Métodos Numéricos para EDPs com Múltiplas Escalas

Alexandre L. Madureira

Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC)

62^0 Seminário Brasileiro de Análise

Rio de Janeiro, 25 e 26 de novembro de 2005

Plano das aulas (geral):

- AULA I

  Introdução: um modelo

  Solução homogeneizada

  Aproximação por Elementos Finitos Clássicos

- AULA II

  Elementos Finitos Multiescala

- AULA III

  Outros Métodos

  Conclusões

Aula I

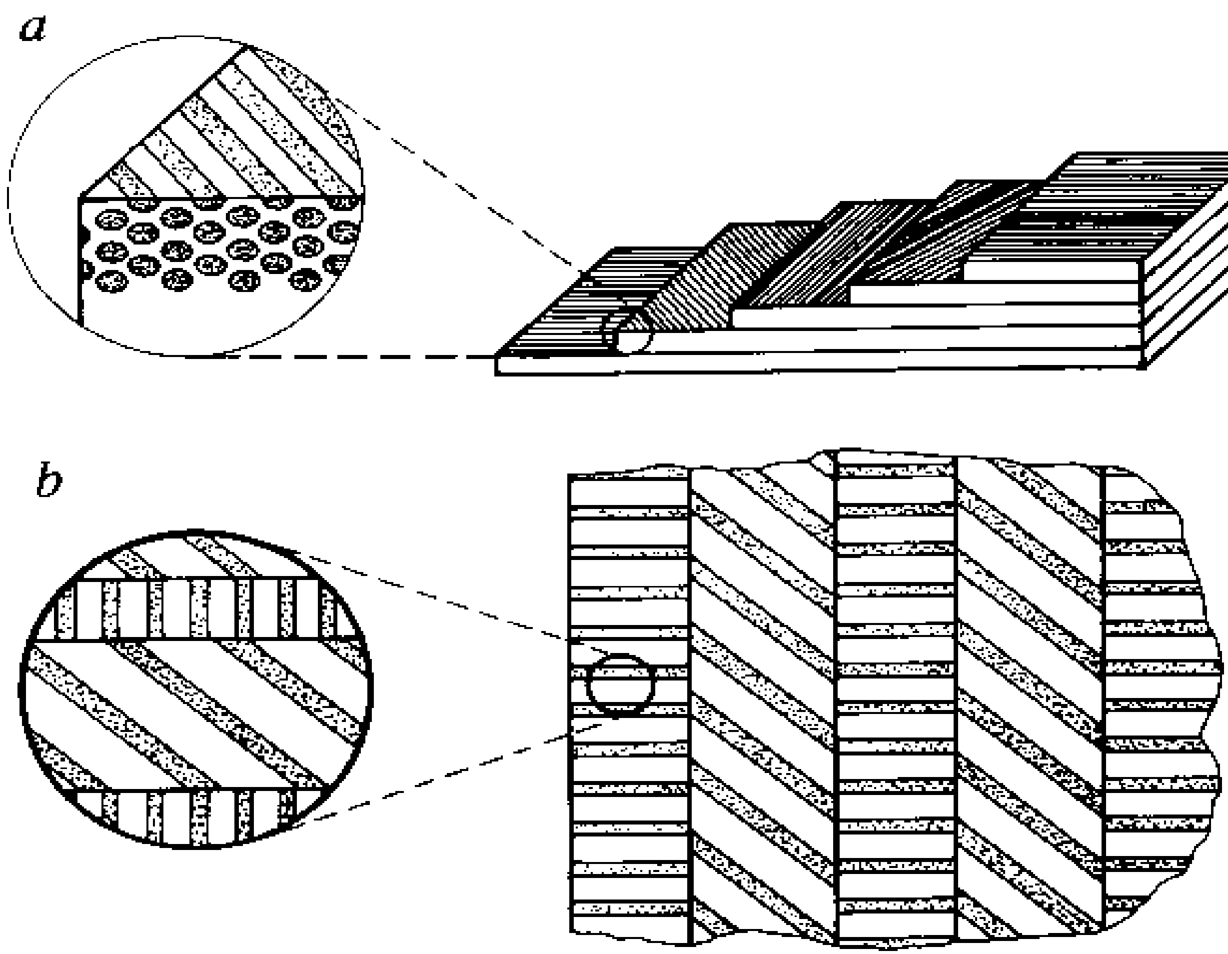
Descrição: Nesta aula, após motivar o estudo de problemas com múltiplas escalas, apresentamos a equação com coeficientes oscilatórios que consideraremos. Discutiremos algumas propriedades do problema modelo, e de suas aproximações via homogeneização e elementos finitos clássicos.

Motivação

Por que estudar problemas com múltilas escalas:

- Inúmeras aplicações.
- Grande e interessante desafio do ponto de vista matemático e numérico.
- Recentemente, com o aumento da capacidade computacional e com a necessidade de modelagem de novos materias e sistemas complexo, a área vem recebendo redobrada atenção, i.e., recursos.

Material compósito como exemplo de aplicação, (Roderic Lakes):



- Em a temos cada lâmina com fibras dispostas com diferentes orientações, resultando numa determinada *anisotropia*.
- No material b, cada lâmina contém um sub-laminado, representando um material altamente heterogêneo.
- A modelagem “exata” de laminados como os acima descritos é não trivial, pois o comportamento de cada uma das fibras e sub-laminados teria que ser levado em conta.
- Na prática, toma-se o comportamento “macrocópico” ou “homogeneizado” do material, usando a microestrutura para formular uma equação homogeneizada que pode ser resolvida.

Outra área onde técnicas de homogeneização são utilizadas é em escoamentos em meios porosos, em particular para simular poluição de aquíferos, extração de petróleo, contaminação por dejetos radiotivos, etc. Ver o artigo [A.L.G.A. Coutinho, C.M. Dias, J.L.D. Alves, A.F.D. Loula, S.M.C. Malta, L. Landau, R.S. de Castro, E.L.M. Garcia 2004], e as referências nele contidas.

Introdução: um modelo

Considere o problema parametrizado por $\varepsilon \leq 1$:

$$-\frac{d}{dx}\left(a(x/\varepsilon)\frac{du^\varepsilon}{dx}(x)\right) = f(x) \quad \text{em } (0,1),$$

$$u^\varepsilon(0) = u^\varepsilon(1) = 0.$$

onde

- $a(\cdot)$ é suave e periódica com período 1.
- existem α, β tais que $\beta \geq \|a\|_{W^{1,\infty}(0,1)} \geq \alpha > 0$
- f é suave

Introdução: um modelo

A solução analítica é dada por

$$u^\varepsilon(x) = \int_0^x \frac{-1}{a(s/\varepsilon)} \left(\int_0^s f(t)\,dt + c_0 \right) ds,$$

$$c_0 = \frac{1}{\int_0^1 a(s/\varepsilon)\,ds} \int_0^1 \left(\frac{1}{a(s/\varepsilon)} \int_0^s f(t)\,dt \right) ds.$$

Consideraremos

$$f(x) = 1, \quad a(x) = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(1 + \sin(2\pi x)) + \alpha, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{5}{2}.$$

A seguir tomaremos $\varepsilon = 1/4$, $\varepsilon = 1/8$, e $\varepsilon = 1/16$.

