Método Assintótico, Modelagem Hierárquica e Homogeneização para a Equação de Poisson em uma placa heterogênea

Ana Carolina C. Oliveira, Alexandre L. Madureira
Laboratório Nacional de Computação Científica, LNCC
25633-000, Petrópolis, RJ
E-mail: carol@lncc.br, alm@lncc.br.

Resumo: *O objetivo deste trabalho é estudar a equação de Poisson em uma placa heterogênea tridimensional. Problemas deste tipo são difíceis de lidar em virtude da presença de dois parâmetros pequenos: a periodicidade das heterogeneidades contidas no domínio, a qual denotaremos por ϵ e a espessura da placa, dada por 2δ. Tratamos o problema de duas formas distintas: através de métodos assintóticos e modelagem hierárquica. Ambos os métodos foram utilizados com o objetivo de se deduzir modelos bidimensionais através de técnicas de redução de dimensão. A partir dos Métodos Assintóticos, tomamos os limites assintóticos quando $\delta \to 0$ e depois $\epsilon \to 0$ e, a seguir, tomamos os limites quando $\epsilon \to 0$ e depois $\delta \to 0$. Verificamos que os problemas encontrados ao final dos dois processos são diferentes, ou seja, os limites assintóticos não comutam. A seguir, aplicamos a técnica de redução de dimensão denominada Modelagem Hierárquica, encontrando um problema bidimensional e, tomando-se novamente os limites assintóticos, encontramos os mesmos modelos-limites deduzidos da equação tridimensional. Por fim, justificamos de forma rigorosa a validade dos modelos obtidos através de ambos os métodos.*

Palavras-chave: *Redução de dimensão, Métodos Assintóticos, Homogeneização, Modelagem Hierárquica*

1 Introdução

Neste trabalho estudamos a equação de Poisson em um domínio tridimensional heterogêneo delgado. Este tipo de problema é, em geral, difícil, pois há a presença de dois parâmetros pequenos diferentes: a periodicidade das heterogeneidades do domínio e a espessura do mesmo. A fim de lidar com estas dificuldades, consideramos o domínio tridimensional $P^\delta = \Omega \times (-\delta, \delta)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, sendo δ um parâmetro positivo pequeno. Consideramos ainda que as heterogeneidades são periódicas de período ϵ no sentido longitudinal e constantes na direção transversa. Denotamos por $P^\delta_\pm = \Omega \times \{-\delta, \delta\}$ as partes superior e inferior do domínio e por $P^\delta_L = \partial\Omega \times [-\delta, \delta]$ a sua lateral.
Desta forma, representamos o problema por

$$
\begin{aligned}
-\operatorname{div}\left[\underline{\underline{a}}^\epsilon \underline{\nabla} u^{\delta\epsilon}_{3D}\right] &= f^\delta \qquad \text{em } P^\delta, \\
\left(\underline{\underline{a}}^\epsilon \underline{\nabla} u^{\delta\epsilon}_{3D}\right) \cdot \underline{n} &= 0 \qquad \text{em } \partial P^\delta_\pm, \\
u^{\delta\epsilon}_{3D} &= 0 \qquad \text{em } \partial P^\delta_L,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

onde f^δ é a fonte de calor no interior do domínio. A matriz $\underline{\underline{a}}^\epsilon$ pertence ao espaço das matrizes 3×3 simétricas e é dada por

$$
\underline{\underline{a}}^\epsilon(\underset{\sim}{x}, x_3) = \begin{bmatrix} \underset{\approx}{a}^\epsilon(\underset{\sim}{x}) & \underset{\sim}{a}^\epsilon(\underset{\sim}{x}) \\ \underset{\sim}{a}^\epsilon(\underset{\sim}{x})^T & a^\epsilon_{33}(\underset{\sim}{x}) \end{bmatrix},
$$

onde $\underset{\approx}{a}^\epsilon$ pertence ao espaço das matrizes 2×2 simétricas e $\underset{\sim}{a}^\epsilon$ é um vetor em $\mathbb{R}^2$. Consideremos ainda que $\underset{=}{a}^\epsilon$ é periódica em relação à $\underset{\sim}{x}$, de período ϵ.
Primeiramente deduzimos de maneira formal o problema limite quando $\delta \to 0$ e depois $\epsilon \to 0$, utilizando o método assintótico para a redução de dimensão. O problema limite encontrado ao final do processo de redução de dimensão e a aplicação de técnicas de homogeneização é

$$\begin{aligned} -2\,\mathrm{div}_{\underset{\sim}{\hat{x}}}\left[\underset{\approx}{B}\nabla_{\underset{\sim}{\hat{x}}}\overline{u}_{2D}\right] &= \int_{-1}^{1} f d\hat{x}_3 \qquad \text{em } \Omega, \\ \overline{u}_{2D} &= 0 \qquad\qquad\quad \text{em } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2}$$

