^\delta)} \leq C \|f^\delta\|_{L^2(P^\delta)}, \tag{B.27}$$

onde a constante C depende apenas da geometria do domínio, não dependendo, portanto, de δ e ϵ . Desta forma, consideramos ϵ fixo, obtendo uma sequência em δ .

Com o objetivo de eliminar a dependência de δ do domínio, aplicamos a mudança

de variáveis (2.3). Definimos no domínio P

$$u_{3D}^\epsilon(\underline{\hat{x}}) = u_{3D}^{\delta\epsilon}(\underline{\hat{x}}, \delta\hat{x}_3) = u_{3D}^{\delta\epsilon}(\underline{x}).$$

Reescrevemos o problema (1.1) no domínio P , conforme (2.5). A exemplo do que foi feito na seção B.1.1.1, a partir da formulação variacional para o problema (2.5), concluímos

$$\|u_{3D}^\epsilon\|_{H^1(P)} \leq C, \quad (\text{B.28})$$

onde novamente a constante C independe de δ .

Utilizando a limitação (B.28) e o Teorema B.1.3 aplicado à sequência $\{u_{3D}^\epsilon\}$, podemos extrair uma subsequência que converge fraco em $V(P)$ para a função limite w^ϵ . É possível demonstrar que todas as subsequências convergem para o mesmo limite w^ϵ , e, conseqüentemente, a sequência inteira converge para w^ϵ . Tomando o limite quando δ tende a zero em (B.28), temos

$$\|w^\epsilon\|_{H^1(P)} \leq C.$$

Os passos a seguir são os mesmos da seção B.1.1.1.

Como

$$\int_P |\nabla_{\underline{\hat{x}}} u_{3D}^\epsilon|^2 d\underline{\hat{x}} = \left\| \frac{\partial u_{3D}^\epsilon}{\partial \hat{x}_1} \right\|_{L^2(P)}^2 + \left\| \frac{\partial u_{3D}^\epsilon}{\partial \hat{x}_2} \right\|_{L^2(P)}^2 + \delta^{-2} \left\| \frac{\partial u_{3D}^\epsilon}{\partial \hat{x}_3} \right\|_{L^2(P)}^2,$$

a partir de (B.28) podemos concluir que

$$\left\| \frac{\partial u_{3D}^\epsilon}{\partial \hat{x}_1} \right\|_{L^2(P)}^2 + \left\| \frac{\partial u_{3D}^\epsilon}{\partial \hat{x}_2} \right\|_{L^2(P)}^2 + \delta^{-2} \left\| \frac{\partial u_{3D}^\epsilon}{\partial \hat{x}_3} \right\|_{L^2(P)}^2 \leq C. \quad (\text{B.29})$$

Multiplicando a relação anterior por δ^2 , temos

$$\delta^2 \left\| \frac{\partial u_{3D}^\epsilon}{\partial \hat{x}_1} \right\|_{L^2(P)}^2 + \delta^2 \left\| \frac{\partial u_{3D}^\epsilon}{\partial \hat{x}_2} \right\|_{L^2(P)}^2 + \left\| \frac{\partial u_{3D}^\epsilon}{\partial \hat{x}_3} \right\|_{L^2(P)}^2 \leq C\delta^2.$$

Tomando o limite quando δ tende a zero em ambos os membros, concluímos que

$$\frac{\partial w^\epsilon}{\partial \hat{x}_3} = 0.$$

Logo w^ϵ é uma função independente de \hat{x}_3 . Da mesma forma, temos os resultados análogos aos Lemas B.1.3 e B.1.4 para a sequência $\{\underline{a}^\epsilon \nabla_{\underline{\hat{x}}} u_{3D}^\epsilon\}$.

Lema B.1.5. *Consideremos a sequência $\{\underline{a}^\epsilon \nabla_{\underline{\hat{x}}} u_{3D}^\epsilon\}$. A partir das condições de existência para a matriz \underline{a}^ϵ e (B.29), concluímos que a sequência é limitada em $L^2(P)$. Desta forma, existe uma subsequência denotada ainda por $\{\underline{a}^\epsilon \nabla_{\underline{\hat{x}}} u_{3D}^\epsilon\}$ e um elemento $\bar{\sigma}^\epsilon \in [L^2(P)]^3$ tal que a subsequência converge fraco para $\bar{\sigma}^\epsilon$ em $[L^2(P)]^3$.*