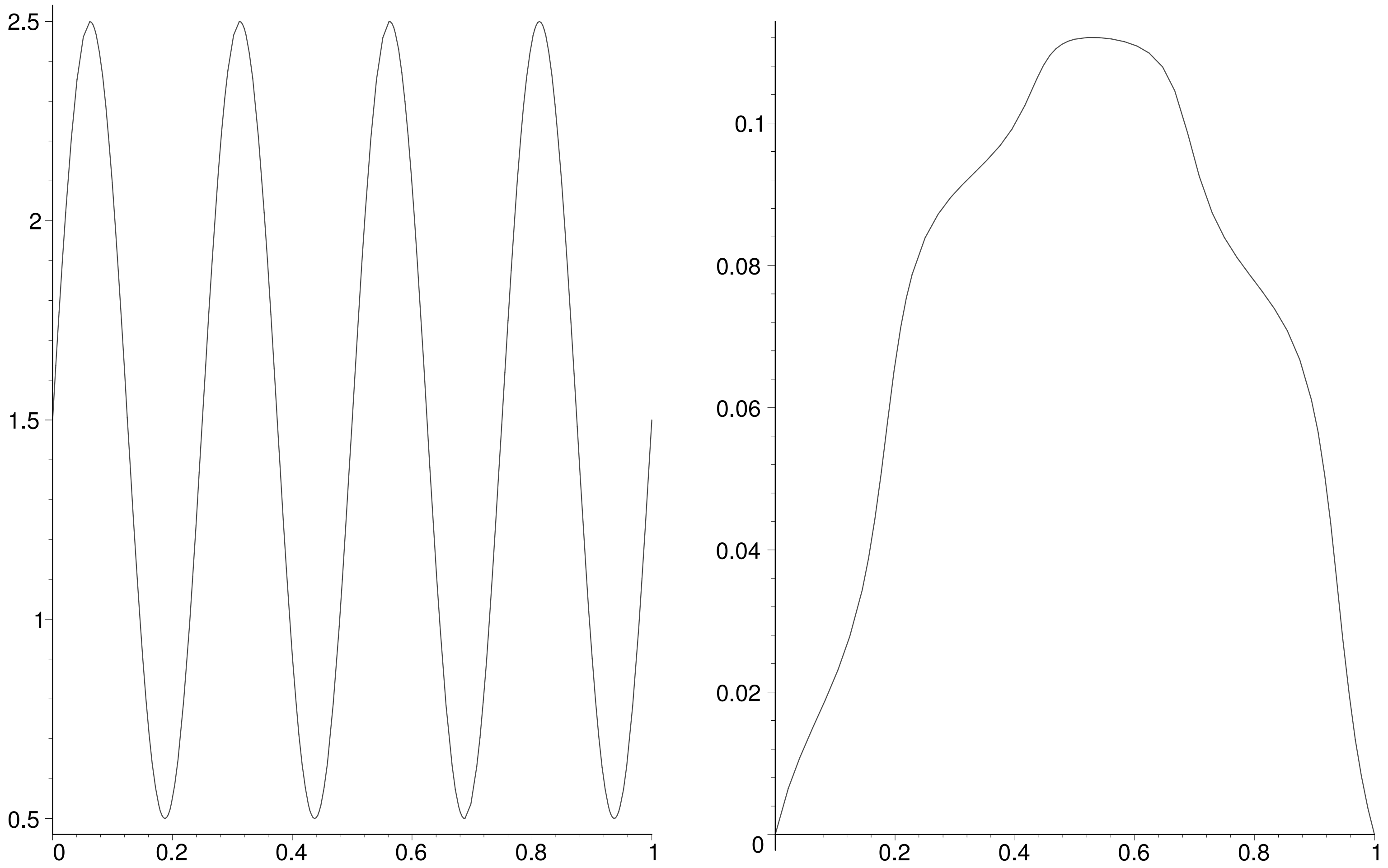


Fig. 1: Gráficos de $a(\cdot/\varepsilon)$ e da solução exata para $\varepsilon = 1/4$.

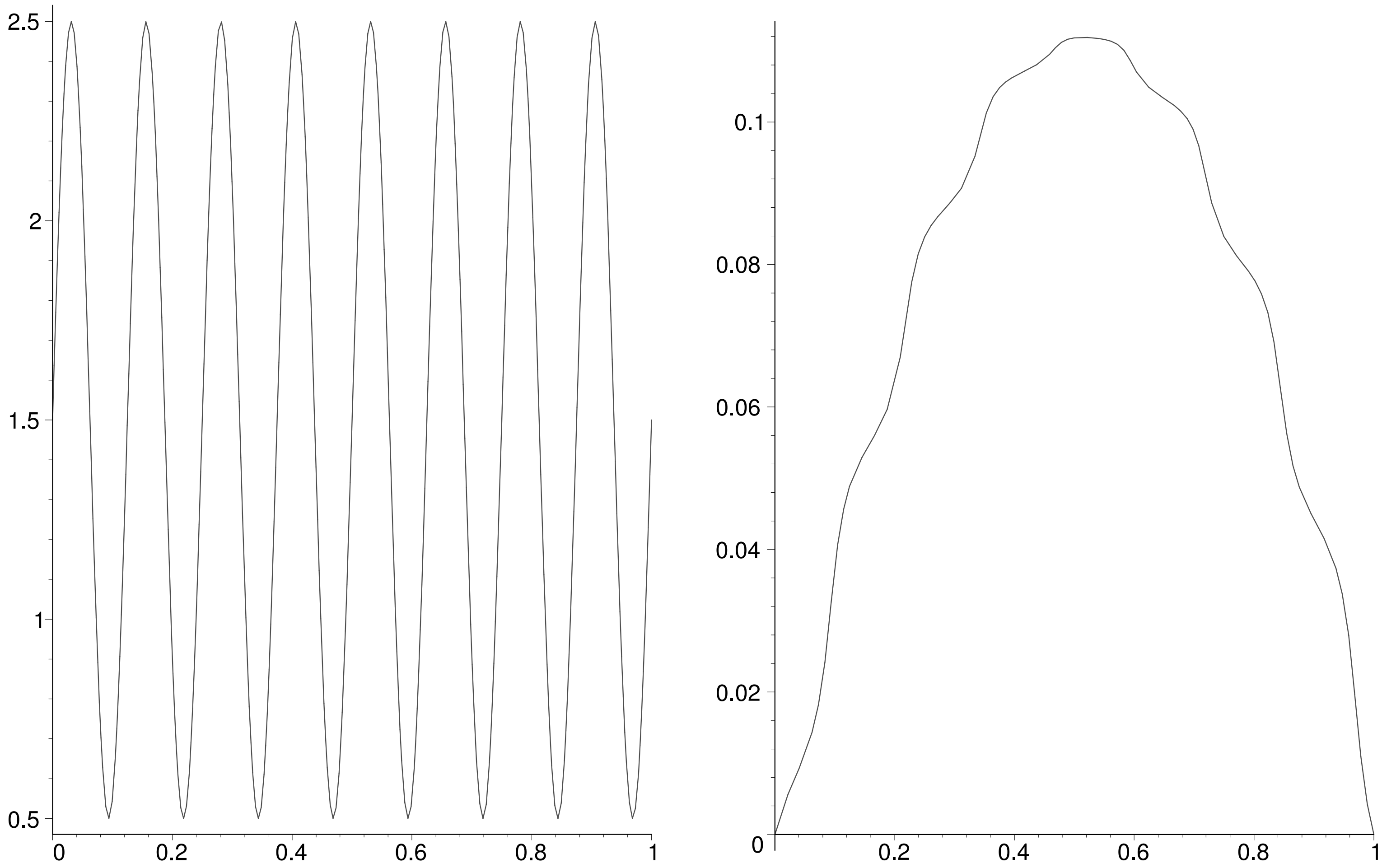


Fig. 2: Gráficos de $a(\cdot/\varepsilon)$ e da solução exata para $\varepsilon = 1/8$.