Os elementos da matriz $\underset{\approx}{B}$ são dados por

$$B_{ij} = \frac{1}{Y_1 Y_2}\int_Y A_{ij} + \sum_{\beta=1}^{2} A_{i\beta}\frac{\partial \chi_j}{\partial \hat{y}_\beta} d\hat{y}_1 d\hat{y}_2, \qquad i,j = 1,2,$$

onde Y representa a cela retangular com dimensões Y_1 e Y_2, dada por $Y := (0, Y_1) \times (0, Y_2)$ e

$$A_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3}a_{3j}}{a_{33}}, \qquad \text{para } i,j = 1,2,$$

são os elementos da matriz $\underset{\approx}{A}$, que é periódica de período ϵ. A função f representa a fonte de calor na placa $P = \Omega \times (-1, 1)$.
As funções χ_β, para $\beta = 1, 2$ são soluções para os seguintes problemas na cela periódica

$$\mathrm{div}_{\underset{\sim}{\hat{y}}}\left[\underset{\approx}{A}\nabla_{\underset{\sim}{\hat{y}}}\chi_\beta\right] = -\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial \hat{y}_\alpha} \qquad \text{em } Y, \tag{3}$$

com condições de contorno periódicas.
A seguir deduzimos, também de maneira formal, o problema limite quando $\epsilon \to 0$ e depois $\delta \to 0$, utilizando novamente o Método Assintótico para a redução de dimensão. O problema limite encontrado ao final da homogeneização e redução de dimensão via Métodos Assintóticos é

$$\begin{aligned} -2\,\mathrm{div}_{\underset{\sim}{\hat{x}}}\left[\overline{\underset{\approx}{B}}\nabla_{\underset{\sim}{\hat{x}}}\overline{u}^0\right] &= \int_{-1}^{1} f d\hat{x}_3 \qquad \text{em } \Omega, \\ \overline{u}^0 &= 0 \qquad\qquad\quad \text{em } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{4}$$

Os elementos da matriz $\overline{\underset{\approx}{B}}$ são dados por

$$\overline{B}_{ij} = \overline{A}_{ij} - \frac{\overline{A}_{i3}\overline{A}_{3j}}{\overline{A}_{33}}, \qquad \text{para } i,j = 1,2$$

e

$$\overline{A}_{ij} = \frac{1}{Y_1 Y_2}\int_Y a_{ij} + \sum_{\beta=1}^{2} a_{i\beta}\frac{\partial \overline{\chi}_j}{\partial y_\beta} dy_1 dy_2, \qquad \text{para } i,j = 1,2,3, \tag{5}$$

representam os elementos da matriz $\underset{=}{\overline{A}}$.
As funções $\overline{\chi}_j$ para $j = 1, 2, 3$ são soluções para os seguintes problemas na cela periódica

$$\mathrm{div}_{\underset{\sim}{y}}\left[\underset{\approx}{a}\nabla_{\underset{\sim}{y}}\overline{\chi}_j\right] = -\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial a_{\alpha j}}{\partial y_\alpha} \qquad \text{em } Y, \tag{6}$$

com condições de contorno periódicas.
Observemos que os problemas limite (2) e (4), encontrados ao final dos dois processos são diferentes, ou seja, os limites não comutam.

Introduzimos a técnica de redução de dimensão denominada Modelagem Hierárquica, deduzindo-se, então, modelos bidimensionais. A seguir, tomamos o limite $\delta \to 0$ e depois $\epsilon \to 0$, encontrando o mesmo problema limite (2). Também tomamos o limite $\epsilon \to 0$ e depois $\delta \to 0$, obtendo o problema limite (4).

2 O limite $\delta \to 0$ e depois $\epsilon \to 0$

Nesta seção aplicamos primeiramente um método para a redução de dimensão do domínio tridimensional para um domínio bidimensional, tomando o limite quando $\delta \to 0$. A seguir, aplicamos técnicas de homogeneização no problema resultante, o que equivale a tomar o limite assintótico quando $\epsilon \to 0$.