Lema B.1.6. *O limite $\bar{\sigma}_3^\epsilon$ é nulo.*

Podemos reescrever a formulação variacional do problema (B.26) como

$$\int_{P^\delta} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 a_{\alpha\beta}^\epsilon \frac{\partial u_{3D}^{\delta\epsilon}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v}{\partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^2 a_{23}^\epsilon \frac{\partial u_{3D}^{\delta\epsilon}}{\partial x_3} \frac{\partial v}{\partial x_\alpha} + a_{33}^\epsilon \frac{\partial u_{3D}^{\delta\epsilon}}{\partial x_3} \frac{\partial v}{\partial x_3} dx = \int_{P^\delta} f^\delta v dx$$

para todo $v \in V(P^\delta)$.

Aplicando a mudança de variáveis (2.3) na formulação variacional anterior, temos

$$\int_P \sum_{\alpha, \beta=1}^2 a_{\alpha\beta}^\epsilon \frac{\partial u_{3D}^\epsilon}{\partial \hat{x}_\alpha} \frac{\partial v}{\partial \hat{x}_\beta} + \delta^{-1} \sum_{\alpha=1}^2 a_{23}^\epsilon \frac{\partial u_{3D}^\epsilon}{\partial \hat{x}_3} \frac{\partial v}{\partial \hat{x}_\alpha} + \delta^{-2} a_{33}^\epsilon \frac{\partial u_{3D}^\epsilon}{\partial \hat{x}_3} \frac{\partial v}{\partial \hat{x}_3} d\hat{x} = \delta \int_P f v d\hat{x} \quad \text{para todo } v \in V(P). \quad (\text{B.30})$$

Denotamos por $\tilde{\sigma}_3^\epsilon = \delta \bar{\sigma}_3^\epsilon$ e obtemos

$$\tilde{\sigma}_3^\epsilon = \delta \bar{\sigma}_3^\epsilon = \delta a_{31}^\epsilon \frac{\partial u_{3D}^\epsilon}{\partial \hat{x}_1} + \delta a_{32}^\epsilon \frac{\partial u_{3D}^\epsilon}{\partial \hat{x}_2} + a_{33}^\epsilon \frac{\partial u_{3D}^\epsilon}{\partial \hat{x}_3}, \quad (\text{B.31})$$

donde podemos escrever

$$\frac{\partial u_{3D}^\epsilon}{\partial \hat{x}_3} = \frac{1}{a_{33}^\epsilon} \left[\tilde{\sigma}_3^\epsilon - \delta a_{31}^\epsilon \frac{\partial u_{3D}^\epsilon}{\partial \hat{x}_1} - \delta a_{32}^\epsilon \frac{\partial u_{3D}^\epsilon}{\partial \hat{x}_2} \right]. \quad (\text{B.32})$$

Substituindo (B.32) em (B.30), obtemos a seguinte formulação

$$\int_P \frac{a_{13}^\epsilon}{a_{33}^\epsilon} \tilde{\sigma}_3^\epsilon - \frac{a_{13}^\epsilon a_{31}^\epsilon}{a_{33}^\epsilon} \frac{\partial u_{3D}^\epsilon}{\partial \hat{x}_1} - \frac{a_{13}^\epsilon a_{32}^\epsilon}{a_{33}^\epsilon} \frac{\partial u_{3D}^\epsilon}{\partial \hat{x}_2} + \frac{a_{23}^\epsilon}{a_{33}^\epsilon} \tilde{\sigma}_3^\epsilon - \frac{a_{23}^\epsilon a_{31}^\epsilon}{a_{33}^\epsilon} \frac{\partial u_{3D}^\epsilon}{\partial \hat{x}_1} - \frac{a_{23}^\epsilon a_{32}^\epsilon}{a_{33}^\epsilon} \frac{\partial u_{3D}^\epsilon}{\partial \hat{x}_2} d\hat{x} = \int_P f v d\hat{x}.$$