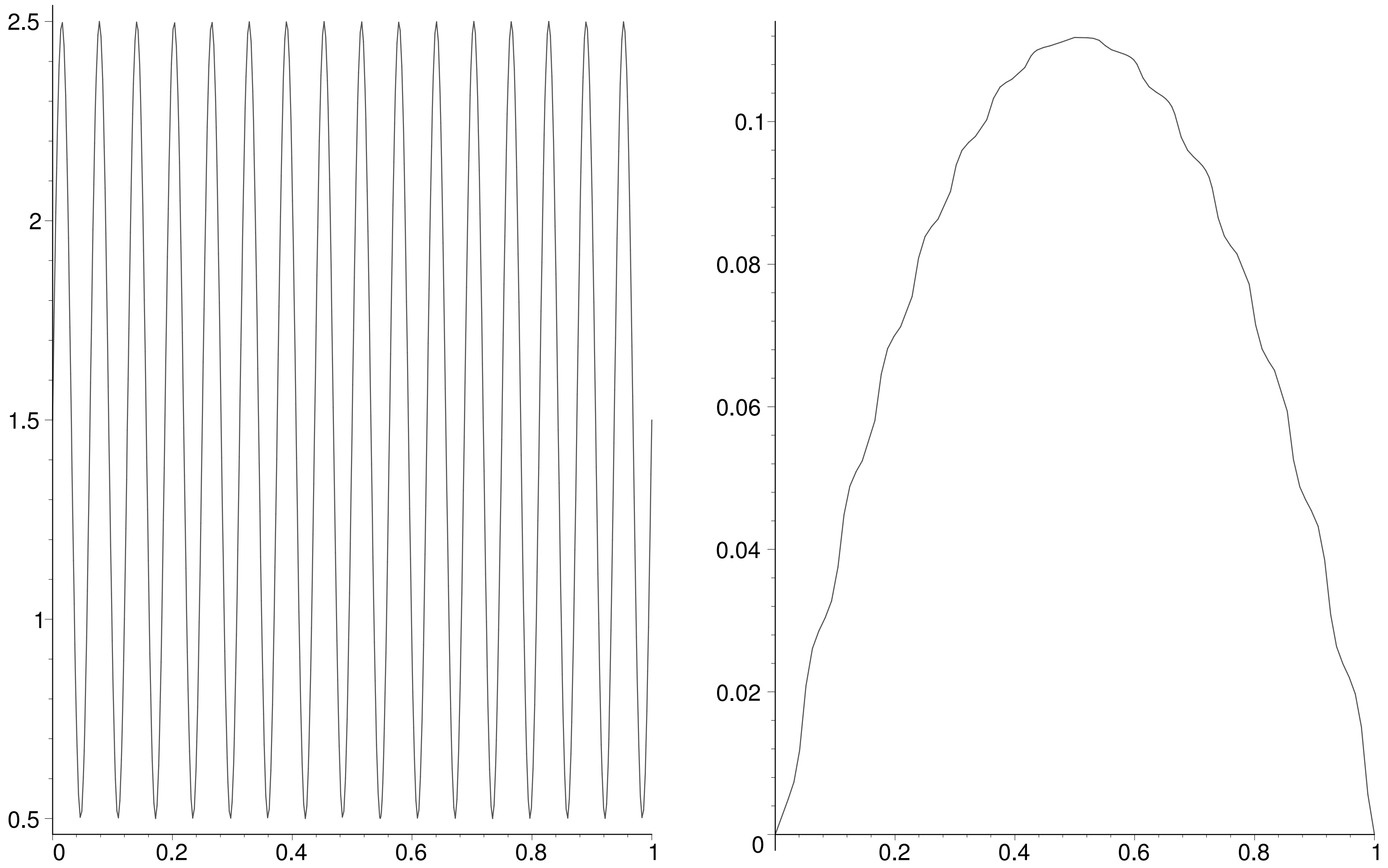


Fig. 3: Gráficos de $a(\cdot/\varepsilon)$ e da solução exata para $\varepsilon = 1/16$.

Introdução: um modelo

Algumas observações:

- É fácil notar nestes exemplos que quando $\varepsilon \to 0$, a função $a(\cdot/\varepsilon)$, e portanto u^ε, oscilam com maior frequência.
- Quando $\varepsilon \to 0$, a solução u^ε converge para a *solução homogeneizada*.
- Em dimensões maiores, apenas em casos particulares é possível obter soluções analíticas. Deve-se então buscar métodos que permitam o cálculo de soluções aproximadas.

Lembre-se que u^ε é solução de

$$-\frac{d}{dx}\left(a(x/\varepsilon)\frac{du^\varepsilon}{dx}(x)\right) = f(x) \quad \text{em } (0,1),$$
$$u^\varepsilon(0) = u^\varepsilon(1) = 0.$$

É possível mostrar que u^ε converge para u^0, onde

$$-\frac{1}{\mathcal{M}(1/a)}\frac{d^2}{dx^2}u^0 = f(x) \quad \text{em } (0,1),$$
$$u^0(0) = u^0(1) = 0,$$

e $\mathcal{M}(1/a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{a(x)}\,dx$. Portanto:

$$u^0(x) = \mathcal{M}(1/a)\left[-\int_0^x \int_0^\xi f(t)\,dt\,d\xi + x\int_0^1 \int_0^\xi f(t)\,dt\,d\xi\right].$$

Solução homogeneizada

O seguinte resultado de convergência justifica o uso da solução homogeneizada [Moskow e Vogelius, 1997].

Teorema. *Seja $f \in L^2(0,1)$. Então existe uma constante c independente de ε e f tal que*

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{L^2(0,1)} \leq c\varepsilon\|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Comparamos agora como a solução homogeneizada se comporta.

Consideraremos a seguir a sequência de exemplos, para $\varepsilon = 1/4$, $\varepsilon = 1/8$, e $\varepsilon = 1/16$.

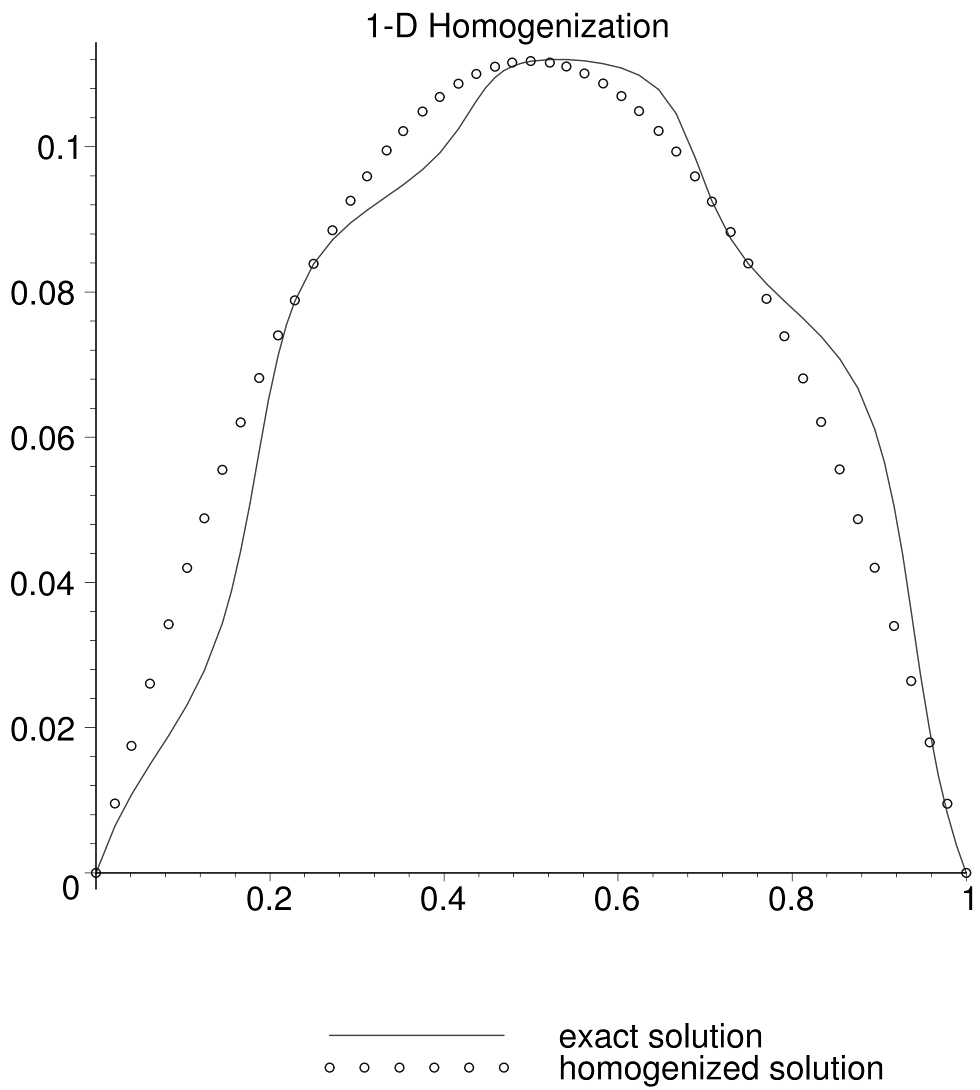


Fig. 4: Comparação entre as sols. exata e homogen. para $\varepsilon = 1/4$.