2.1 Método assintótico para δ

Para desenvolver as expansões assintóticas e obter funções independentes de δ, reescrevemos o problema (1) no domínio $P = \Omega \times (-1, 1)$. Desta forma, introduzimos a mudança de variáveis

$$\underset{\sim}{\hat{x}} = \underset{\sim}{x} \qquad \text{e} \qquad \hat{x}_3 = \delta^{-1} x_3. \tag{7}$$

Neste novo domínio, definimos

$$\begin{aligned} u^{\epsilon}_{3D}(\underline{\hat{x}}) &= u^{\delta\epsilon}_{3D}(\underset{\sim}{\hat{x}}, \delta \hat{x}_3) = u^{\delta\epsilon}_{3D}(\underline{x}), \\ f(\underline{\hat{x}}) &= f^{\delta}(\underline{x}), \\ g(\underline{\hat{x}}) &= g^{\delta}(\underline{x}). \end{aligned} \tag{8}$$

Consideremos a expansão assintótica da função u^{ϵ}_{3D} em função de δ

$$u^{\epsilon}_{3D} \sim u^{\epsilon 0} + \delta u^{\epsilon 1} + \delta^2 u^{\epsilon 2} + \dots. \tag{9}$$

Substituindo a expansão assintótica (9) no problema (1), após a mudança de variáveis (7), obtemos

$$\begin{aligned} &- \operatorname{div}_{\underset{\sim}{\hat{x}}} \left[\underset{\approx}{a}^{\epsilon} \nabla_{\underset{\sim}{\hat{x}}} u^{\epsilon 0} \right] - \delta \operatorname{div}_{\underset{\sim}{\hat{x}}} \left[\underset{\approx}{a}^{\epsilon} \nabla_{\underset{\sim}{\hat{x}}} u^{\epsilon 1} \right] - \delta^2 \operatorname{div}_{\underset{\sim}{\hat{x}}} \left[\underset{\approx}{a}^{\epsilon} \nabla_{\underset{\sim}{\hat{x}}} u^{\epsilon 2} \right] \\ &\quad - \delta^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial \hat{x}_1} \left(a^{\epsilon}_{13} \frac{\partial u^{\epsilon 0}}{\partial \hat{x}_3} \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} \left(a^{\epsilon}_{23} \frac{\partial u^{\epsilon 0}}{\partial \hat{x}_3} \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \left(a^{\epsilon}_{31} \frac{\partial u^{\epsilon 0}}{\partial \hat{x}_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \left(a^{\epsilon}_{32} \frac{\partial u^{\epsilon 0}}{\partial \hat{x}_2} \right) \right] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial \hat{x}_1} \left(a^{\epsilon}_{13} \frac{\partial u^{\epsilon 1}}{\partial \hat{x}_3} \right) - \frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} \left(a^{\epsilon}_{23} \frac{\partial u^{\epsilon 1}}{\partial \hat{x}_3} \right) - \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \left(a^{\epsilon}_{31} \frac{\partial u^{\epsilon 1}}{\partial \hat{x}_1} \right) - \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \left(a^{\epsilon}_{32} \frac{\partial u^{\epsilon 1}}{\partial \hat{x}_2} \right) \\ &\quad - \delta^{-2} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \left(a^{\epsilon}_{33} \frac{\partial u^{\epsilon 0}}{\partial \hat{x}_3} \right) - \delta^{-1} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \left(a^{\epsilon}_{33} \frac{\partial u^{\epsilon 1}}{\partial \hat{x}_3} \right) - \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3} \left(a^{\epsilon}_{33} \frac{\partial u^{\epsilon 2}}{\partial \hat{x}_3} \right) + \dots = f \qquad \text{em } P, \\ &\underset{\sim}{a}^{\epsilon T} \nabla_{\underset{\sim}{\hat{x}}} u^{\epsilon 0} + \delta \underset{\sim}{a}^{\epsilon T} \nabla_{\underset{\sim}{\hat{x}}} u^{\epsilon 1} + \delta^2 \underset{\sim}{a}^{\epsilon T} \nabla_{\underset{\sim}{\hat{x}}} u^{\epsilon 2} + \delta^{-1} a^{\epsilon}_{33} \frac{\partial u^{\epsilon 0}}{\partial \hat{x}_3} + a^{\epsilon}_{33} \frac{\partial u^{\epsilon 1}}{\partial \hat{x}_3} + \delta a^{\epsilon}_{33} \frac{\partial u^{\epsilon 2}}{\partial \hat{x}_3} + \dots = 0 \qquad \text{em } \Omega \times \{-1, 1\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Agrupando os termos com a potência δ^{-2} e contorno com a potência δ^{-1}, podemos concluir que $u^{\epsilon 0}$ é independente de $\hat{x}_3$. Agrupando os termos com a potência δ^{-1} e contorno com a potência δ^0, podemos concluir que $u^{\epsilon 1}$ é linear em relação à variável $\hat{x}_3$. Ainda temos que