Tomando o limite quando δ tende a zero, temos

$$\int_P A^\epsilon \nabla_{\tilde{\hat{x}}} w^\epsilon \nabla_{\tilde{\hat{x}}} v d\hat{x} = \int_P f v d\hat{x}, \quad (\text{B.33})$$

cuja formulação forte é dada por

$$\begin{aligned} -2 \operatorname{div} \left[A^\epsilon \nabla_{\tilde{\hat{x}}} w^\epsilon \right] &= \int_{-1}^1 f d\hat{x}_3 && \text{em } \Omega, \\ w^\epsilon &= 0 && \text{em } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

onde

$$A_{ij}^\epsilon = a_{ij}^\epsilon - \frac{a_{i3}^\epsilon a_{3j}^\epsilon}{a_{33}^\epsilon}, \quad \text{para } i, j = 1, 2,$$

que é o problema (2.15). Como w^ϵ e $u^{\epsilon 0}$ são soluções do mesmo problema, podemos concluir que $w^\epsilon = u^{\epsilon 0}$, que é a única solução do problema (B.34). Temos ainda que a sequência toda $\{u_{3D}^\epsilon\}$ converge fraco para a função $u^{\epsilon 0}$.

$$u_{3D}^{\delta\epsilon} \rightharpoonup u^{\epsilon 0}.$$

B.1.2.2 O limite $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\lim_{\delta \rightarrow 0} u_{3D}^{\delta\epsilon} \right)$

A fim de mostrar a convergência do problema (B.34) para a solução homogeneizada após a utilização das técnicas de homogeneização, aplicamos novamente

o método de convergência em duas escalas. Os resultados a seguir estão em Cioranescu [Cioranescu e Donato (1999)] e na seção B.1.1.

Definição B.1.5. *Seja $\{v^\epsilon\}$ uma sequência de funções em $L^2(\Omega)$. Dizemos que $\{v^\epsilon\}$ converge em duas escalas para $v_0 = v_0(\hat{x}, \hat{y})$ com $v_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ se para qualquer função $\phi = \phi(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathcal{D}(\Omega, C_{per}^\infty(Y))$, temos*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega} v^\epsilon(\hat{x}) \phi(\hat{x}, \epsilon^{-1} \hat{x}) d\hat{x} \right) = \int_{\Omega} \int_Y v_0(\hat{x}, \hat{y}) \phi(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{y} d\hat{x}. \quad (\text{B.35})$$

O resultado a seguir é análogo ao Teorema B.1.2 porém no domínio bidimensional.

Teorema B.1.4. *Sejam $f \in L^2(\Omega)$ e u^{ϵ_0} a solução para o problema (B.34). Assumimos que $A^\epsilon \in M(\alpha, \beta, \Omega)$ e que A^ϵ é periódica. Então*

- (1) $u^{\epsilon_0} \rightharpoonup \bar{u}_{2D}$ fraco em $H_0^1(\Omega)$,
- (2) $A^\epsilon \nabla u^{\epsilon_0} \rightharpoonup B \nabla \bar{u}_{2D}$ fraco em $[L^2(\Omega)]^3$,

onde \bar{u}_{2D} é a única solução em $H_0^1(\Omega)$ do problema homogeneizado

$$\begin{aligned} -2 \operatorname{div} \left[B \nabla \bar{u}_{2D} \right] &= \int_{-1}^1 f d\hat{x}_3 && \text{em } \Omega, \\ \bar{u}_{2D} &= 0 && \text{em } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

onde

$$B_{ij} = \int_Y A_{ij} + \sum_{\beta=1}^2 A_{i\beta} \frac{\partial \chi_j}{\partial y_\alpha} dy_1 dy_2, \quad i, j = 1, 2. \quad (\text{B.37})$$

Omitimos a demonstração do Teorema B.1.4 pelo fato de ser análoga à demonstração do Teorema B.1.2.

Através do Teorema B.1.4 mostramos que o resultado (2.1) obtido de maneira formal na seção 2.2 é idêntico ao problema limite (B.36) obtido de forma rigorosa.

B.1.2.3 O limite $\lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\mathcal{H}}(u_{3D}^{\delta^\epsilon})$

Após a aplicação da modelagem hierárquica de ordem um ao problema original (1.1), obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} -2 \operatorname{div} \left[\underline{a}^\epsilon \underline{\nabla} w_0^\epsilon + \underline{a}^\epsilon w_1^\epsilon \right] &= \int_{-1}^1 f d\hat{x}_3 && \text{em } \Omega, \\ -\frac{2\delta^2}{3} \operatorname{div} \left[\underline{a}^\epsilon \underline{\nabla} w_1^\epsilon \right] + 2\underline{a}^{\epsilon T} \underline{\nabla} w_0^\epsilon + 2a_{33}^\epsilon w_1^\epsilon &= \delta \int_{-1}^1 f \hat{x}_3 d\hat{x}_3 && \text{em } \Omega, \\ w_0^\epsilon = w_1^\epsilon &= 0 && \text{em } \partial\Omega. \end{aligned}$$