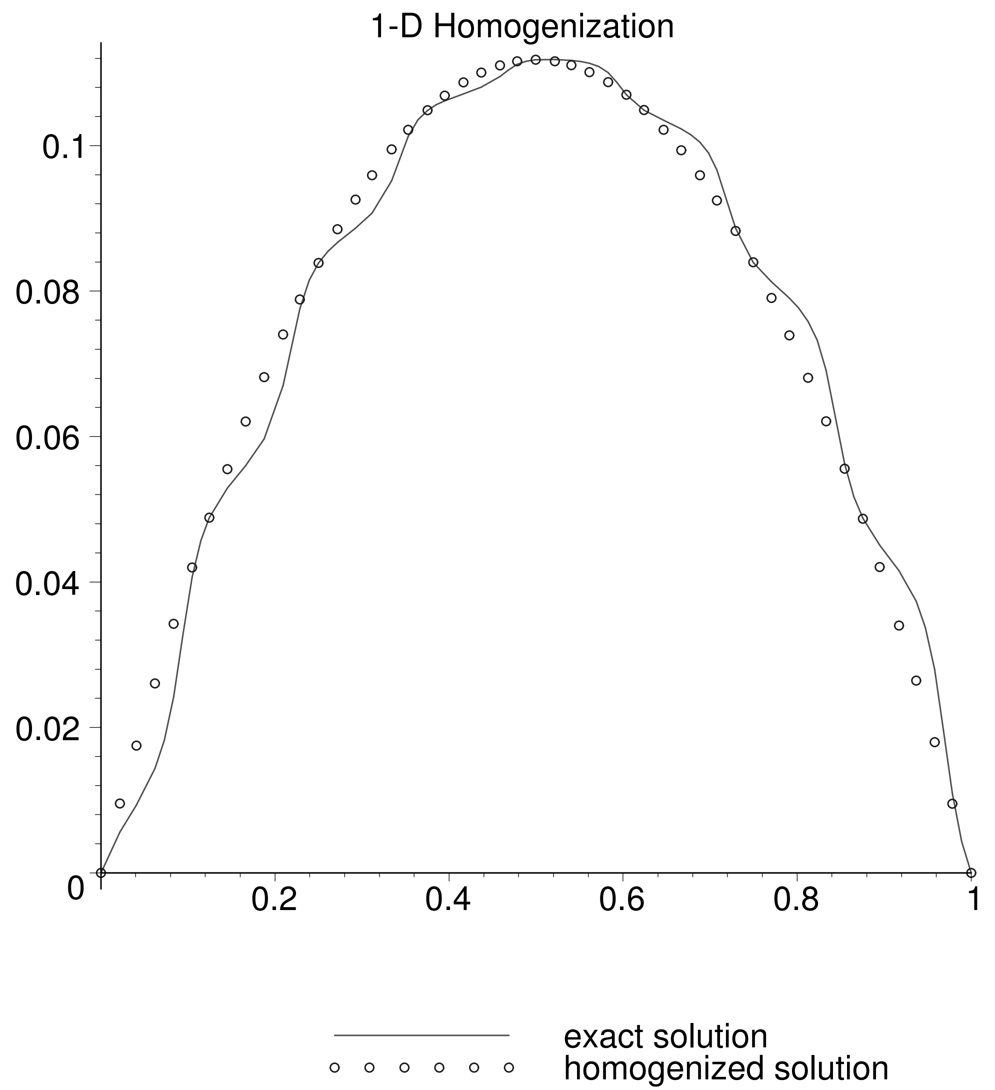


Fig. 5: Comparação entre as sols. exatas e homogen. para $\varepsilon = 1/8$.

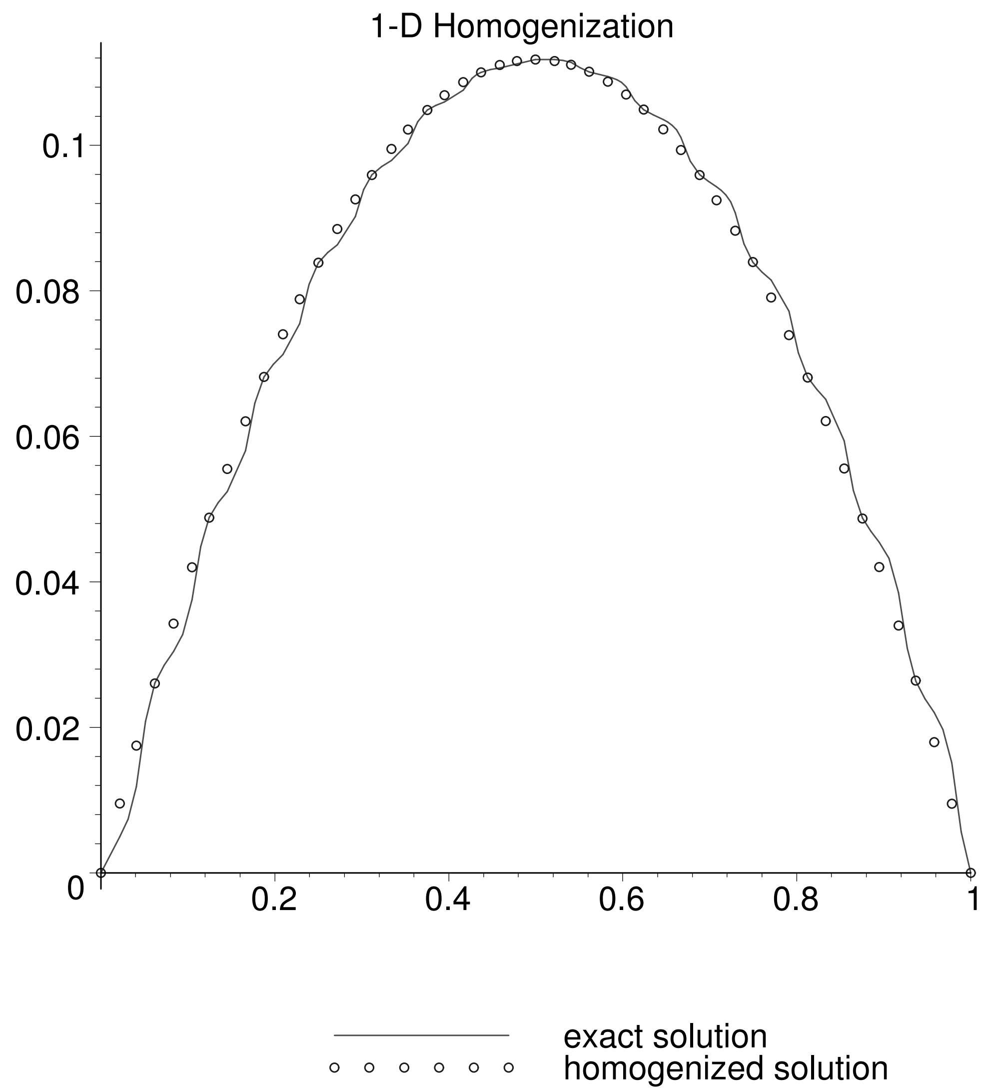


Fig. 6: Comparação entre as sols. exata e homogen. para $\varepsilon = 1/16$.