$$\frac{\partial u^{\epsilon 1}}{\partial \hat{x}_3} = -\frac{1}{a^{\epsilon}_{33}} \left(\underset{\sim}{a}^{\epsilon T} \nabla_{\underset{\sim}{\hat{x}}} u^{\epsilon 0} \right). \tag{11}$$

Agrupamos os termos com δ^0, os termos com contorno com a potência δ e usando (11), obtemos

$$\begin{aligned} -2\,\mathrm{div}_{\underset{\sim}{\hat{x}}}\left[\underset{\approx}{A}^\epsilon \nabla_{\underset{\sim}{\hat{x}}} u^{\epsilon 0}\right] &= \int_{-1}^{1} f d\hat{x}_3 \qquad \text{em } \Omega, \\ u^{\epsilon 0} &= 0 \qquad\qquad\quad \text{em } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{12}$$

onde

$$\underset{\approx}{A}^\epsilon = \underset{\approx}{a}^\epsilon - \frac{\underset{\sim}{a}^\epsilon \underset{\sim}{a}^{\epsilon T}}{a_{33}^\epsilon},$$

isto é,

$$A_{ij}^\epsilon = a_{ij}^\epsilon - \frac{a_{i3}^\epsilon a_{3j}^\epsilon}{a_{33}^\epsilon}, \qquad \text{para } i,j = 1,2.$$

2.2 Homogeneização

A seguir apresentamos a homogeneização do problema (12). Para tanto, consideremos a expansão assintótica para a função $u^{\epsilon 0}$

$$u^{\epsilon 0} \sim u_{2D}^0 + \epsilon u_{2D}^1 + \epsilon^2 u_{2D}^2 + \dots. \tag{13}$$

Como $\underset{\approx}{A}^\epsilon$ é constituída por elementos da matriz $\underset{=}{a}^\epsilon$, que é periódica de período ϵ, então $\underset{\approx}{A}^\epsilon$ também é periódica de período ϵ na cela retangular Y com dimensões Y_1 e Y_2, dada por $Y := (0, Y_1) \times (0, Y_2)$. Definimos a variável $\underset{\sim}{y} = \epsilon^{-1}\underset{\sim}{\hat{x}}$. Portanto, $\underset{\approx}{A}^\epsilon(\underset{\sim}{\hat{x}}) = \underset{\approx}{A}(\epsilon^{-1}\underset{\sim}{\hat{x}}) = \underset{\approx}{A}(\underset{\sim}{\hat{y}})$.
Aplicando a regra da cadeia ao operador divergente do problema (12) e substituindo pela expansão (13), obtemos