A partir das equações (1.3) e (1.4) podemos encontrar uma forma bilinear mista, como feito na seção 2.4.4.1. Logo

$$\begin{aligned} \bar{a}((w_0^\epsilon, w_1^\epsilon), (v_0, v_1)) &= \int_{\Omega} \underline{a}^\epsilon \underline{\nabla} w_0^\epsilon \underline{\nabla} w_1^\epsilon d\hat{x} + \int_{\Omega} \underline{a}^\epsilon w_1^\epsilon \underline{\nabla} v_0 d\hat{x} + \frac{\delta^2}{3} \int_{\Omega} \underline{a}^\epsilon \underline{\nabla} w_1^\epsilon \underline{\nabla} v_1 d\hat{x} + \\ &\int_{\Omega} \underline{a}^{\epsilon t} \underline{\nabla} w_0^\epsilon v_1 d\hat{x} + \int_{\Omega} a_{33}^\epsilon w_1^\epsilon v_1 d\hat{x} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{-1}^1 f v_0 d\hat{x}_3 d\hat{x} + \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} \int_{-1}^1 f \hat{x}_3 v_1 d\hat{x}_3 d\hat{x}. \end{aligned} \tag{B.38}$$

Assim como a forma bilinear mista $a((\bar{w}_0, \bar{w}_1), (v_0, v_1))$ presente na seção 2.4.4.1 é coerciva, utilizando os mesmos argumentos, conseguimos mostrar que a forma bilinear mista $\bar{a}((w_0^\epsilon, w_1^\epsilon), (v_0, v_1))$ também é coerciva com respeito à norma $\|(\cdot, \cdot)\|_{1,\Omega}$. A partir deste resultado, temos

$$\bar{a}((w_0^\epsilon, w_1^\epsilon), (w_0^\epsilon, w_1^\epsilon)) \geq C \|(w_0^\epsilon, w_1^\epsilon)\|_{1,\Omega}^2. \tag{B.39}$$

É possível mostrar, utilizando os mesmos argumentos da seção 2.4.4.1, que

$$\bar{a}((w_0^\epsilon, w_1^\epsilon), (v_0, v_1)) \leq C \|f\|_{L^2(P)} (\|w_0^\epsilon\|_{H^1} + \delta \|w_1^\epsilon\|_{H^1}),$$

e, após algumas manipulações algébricas, obtemos

$$\|w_0^\epsilon\|_{H^1} \leq C \|f\|_{L^2(P)}.$$

Portanto a sequência de funções $\{w_0^\epsilon\}$, dependentes de δ , é limitada em $H^1(\Omega)$. Pelo Teorema B.1.3, existe uma subsequência de $\{w_0^\epsilon\}$ que converge fraco para um limite w_0^* em $H^1(\Omega)$. É possível mostrar que a sequência inteira $\{w_0^\epsilon\}$ converge para w_0^* , ou seja,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} w_0^\epsilon = w_0^*.$$

De forma análoga à seção 2.4.4.1, podemos limitar a sequência de funções $\{w_1^\epsilon\}$, dependentes de δ , tal que

$$\|w_1^\epsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C,$$

donde podemos extrair uma subsequência que converge em $H^1(\Omega)$ para um limite, que denotaremos por w_1^* , o qual pode ser dado por

$$w_1^\epsilon \rightarrow -\frac{1}{a_{33}^\epsilon} a^{et} \nabla_{\hat{x}} w_0^*. \quad (\text{B.40})$$

Desta forma, tomando o limite na forma bilinear mista (B.38), obtemos

$$\int_{\Omega} a^\epsilon \nabla_{\hat{x}} w_0^\epsilon \nabla v_0 d\hat{x} + a^\epsilon \left[-\frac{1}{a_{33}^\epsilon} a^{et} \nabla_{\hat{x}} w_0^* \right] \nabla v_0 d\hat{x} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{-1}^1 f v_0 d\hat{x}_3 d\hat{x}. \quad (\text{B.41})$$