Solução homogeneizada

Pode-se notar que quando $\varepsilon \to 0$, a solução homogeneizada u^0 torna-se uma boa aproximação para a solução exata u^ε.

Apesar de serem úteis em várias aplicações, as técnicas de homogeneização apresentam algumas limitações. Por exemplo, sua aplicabilidade está limitada a valores de ε pequenos, como fica aparente nos exemplos anteriores. Outras dificuldades surgem em casos mais gerais, por exemplo quando $a(\cdot)$ é não periódico, e principalmente para operadores mais complicados.

Discretização por Elementos Finitos

Primeiro discretizamos o domínio $(0,1)$ definindo os nós $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N+1} = 1$, onde $h = \max_{0 \le j \le N} |x_{j+1} - x_j|$ é o parâmetro de malha. A seguir, definimos o espaço das funções lineares por partes $V_0^h \subset H_0^1(0,1)$, onde

$$V_0^h = \left\{ v^h \in H_0^1(0,1) \,:\, v^h \text{ é linear em } (x_{j-1}, x_j) \text{ for } j = 1, \ldots, N{+}1 \right\}.$$

A aproximação por elementos finitos de u^ε é dada por $u^h \in V_0^h$ onde

$$\int_0^1 a(x/\varepsilon) \frac{du^h}{dx}(x) \frac{dv^h}{dx}(x)\, dx = \int_0^1 f(x) v^h(x)\, dx \quad \text{para todo } v^h \in V_0^h$$

Discretização por Elementos Finitos

As aproximações numéricas apresentam resultados variados. Para $\varepsilon = 1/4$ e $h = 1/32$, o método de elementos finitos aproxima razoavelmente bem a solução exata, como mostra a figura 7. Entretanto, a aproximação se deteriora quando ε se torna menor. Veja os gráficos para $h = 1/32$, mas $\varepsilon = 1/8$ na figura 8, e $\varepsilon = 1/16$ na figura 9.

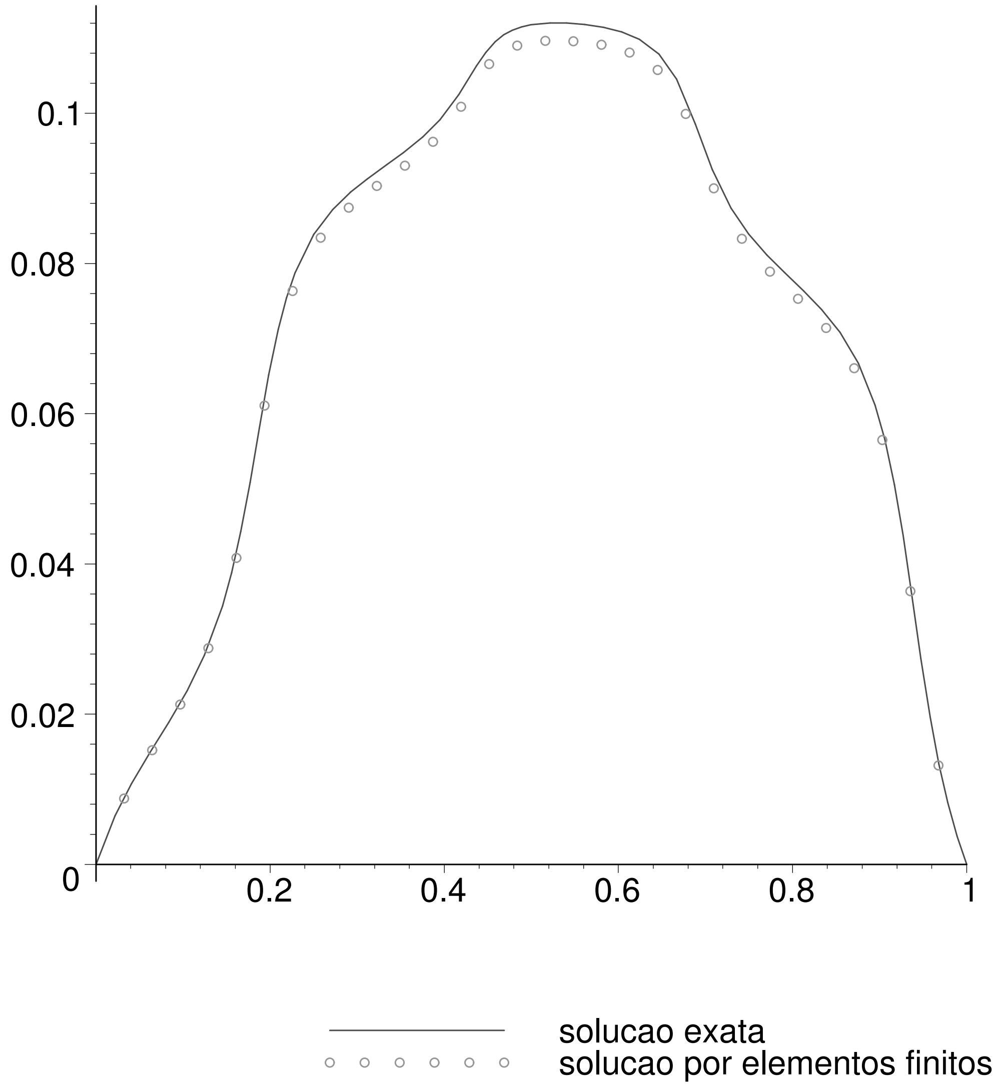


Fig. 7: u^{ε} e sua aproximação, com $\varepsilon = 1/4$ e $h = 1/32$.