$$\begin{aligned} &-\epsilon^{-2}\,\mathrm{div}_{\underset{\sim}{\hat{y}}}\left[\underset{\approx}{A}(\underset{\sim}{\hat{y}})\nabla_{\underset{\sim}{\hat{y}}} u_{2D}^0\right] - \epsilon^{-1}\left(\mathrm{div}_{\underset{\sim}{\hat{x}}}\left[\underset{\approx}{A}(\underset{\sim}{\hat{y}})\nabla_{\underset{\sim}{\hat{y}}} u_{2D}^0\right] + \mathrm{div}_{\underset{\sim}{\hat{y}}}\left[\underset{\approx}{A}(\underset{\sim}{\hat{y}})\nabla_{\underset{\sim}{\hat{x}}} u_{2D}^0\right]\right) - \mathrm{div}_{\underset{\sim}{\hat{x}}}\left[\underset{\approx}{A}(\underset{\sim}{\hat{y}})\nabla_{\underset{\sim}{\hat{x}}} u_{2D}^0\right] - \\ &\epsilon^{-1}\,\mathrm{div}_{\underset{\sim}{\hat{y}}}\left[\underset{\approx}{A}(\underset{\sim}{\hat{y}})\nabla_{\underset{\sim}{\hat{y}}} u_{2D}^1\right] - \mathrm{div}_{\underset{\sim}{\hat{x}}}\left[\underset{\approx}{A}(\underset{\sim}{\hat{y}})\nabla_{\underset{\sim}{\hat{y}}} u_{2D}^1\right] - \mathrm{div}_{\underset{\sim}{\hat{y}}}\left[\underset{\approx}{A}(\underset{\sim}{\hat{y}})\nabla_{\underset{\sim}{\hat{x}}} u_{2D}^1\right] - \epsilon\,\mathrm{div}_{\underset{\sim}{\hat{x}}}\left[\underset{\approx}{A}(\underset{\sim}{\hat{y}})\nabla_{\underset{\sim}{\hat{x}}} u_{2D}^1\right] - \\ &\qquad\qquad \mathrm{div}_{\underset{\sim}{\hat{y}}}\left[\underset{\approx}{A}(\underset{\sim}{\hat{y}})\nabla_{\underset{\sim}{\hat{y}}} u_{2D}^2\right] - \dots|_{\underset{\sim}{\hat{y}} = \epsilon^{-1}\underset{\sim}{\hat{x}}}. \end{aligned}$$

Agrupando os termos com a potência ϵ^{-2},concluímos que a função u_{2D}^0 é independente de $\underset{\sim}{\hat{y}}$, ou seja,

$$u_{2D}^0(\underset{\sim}{\hat{x}}, \underset{\sim}{\hat{y}}) := \overline{u}_{2D}(\underset{\sim}{\hat{x}}),$$

para alguma função $\overline{u}_{2D}$.
Agrupando os termos com a potência ϵ^{-1}

$$\mathrm{div}_{\underset{\sim}{\hat{y}}}\left[\underset{\approx}{A}\nabla_{\underset{\sim}{\hat{y}}} u_{2D}^1\right] = -\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2} \frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial \hat{y}_\alpha}\frac{\partial \overline{u}_{2D}}{\partial \hat{x}_\beta}. \tag{14}$$

Agrupando os termos com a potência ϵ^0

$$-\,\mathrm{div}_{\underset{\sim}{\hat{x}}}\left[\underset{\approx}{A}\nabla_{\underset{\sim}{\hat{x}}}\overline{u}_{2D}\right] - \mathrm{div}_{\underset{\sim}{\hat{x}}}\left[\underset{\approx}{A}\nabla_{\underset{\sim}{\hat{y}}} u_{2D}^1\right] - \mathrm{div}_{\underset{\sim}{\hat{y}}}\left[\underset{\approx}{A}\nabla_{\underset{\sim}{\hat{x}}} u_{2D}^1\right] - \mathrm{div}_{\underset{\sim}{\hat{y}}}\left[\underset{\approx}{A}\nabla_{\underset{\sim}{\hat{y}}} u_{2D}^2\right] = \int_{-1}^{1} f d\hat{x}_3. \tag{15}$$

Integrando a relação (15) em Ye utilizando argumentos de periodicidade, concluímos que

$$\int_Y \mathrm{div}_{\underset{\sim}{\hat{y}}}\left[\underset{\approx}{A}\nabla_{\underset{\sim}{\hat{x}}} u_{2D}^1 + \underset{\approx}{A}\nabla_{\underset{\sim}{\hat{y}}} u_{2D}^2\right] d\hat{y}_1 d\hat{y}_2 = 0.$$

Então

$$-\int_Y \mathrm{div}_{\underset{\sim}{\hat{x}}}\left[\underset{\approx}{A}\nabla_{\underset{\sim}{\hat{x}}}\overline{u}_{2D} + \underset{\approx}{A}\nabla_{\underset{\sim}{\hat{y}}} u_{2D}^1\right] d\underset{\sim}{\hat{y}} = \int_{-1}^{1} f d\hat{x}_3. \tag{16}$$

Consideramos

$$u^1_{2D}(\underset{\sim}{\hat{x}}, \underset{\sim}{\hat{y}}) = \sum_{\beta=1}^{2} \chi_\beta(\underset{\sim}{\hat{y}}) \frac{\partial \overline{u}_{2D}}{\partial \hat{x}_\beta}, \tag{17}$$

onde as funções χ_β para $\beta = 1, 2$ são soluções para os problemas de cela (3). É fácil ver que (17) satisfaz (14), donde concluímos que o problema homogeneizado é dado por (2).