A formulação forte para o problema (B.41) é

$$\begin{aligned} -2 \operatorname{div} \left[\left(a^\epsilon - \frac{1}{a_{33}^\epsilon} a^{et} a \right) \nabla_{\hat{x}} w_0^* \right] &= \int_{-1}^1 f d\hat{x}_3 && \text{em } \Omega, \\ w_0^* &= 0 && \text{em } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

donde podemos reescrevê-lo da seguinte forma

$$\begin{aligned} -2 \operatorname{div} \left[A_{\hat{x}}^\epsilon \nabla_{\hat{x}} w_0^* \right] &= \int_{-1}^1 f d\hat{x}_3 && \text{em } \Omega, \\ w_0^* &= 0 && \text{em } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

onde

$$A_{ij}^\epsilon = a_{ij}^\epsilon - \frac{a_{i3}^\epsilon a_{3j}^\epsilon}{a_{33}^\epsilon}, \quad \text{para } i, j = 1, 2.$$

Observemos que o problema (B.42) é idêntico ao problema (2.26), ou seja, w_0^ϵ e $w_0^{\epsilon*}$ são soluções para o mesmo problema. Portanto $w_0^\epsilon = w_0^{\epsilon*}$ e a sequência inteira $\{w_0^\epsilon\}$ converge para $w_0^{\epsilon*}$.

B.1.2.4 O limite $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\mathcal{H}}(u_{3D}^{\delta\epsilon}) \right)$

Nesta seção provaremos a convergência do problema (B.43). Observemos que os problemas (B.43) e (B.34) são idênticos, ou seja, podemos utilizar os mesmos resultados da seção B.1.2.2 para mostrar a convergência desejada. Sendo assim, através do Teorema B.1.4, concluímos que

- (1) $w_0^{\epsilon*} \rightharpoonup w_0$ fraco em $H_0^1(\Omega)$,
- (2) $A^\epsilon \nabla_{\approx} w_0^{\epsilon*} \rightharpoonup B \nabla_{\approx} w_0$ fraco em $[H_0^1(\Omega)]^2$,

onde w_0 é a solução para o problema homogeneizado

$$\begin{aligned} -2 \operatorname{div} \left[B \nabla_{\approx} w_0 \right] &= \int_{-1}^1 f d\hat{x}_3 && \text{em } \Omega, \\ w_0 &= 0 && \text{em } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{B.44}$$

onde

$$B_{ij} = \int_Y A_{ij} + \sum_{\beta=1}^2 A_{i\beta} \frac{\partial \chi_j}{\partial y_\beta} d\hat{y}.$$

Observemos que o problema (B.44) é idêntico ao problema (2.1). Portanto as funções w_0 e \bar{w}_0 são soluções do mesmo problema e, sendo assim, são as mesmas.

Apêndice C

Expansões assintóticas para o problema de Stokes

Seja Ω um aberto limitado em \mathbb{R}^2 , $\bar{F} - \text{rot}r \in [L^2(\Omega)]^2$ e consideramos o problema de Stokes (1.8). Suponhamos, ainda, que A é periódica.

Considerando a variável $y = \epsilon^{-1}x$, podemos aplicar a regra da cadeia à equação (1.8) e supondo que $\check{\varphi}$ e p dependem de \check{x} e \check{y} , obtemos

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{3}\epsilon^{-2} \text{div}_{\check{y}} \left[\underset{\approx}{A}^{-1} \underset{\approx}{e}(\check{\varphi}) \right] - \frac{1}{3}\epsilon^{-1} \text{div}_{\check{x}} \left[\underset{\approx}{A}^{-1} \underset{\approx}{e}(\check{\varphi}) \right] - \frac{1}{3}\epsilon^{-1} \text{div}_{\check{y}} \left[\underset{\approx}{A}^{-1} \underset{\approx}{e}(\check{\varphi}) \right] - \\
 & -\frac{1}{3} \text{div}_{\check{x}} \left[\underset{\approx}{A}^{-1} \underset{\approx}{e}(\check{\varphi}) \right] + \epsilon^{-1} \nabla_{\check{y}} p + \nabla_{\check{x}} p = \bar{F} - \text{rot}r, \quad (\text{C.1})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\epsilon^{-1} \text{div}_{\check{y}} \check{\varphi} + \epsilon^{-2} \text{div}_{\check{y}} \left(\delta^2 \lambda^{-1} \nabla_{\check{y}} p \right) + \epsilon^{-1} \text{div}_{\check{x}} \left(\delta^2 \lambda^{-1} \nabla_{\check{y}} p \right) + \\
 & \epsilon^{-1} \text{div}_{\check{y}} \left(\delta^2 \lambda^{-1} \nabla_{\check{x}} p \right) + \text{div}_{\check{x}} \left(\delta^2 \lambda^{-1} \nabla_{\check{x}} p \right) - \text{div}_{\check{x}} \check{\varphi} = 0. \quad (\text{C.2})
 \end{aligned}$$