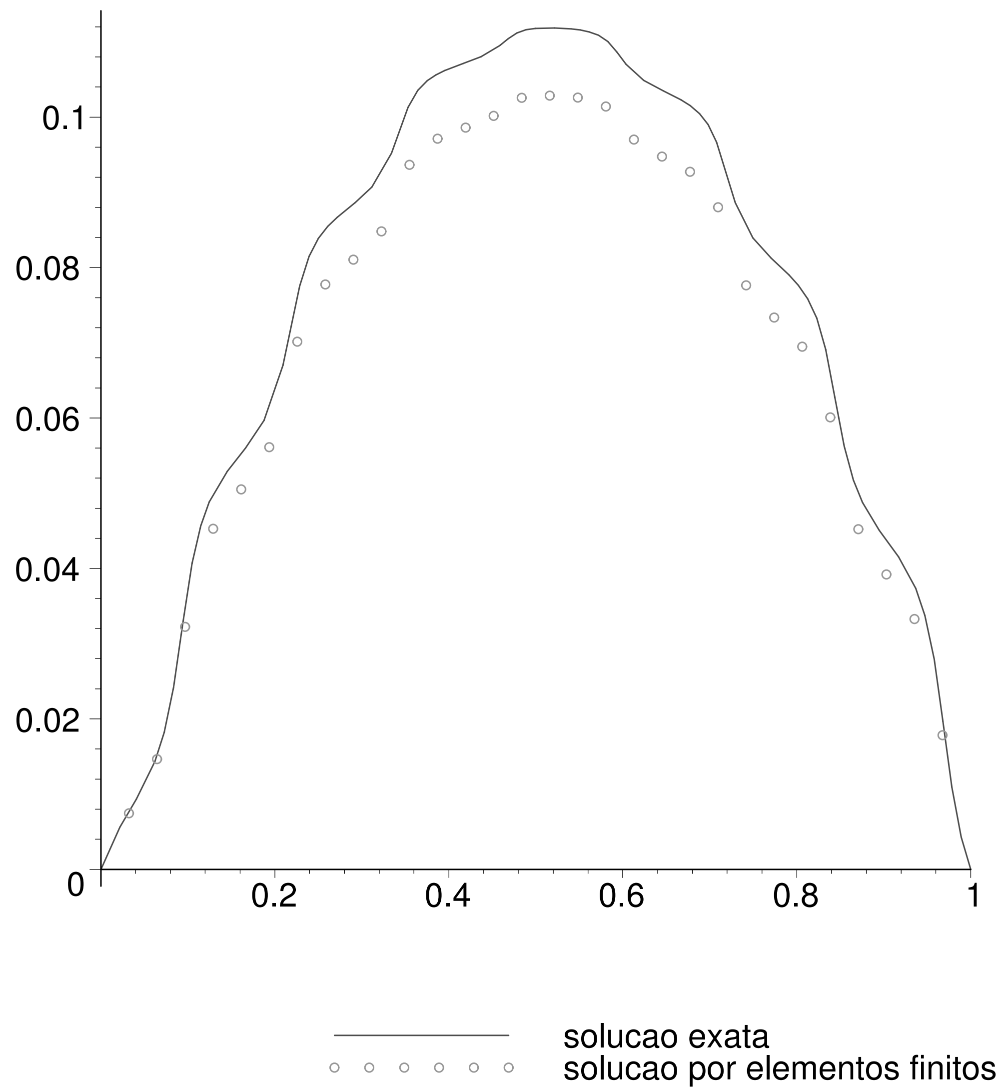


Fig. 8: u^ε e sua aproximação, com $\varepsilon = 1/8$ e $h = 1/32$.

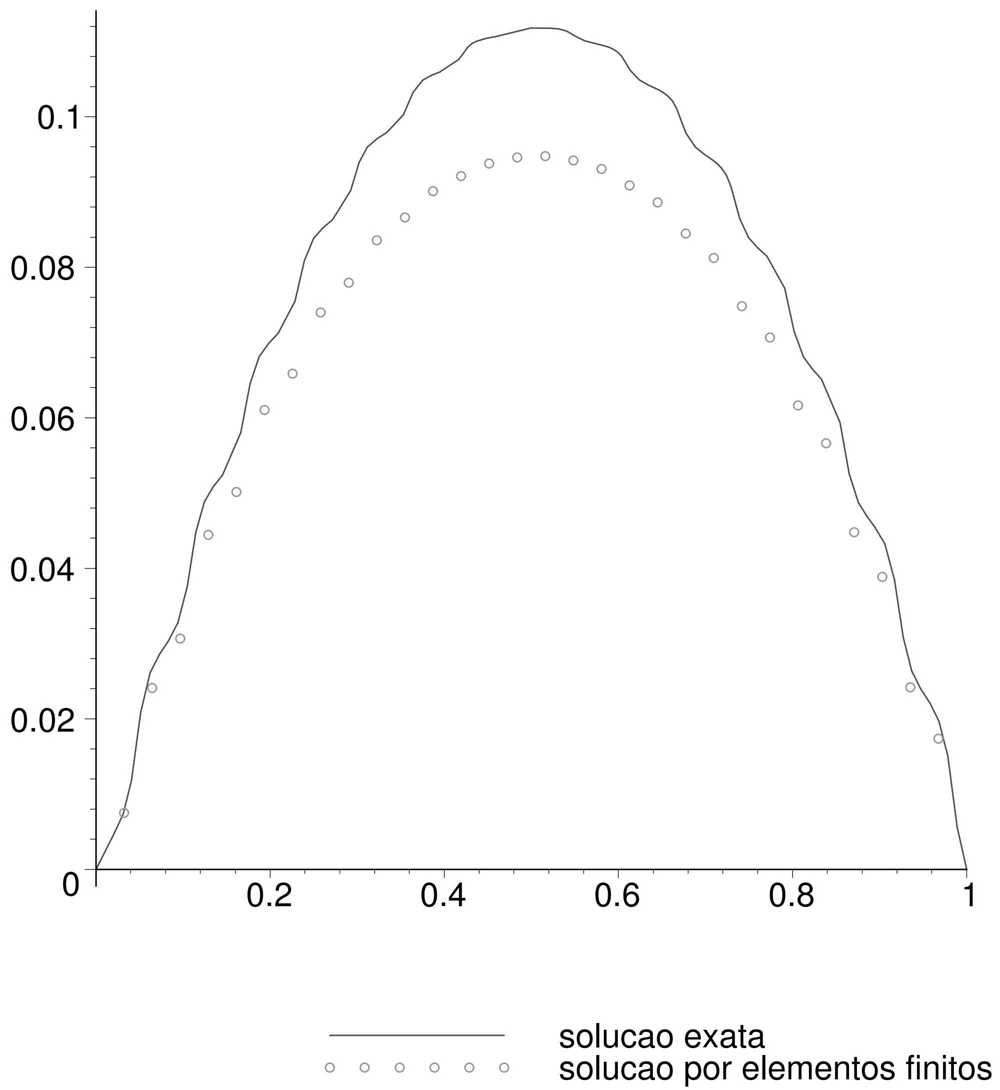


Fig. 9: u^{ε} e sua aproximação, com $\varepsilon = 1/16$ e $h = 1/32$.

Discretização por Elementos Finitos

A aproximação melhora se refinarmos a malha. Por exemplo, tomando o caso $\varepsilon = 1/8$, mas com $h = 1/64$, temos uma melhoria na aproximação, como mostra a figura 10.

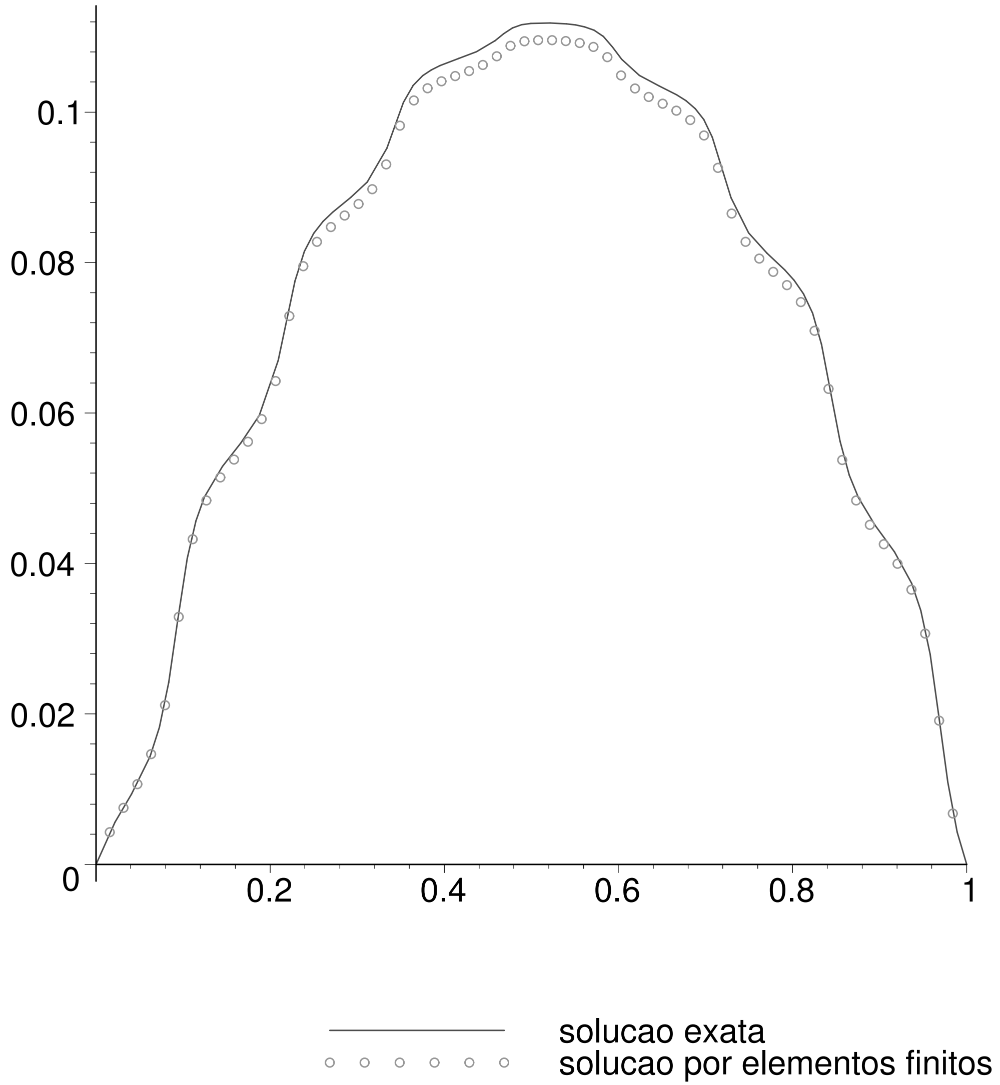


Fig. 10: u^{ε} e sua aproximação com $\varepsilon = 1/8$ e $h = 1/64$.