3 O limite $\epsilon \to 0$ e depois $\delta \to 0$

Nesta seção apresentamos o estudo do problema (1) tomando-se primeiramente o limite quando $\epsilon \to 0$ e depois quando $\delta \to 0$. Utilizamos a técnica de se tomar a expansão assintótica em ϵ da função $u^{\epsilon\delta}_{3D}$ para encontrar o problema limite quando $\epsilon \to 0$. A seguir, consideramos o problema homogeneizado tridimensional para aplicarmos a redução de dimensão, donde encontramos o problema bidimensional homogeneizado quando $\delta \to 0$.

3.1 Homogeneização

Com o objetivo de encontrar o limite assintótico quando $\epsilon \to 0$, utilizamos a expansão assintótica para $u^{\delta\epsilon}_{3D}$. O processo para encontrar o problema limite homogeneizado é idêntico ao realizado na seção 2. O problema homogeneizado, ainda tridimensional, é

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_{\underline{x}} \left[\underline{\underline{\overline{A}}} \nabla_{\underline{x}} \overline{u}^\delta_{3D} \right] = f^\delta \qquad & \text{em } P^\delta, \\ \overline{u}^\delta_{3D} = 0 \qquad & \text{em } \partial P^\delta_L, \\ \left(\underline{\underline{\overline{A}}} \nabla_{\underline{x}} \overline{u}^\delta_{3D} \right) \cdot \underline{n} = 0 \qquad & \text{em } \partial P^\delta_\pm, \end{aligned} \tag{18}$$

onde os elementos da matriz $\underline{\underline{\overline{A}}}$ são dados por (5).

3.2 Redução de dimensão

Com o objetivo de reduzir a dimensão do problema (18), aplicamos as mesmas técnicas apresentadas na seção 2, utilizando o método assintótico em δ. O problema limite bidimensional ao final do processo é dado por (4).

4 Modelagem hierárquica

Nesta seção apresentamos uma técnica de redução de dimensão alternativa, conhecida como modelagem hierárquica. Esta técnica consiste em se obter modelos considerando-se sempre funções com dependência polinomial na variável x_3. Encontrando o modelo bidimensional através desta técnica, tomamos os limites assintóticos da seguinte forma: primeiramente, $\delta \to 0$ e após $\epsilon \to 0$ e a seguir, $\epsilon \to 0$ e depois $\delta \to 0$, obtendo-se os mesmos modelos descritos nas seções 2 e 3.

4.1 Modelo hierárquico de ordem um

Consideremos o problema modelo tridimensional original (1) e o espaço $V(P^\delta)$ da seguinte forma

$$V(P^\delta) = \{v \in H^1(P^\delta) : v = 0 \text{ em } \partial P^\delta_L\}.$$

Os modelos hierárquicos são obtidos considerando-se subespaços de $V(P^\delta)$ com dependência polinomial na variável x_3. Desta forma, temos

$$V_1(P^\delta) = \{v \in V(P^\delta) : v(\underset{\sim}{x}, x_3) = v_0(\underset{\sim}{x}) + v_1(\underset{\sim}{x}) x_3\},$$

um subespaço de $V(P^\delta)$ cujas funções possuem dependência linear na variável x_3. As funções v_0 e v_1 pertencem ao espaço $H_0^1(\Omega)$.
A formulação variacional do problema (1) pode ser dada por

$$\int_{P^\delta} \underline{\underline{a}}^\epsilon \underline{\nabla} u_{3D}^{\delta\epsilon} \underline{\nabla} v d\underline{x} = \int_{P^\delta} f^\delta v d\underline{x}, \qquad \text{para todo } v \in V(P^\delta).$$

Como $V_1(P^\delta) \subset V(P^\delta)$, definimos $\tilde{u}_{3D}^{\delta\epsilon} \in V_1(P^\delta)$ da forma

$$\int_{P^\delta} \underline{\underline{a}}^\epsilon \underline{\nabla} \tilde{u}_{3D}^{\delta\epsilon} \underline{\nabla} \tilde{v} d\underline{x} = \int_{P^\delta} f^\delta \tilde{v} d\underline{x} \qquad \text{para todo } \tilde{v} \in V_1(P^\delta). \tag{19}$$