Consideremos as expansões assintóticas, em torno de ϵ , para a função $\check{\varphi}$ e para a função p

$$\begin{aligned}
 \check{\varphi} &= \varphi_0 + \epsilon \varphi_1 + \epsilon^2 \varphi_2 + \dots \\
 p &= p_0 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + \dots
 \end{aligned}$$

Supomos que φ_i e p_i dependem de \tilde{x} e \tilde{y} e são periódicas em relação à \tilde{y} .

Substituindo as expansões assintóticas em (C.1) e (C.2), temos

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{3}\epsilon^{-2} \operatorname{div}_{\tilde{y}} \left[A^{-1} \bar{e}_{\tilde{y}}(\varphi_0) \right] - \frac{1}{3}\epsilon^{-1} \operatorname{div}_{\tilde{x}} \left[A^{-1} \bar{e}_{\tilde{y}}(\varphi_0) \right] - \frac{1}{3}\epsilon^{-1} \operatorname{div}_{\tilde{y}} \left[A^{-1} \bar{e}_{\tilde{x}}(\varphi_0) \right] \\
& -\frac{1}{3} \operatorname{div}_{\tilde{x}} \left[A^{-1} \bar{e}_{\tilde{x}}(\varphi_0) \right] - \frac{1}{3}\epsilon^{-1} \operatorname{div}_{\tilde{y}} \left[A^{-1} \bar{e}_{\tilde{y}}(\varphi_1) \right] - \frac{1}{3} \operatorname{div}_{\tilde{x}} \left[A^{-1} \bar{e}_{\tilde{y}}(\varphi_1) \right] - \frac{1}{3} \operatorname{div}_{\tilde{y}} \left[A^{-1} \bar{e}_{\tilde{x}}(\varphi_1) \right] \\
& - \frac{1}{3} \operatorname{div}_{\tilde{y}} \left[A^{-1} \bar{e}_{\tilde{y}}(\varphi_2) \right] + \epsilon^{-1} \nabla_{\tilde{y}} p_0 + \nabla_{\tilde{x}} p_0 + \nabla_{\tilde{y}} p_1 + \dots = \bar{F} - \operatorname{rot}r. \quad (\text{C.3})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\epsilon^{-1} \operatorname{div}_{\tilde{y}} \varphi_0 - \operatorname{div}_{\tilde{x}} \varphi_0 - \operatorname{div}_{\tilde{y}} \varphi_1 + \epsilon^{-2} \operatorname{div}_{\tilde{y}} \left(\delta^2 \lambda^{-1} \nabla_{\tilde{y}} p_0 \right) + \epsilon^{-1} \operatorname{div}_{\tilde{x}} \left(\delta^2 \lambda^{-1} \nabla_{\tilde{y}} p_0 \right) \\
& + \epsilon^{-1} \operatorname{div}_{\tilde{y}} \left(\delta^2 \lambda^{-1} \nabla_{\tilde{x}} p_0 \right) + \operatorname{div}_{\tilde{x}} \left(\delta^2 \lambda^{-1} \nabla_{\tilde{x}} p_0 \right) + \epsilon^{-1} \operatorname{div}_{\tilde{y}} \left(\delta^2 \lambda^{-1} \nabla_{\tilde{y}} p_1 \right) \\
& + \operatorname{div}_{\tilde{x}} \left(\delta^2 \lambda^{-1} \nabla_{\tilde{y}} p_1 \right) + \operatorname{div}_{\tilde{y}} \left(\delta^2 \lambda^{-1} \nabla_{\tilde{x}} p_1 \right) + \operatorname{div}_{\tilde{y}} \left(\delta^2 \lambda^{-1} \nabla_{\tilde{y}} p_2 \right) + \dots = 0. \quad (\text{C.4})
\end{aligned}$$