Desta forma, podemos escrever

$$\tilde{u}_{3D}^{\delta\epsilon}(\underline{x}) = w_0^\epsilon(\underset{\sim}{x}) + w_1^\epsilon(\underset{\sim}{x}) x_3,$$

e, de maneira análoga,

$$\tilde{v}(\underline{x}) = v_0(\underset{\sim}{x}) + v_1(\underset{\sim}{x}) x_3.$$

A partir destas definições, concluímos que a formulação variacional (19) pode ser dada da seguinte forma

$$\int_{P^\delta} \left[\underline{\underline{a}}^\epsilon \nabla_{\underline{x}} w_0^\epsilon + \underline{\underline{a}}^\epsilon \nabla_{\underline{x}} (w_1^\epsilon x_3) \right] \nabla_{\underline{x}} v_0 d\underline{x} = \int_{P^\delta} f^\delta v_0 d\underline{x} \tag{20}$$

e

$$\int_{P^\delta} \left[\underline{\underline{a}}^\epsilon \nabla_{\underline{x}} w_0^\epsilon + \underline{\underline{a}}^\epsilon \nabla_{\underline{x}} (w_1^\epsilon x_3) \right] \nabla_{\underline{x}} (v_1 x_3) \, d\underline{x} = \int_{P^\delta} f^\delta v_1 x_3 d\underline{x}. \tag{21}$$

Desenvolvendo os problemas (20) e (21), aplicando integração por partes e a mudança de variáveis (7), concluímos que precisamos encontrar $w_0^\epsilon \in H_0^1(\Omega)$ e $w_1^\epsilon \in H_0^1(\Omega)$ tais que

$$\begin{aligned} -2 \operatorname{div}_{\underset{\sim}{\hat{x}}} \left[\underset{\approx}{a}^\epsilon \nabla_{\underset{\sim}{\hat{x}}} w_0^\epsilon + \underset{\sim}{a}^\epsilon w_1^\epsilon \right] &= \int_{-1}^{1} f d\hat{x}_3 && \text{em } \Omega, \\ -\frac{2\delta^2}{3} \operatorname{div}_{\underset{\sim}{\hat{x}}} \left[\underset{\approx}{a}^\epsilon \nabla_{\underset{\sim}{\hat{x}}} w_1^\epsilon \right] + 2 \underset{\sim}{a}^{\epsilon T} \nabla_{\underset{\sim}{\hat{x}}} w_0^\epsilon + 2 a_{33}^\epsilon w_1^\epsilon &= \delta \int_{-1}^{1} f \hat{x}_3 d\hat{x}_3 && \text{em } \Omega, \\ w_0^\epsilon = w_1^\epsilon &= 0 && \text{em } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{22}$$

A seguir, tomamos o limite quando $\delta \to 0$ em (22) obtendo

$$\begin{aligned} -2 \operatorname{div}_{\underset{\sim}{\hat{x}}} \left[\underset{\approx}{a}^\epsilon \nabla_{\underset{\sim}{\hat{x}}} w_0^\epsilon + \underset{\sim}{a}^\epsilon w_1^\epsilon \right] &= \int_{-1}^{1} f d\hat{x}_3 && \text{em } \Omega, \\ 2 \underset{\sim}{a}^{\epsilon T} \nabla_{\underset{\sim}{\hat{x}}} w_0^\epsilon + 2 a_{33}^\epsilon w_1^\epsilon &= 0 && \text{em } \Omega, \\ w_0^\epsilon = w_1^\epsilon &= 0 && \text{em } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{23}$$

Podemos concluir que

$$w_1^\epsilon = -\frac{1}{a_{33}^\epsilon} \underset{\sim}{a}^{\epsilon T} \nabla_{\underset{\sim}{\hat{x}}} w_0^\epsilon. \tag{24}$$

Substituindo (24) em (23), obtemos o problema (12), encontrado na seção 2. Tomando o limite assintótico quando $\epsilon \to 0$ encontramos, então o problema (2).
Considerando o limite assintótico quando $\epsilon \to 0$ no problema (22), aplicamos as técnicas de homogeneização já descritas anteriormente, considerando expansões assintóticas para as funções w_0^ϵ e para w_1^ϵ

$$\begin{aligned} w_0^\epsilon &\sim w_0^0 + \epsilon w_0^1 + \epsilon^2 w_0^2 + \dots \\ w_1^\epsilon &\sim w_1^0 + \epsilon w_1^1 + \epsilon^2 w_1^2 + \dots, \end{aligned}$$

encontrando o problema

$$
\begin{aligned}
-2\,\mathrm{div}_{\underset{\sim}{\hat{x}}}\left[\underset{\approx}{\overline{A}}\nabla_{\underset{\sim}{\hat{x}}}\overline{w}_0\right]-2\,\mathrm{div}_{\underset{\sim}{\hat{x}}}\left[\underset{\sim}{\overline{A}}\overline{w}_1\right]&=\int_{-1}^{1}f d\hat{x}_3,\\
-\frac{2\delta^2}{3}\,\mathrm{div}_{\underset{\sim}{\hat{x}}}\left[\underset{\approx}{\overline{A}}\nabla_{\underset{\sim}{\hat{x}}}\overline{w}_1\right]+2\underset{\sim}{\overline{A}}^T\nabla_{\underset{\sim}{\hat{x}}}\overline{w}_0+2\overline{A}_{33}\overline{w}_1&=\delta\int_{-1}^{1}f\hat{x}_3 d\hat{x}_3,
\end{aligned}
\tag{25}
$$

onde os coeficientes da matriz $\underset{=}{\overline{A}}$ são dados por (5).
Tomando o limite quando $\delta \to 0$ em (25), obtemos

$$
2\underset{\sim}{\overline{A}}^T\nabla_{\underset{\sim}{\hat{x}}}\overline{w}_0+2\overline{A}_{33}\overline{w}_1=0,
$$

donde

$$
\overline{w}_1=-\frac{1}{\overline{A}_{33}}\underset{\sim}{\overline{A}}^T\nabla_{\underset{\sim}{\hat{x}}}\overline{w}_0. \tag{26}
$$

Substituindo (26) em (25), encontramos o problema (4).
Introduzimos o operador

$$
\begin{aligned}
H : V(P^\delta) &\to V_1(P^\delta)\\
v &\to v = w_0(\underset{\sim}{x}) + w_1(\underset{\sim}{x})x_3
\end{aligned}
$$

onde $V_1(P^\delta) = \{v \in V(P^\delta) | v$ é linear na direção transversa$\}$ e as funções w_0 e $w_1 \in H_0^1(\Omega)$. Este operador denota a redução de dimensão via modelagem hierárquica. Através de resultados rigorosos demonstramos a equivalência

$$
\begin{aligned}
\lim_{\delta\to 0}\lim_{\epsilon\to 0} u_{3D}^{\delta\epsilon} &= \lim_{\delta\to 0}\lim_{\epsilon\to 0} H(u_{3D}^{\delta\epsilon})\\
\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0} u_{3D}^{\delta\epsilon} &= \lim_{\epsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0} H(u_{3D}^{\delta\epsilon}),
\end{aligned}
\tag{27}
$$

já demonstrada de maneira formal anteriormente. Isto significa que, se tomarmos os limites quando $\epsilon \to 0$ e depois $\delta \to 0$ utilizando método assintótico como técnica de redução de dimensão é equivalente a tomarmos os dois limites utilizando modelagem hierárquica como técnica de redução de dimensão. O mesmo ocorre quando tomamos o limite quando $\delta \to 0$ e depois $\epsilon \to 0$.

5 Conclusões

Nas seções anteriores, utilizamos métodos assintóticos para encontrar os problemas limite quando os parâmetros δ e ϵ tendem a zero. Verificamos que os limites assintóticos não comutam, ou seja, se tomarmos o limite $\epsilon \to 0$ e depois $\delta \to 0$ encontramos um problema limite diferente do problema limite encontrado para o caso $\delta \to 0$ e depois $\epsilon \to 0$.
Em seguida aplicamos a técnica de redução de dimensão denominada modelagem hierárquica, que consiste em considerar soluções em um subespaço do espaço de soluções original, constituído por funções com dependência polinomial na variável x_3. Após a utilização desta técnica encontramos os mesmos problemas limite encontrados via métodos assintóticos.

Referências

[1] S. M. Alessandrini, D. N. Arnold, R. S. Falk and A. L. Madureira, Derivation and Justification of Plate Models by Variational Methods, *CRM Proceedings and Lecture Notes, American Mathematical Society* (1999) 1-20.

[2] D. Caillerie, Homogénéisation des équations de la diffusion stationnaire dans les domaines cylindriques aplatis, *R.A.I.R.O. Analyse númerique/Numerical Analysis*, 15 (1981) 295-319.

[3] D. Cioranescu and P. Donato, "An Introduction to Homogenization", Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 1999.