Agrupando os termos com a potência ϵ^{-2} , temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}_{\tilde{y}} \left[A^{-1} \bar{e}_{\tilde{y}}(\varphi_0) \right] &= 0 \quad \text{em } \Omega, \\
\operatorname{div}_{\tilde{y}} \left(\delta^2 \lambda^{-1} \nabla_{\tilde{y}} p_0 \right) &= 0 \quad \text{em } \Omega.
\end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Mostraremos que as funções φ_0 e p_0 são independentes de \tilde{y} . De fato, multiplicando a segunda equação de (C.5) por p_0 e integrando em Y , temos

$$\int_Y p_0 \operatorname{div}_{\tilde{y}} \left(\delta^2 \lambda^{-1} \nabla_{\tilde{y}} p_0 \right) d\tilde{y} = \int_{\partial Y} p_0 \delta^2 \lambda^{-1} \frac{\partial p_0}{\partial n} d\tilde{y} - \int_Y \delta^2 \lambda^{-1} |\nabla_{\tilde{y}} p_0|^2 d\tilde{y} = 0.$$

Observamos que $\nabla_{\tilde{y}} p_0 = 0$, isto é, p_0 é constante em relação a \tilde{y} . De modo análogo, multiplicando a primeira equação de (C.5) por φ_0 e integrando em Y , temos que $\varphi_0 = (\varphi_0^1, \varphi_0^2)$ é uma função constante em relação a \tilde{y} . Então

$$\begin{aligned}
\varphi_0(\tilde{x}, \tilde{y}) &:= \varphi_0(\tilde{x}) \\
p_0(\tilde{x}, \tilde{y}) &:= p_0(\tilde{x}).
\end{aligned}$$

Agrupando os termos com a potência ϵ^{-1} , temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \operatorname{div}_{\underline{y}} \left[\hat{A}_{\approx}^{-1} \bar{e}_{\approx \underline{y}} (\varphi_1) \right] &= -\hat{A}_{\approx}^{-1} \bar{e}_{\approx \underline{x}} (\varphi_0), \\ \operatorname{div}_{\underline{y}} \left(\delta^2 \lambda^{-1} \nabla_{\underline{y}} p_1 \right) &= -\delta^2 \hat{\lambda}^{-1} \cdot \nabla_{\underline{x}} p_0, \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

onde $\hat{\lambda} = \nabla_{\underline{y}} \lambda^{-1}$ e \hat{A}_{\approx}^{-1} é dada por

$$\left[\hat{A}_{\approx}^{-1} \tau_{\approx} \right]_{\alpha} = \sum_{\gamma=1}^2 \hat{A}_{\approx \alpha\beta\gamma}^{-1} \tau_{\beta\gamma} \text{ e } \hat{A}_{\alpha\beta\gamma}^{-1} = \sum_{\varrho=1}^2 \partial_{y_{\varrho}} A_{\alpha\varrho\beta\gamma}^{-1}.$$

Agrupando os termos com a potência ϵ^0

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3} \operatorname{div}_{\underline{x}} \left[A_{\approx}^{-1} \bar{e}_{\approx \underline{x}} (\varphi_0) \right] - \frac{1}{3} \operatorname{div}_{\underline{x}} \left[A_{\approx}^{-1} \bar{e}_{\approx \underline{y}} (\varphi_1) \right] - \frac{1}{3} \operatorname{div}_{\underline{y}} \left[A_{\approx}^{-1} \bar{e}_{\approx \underline{x}} (\varphi_1) \right] - \frac{1}{3} \operatorname{div}_{\underline{y}} \left[A_{\approx}^{-1} \bar{e}_{\approx \underline{y}} (\varphi_2) \right] \\ + \nabla_{\underline{x}} p_0 + \nabla_{\underline{y}} p_1 = \bar{F}_{\approx} - \operatorname{rot} r_{\approx}. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_{\underline{x}} \varphi_0 - \operatorname{div}_{\underline{y}} \varphi_1 + \operatorname{div}_{\underline{x}} \left(\delta^2 \lambda^{-1} \nabla_{\underline{x}} p_0 \right) + \operatorname{div}_{\underline{x}} \left(\delta^2 \lambda^{-1} \nabla_{\underline{y}} p_1 \right) + \operatorname{div}_{\underline{y}} \left(\delta^2 \lambda^{-1} \nabla_{\underline{x}} p_1 \right) \\ + \operatorname{div}_{\underline{y}} \left(\delta^2 \lambda^{-1} \nabla_{\underline{y}} p_2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Integrando as equações (C.7) e (C.8) em relação a Y e utilizando argumentos de periodicidade, obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3} \int_Y \operatorname{div}_{\underline{x}} \left[A_{\approx}^{-1} \left(\bar{e}_{\approx \underline{x}} (\varphi_0) + \bar{e}_{\approx \underline{y}} (\varphi_1) \right) \right] + \nabla_{\underline{x}} p_0 dy = \int_Y \bar{F}_{\approx} - \operatorname{rot} r_{\approx} dy \\ - \operatorname{div}_{\underline{x}} \varphi_0 + \operatorname{div}_{\underline{x}} \left(\frac{1}{|Y|} \int_Y \delta^2 \lambda^{-1} \left(\nabla_{\underline{x}} p_0 + \nabla_{\underline{y}} p_1 \right) dy \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Definimos o tensor de terceira ordem $\check{\chi}$ da seguinte forma

Fixados $m, n \in \{1, 2\}$, temos $\check{\chi}_{\alpha} = \chi_{\alpha mn}$, para $\alpha \in \{1, 2\}$, onde a função $\check{\chi}$ satisfaz o seguinte problema de célula

$$\frac{1}{3} \operatorname{div}_{\underline{y}} \left[A_{\approx}^{-1} \bar{e}_{\approx \underline{y}} (\check{\chi}) \right]_{\beta} = -\hat{A}_{\beta mn}^{-1}, \quad \text{com } \beta \in \{1, 2\} \text{ em } Y \quad (\text{C.10})$$

e condições de contorno periódicas, e onde analogamente, temos o problema de célula

$$\operatorname{div}_y \left(\lambda^{-1} \nabla_y \bar{\chi} \right) = -\hat{\lambda}^{-1} \quad \text{em } Y,$$

com condições de contorno periódicas.

Consideramos

$$\begin{aligned} \varphi_1(\underline{x}, \underline{y}) &= \chi_{\approx \approx x} \bar{e}_{\approx \approx x}(\varphi_0) \\ p_1(\underline{x}, \underline{y}) &= \bar{\chi} \cdot \nabla_x p_0. \end{aligned} \tag{C.11}$$

É fácil ver que as funções φ_1 e p_1 satisfazem aos problemas (C.6).

Substituindo (C.11) em (C.9), temos

$$-\frac{1}{3} \operatorname{div}_x \left[\frac{1}{|Y|} \int_Y A^{-1} \left(I + \bar{e}_y(\chi) \right) dy \bar{e}_{\approx \approx x}(\varphi_0) \right] + \nabla_x p_0 = \frac{1}{|Y|} \int_Y \bar{F} - \operatorname{rot} r dy.$$

Definimos

$$\begin{aligned} C &:= \frac{1}{|Y|} \int_Y A^{-1} \left(I + \bar{e}_y(\chi) \right) dy \\ \check{F} &:= \frac{1}{|Y|} \int_Y \bar{F} - \operatorname{rot} r dy. \end{aligned}$$

Então

$$-\frac{1}{3} \operatorname{div}_x \left[C \bar{e}_{\approx \approx x}(\varphi_0) \right] + \nabla_x p_0 = \check{F}.$$

Substituindo p_1 em (C.9), temos

$$-\operatorname{div}_x \varphi_0 + \operatorname{div}_x \left(\frac{1}{|Y|} \int_Y \delta^2 \lambda^{-1} \left(I + \nabla_y \bar{\chi} \right) \nabla_x p_0 dy \right) = 0.$$

Definimos

$$P := \frac{1}{|Y|} \int_Y \lambda^{-1} \left(I + \nabla_y \bar{\chi} \right) dy.$$

Então

$$-\operatorname{div}_x \varphi_0 + \delta^2 \operatorname{div}_x \left(P \nabla_x p_0 \right) = 0.$$

Portanto as funções (φ_0, p_0) são soluções do seguinte sistema

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{3} \operatorname{div}_{\tilde{x}} \left[C_{\tilde{\mathbb{M}}_{\tilde{x}}}^{\tilde{e}}(\varphi_0) \right] + \nabla_{\tilde{x}} p_0 &= \check{F} && \text{em } \Omega, \\
 -\operatorname{div}_{\tilde{x}} \varphi_0 + \delta^2 \operatorname{div}_{\tilde{x}} \left(P_{\tilde{\mathbb{M}}_{\tilde{x}}} \nabla_{\tilde{x}} p_0 \right) &= 0 && \text{em } \Omega, \\
 \varphi_0 &= 0 && \text{em } \partial\Omega.
 \end{aligned} \tag{C.12}$$