Discretização por Elementos Finitos

O ponto que queremos ressaltar é que o método de elementos finitos converge, mas *a taxa de convergência depende de* ε. Isto pode ser um problema em dimensões maiores, quando o uso de malhas refinadas torna-se caro computacionalmente.

Usando ontinuidade e coercividade:

$$\int_0^1 a(x/\varepsilon)\frac{du}{dx}(x)\frac{dv}{dx}(x)\,dx \leq \beta\|u\|_{H^1(0,1)}\|v\|_{H^1(0,1)}$$

$$\int_0^1 a(x/\varepsilon)\Big|\frac{dv}{dx}(x)\Big|^2\,dx \geq c\|v\|^2_{H^1(0,1)}$$

para todo $u, v \in H_0^1(0,1)$, temos $\|u^\varepsilon - u^h\|_{H^1(0,1)} \leq ch|u^\varepsilon|_{H^2(0,1)}$.

Obtemos finalmente o teorema a seguir usando a estimativa

$$|u^\varepsilon|_{H^2(0,1)} \leq \frac{c}{\varepsilon}\|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Teorema. *Seja $f \in L^2(0,1)$, e sejam u^ε e u^h soluções exata e por elementos finitos. Então existe uma constante c tal que*

$$\|u^\varepsilon - u^h\|_{H^1(0,1)} \leq c\frac{h}{\varepsilon}\|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Plano das aulas (geral):

- AULA I

  Introdução: um modelo

  Solução homogeneizada

  Aproximação por Elementos Finitos Clássicos

- AULA II

  Elementos Finitos Multiescala

- AULA III

  Outros Métodos

  Conclusões

Aula II

Elementos Finitos Multiescala

Descrição: Nesta aula, explicamos como *elementos finitos multiescala* são definidos. Ao invés de usar funções lineares por partes, a técnica de *elementos finitos multiescala* usa funções que resolvem localmente (em cada elemento) o operador em questão.

Analisamos aqui o caso unidimensional. Em quase todos os aspectos, incluindo a análise de erro, a extensão para duas dimensões é natural.

Introdução aos EFMs

Nós começamos a definir o método construindo as funções de base.

Seja ψ_i tal que

$$-\frac{d}{dx}\left(a(x/\varepsilon)\frac{d\psi_i}{dx}(x)\right) = 0 \quad \text{em } \cup_{j=1}^{N+1} (x_{j-1}, x_j),$$

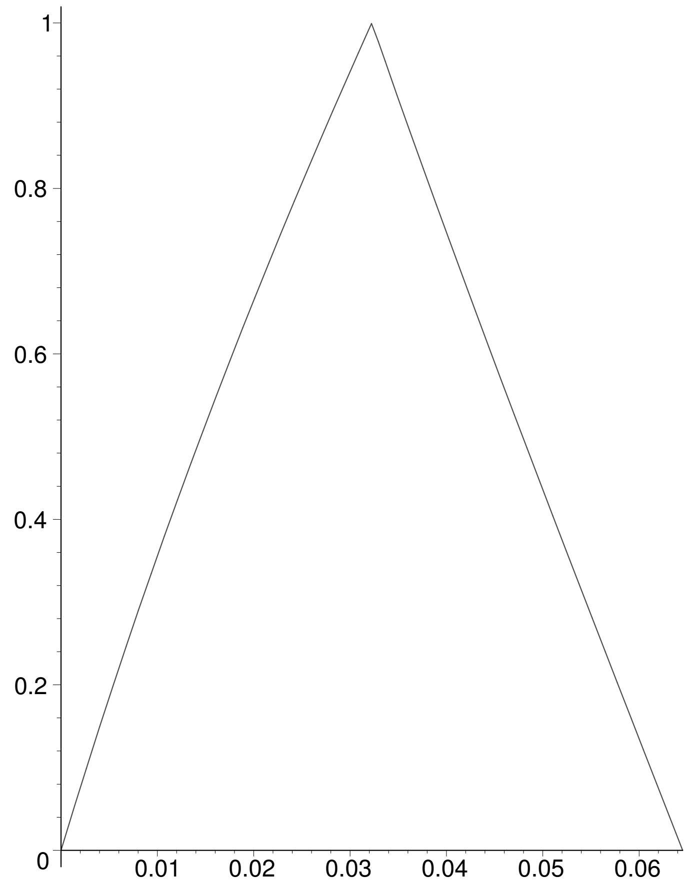
$$\psi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

para $i = 1, \ldots, N$.

Definimos o espaço de elementos finitos multiescala como sendo

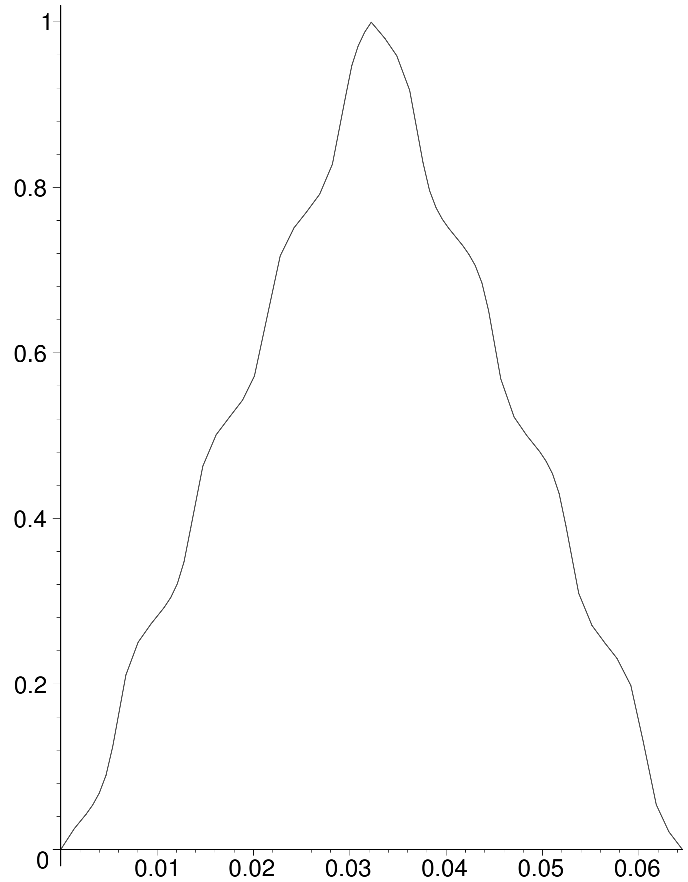
$$V_0^{h,\varepsilon} = \operatorname{span}\{\psi_1, \ldots, \psi_N\}.$$

Uma função de base multiescla para $\varepsilon = 1/4$ e $h = 1/32$:

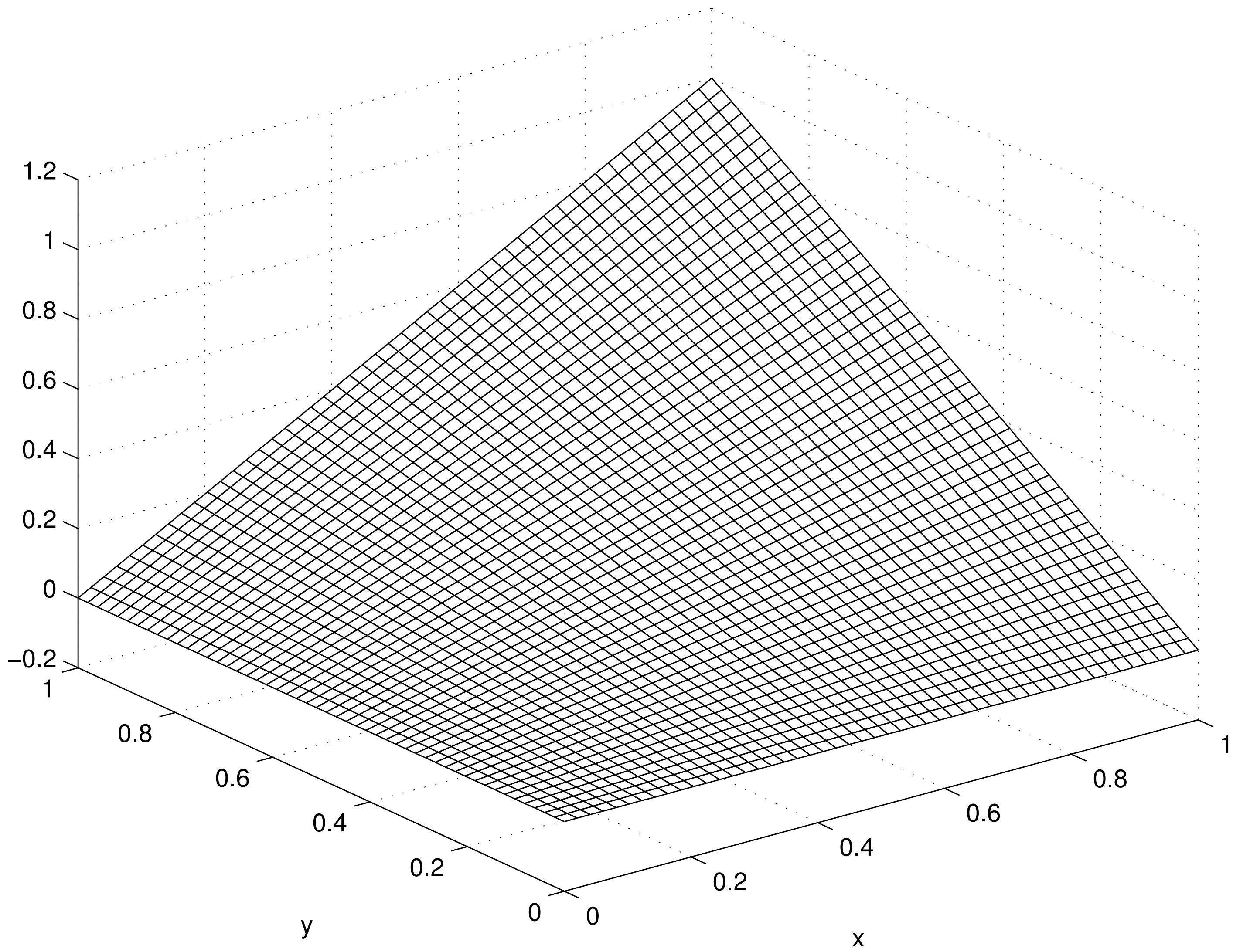


Parece-se muito com a função de base linear por partes. Neste caso, $h \ll \varepsilon$ e a função de base tradicional funciona bem.

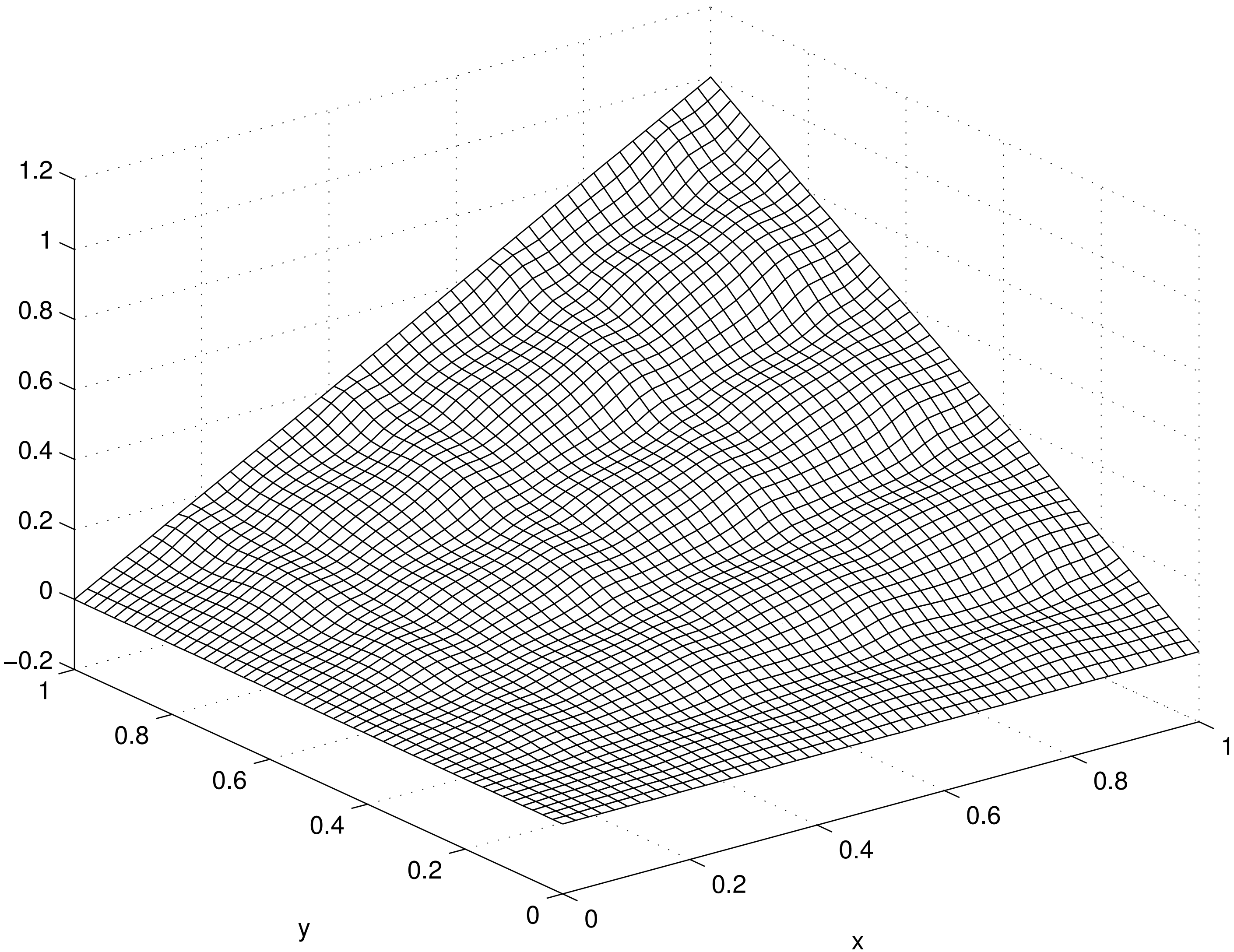
No caso oposto, quando $\varepsilon \ll h$, temos que a função de base tem caráter oscilatório, como é mostrado a seguir, para $\varepsilon = 1/128$ e $h = 1/32$.



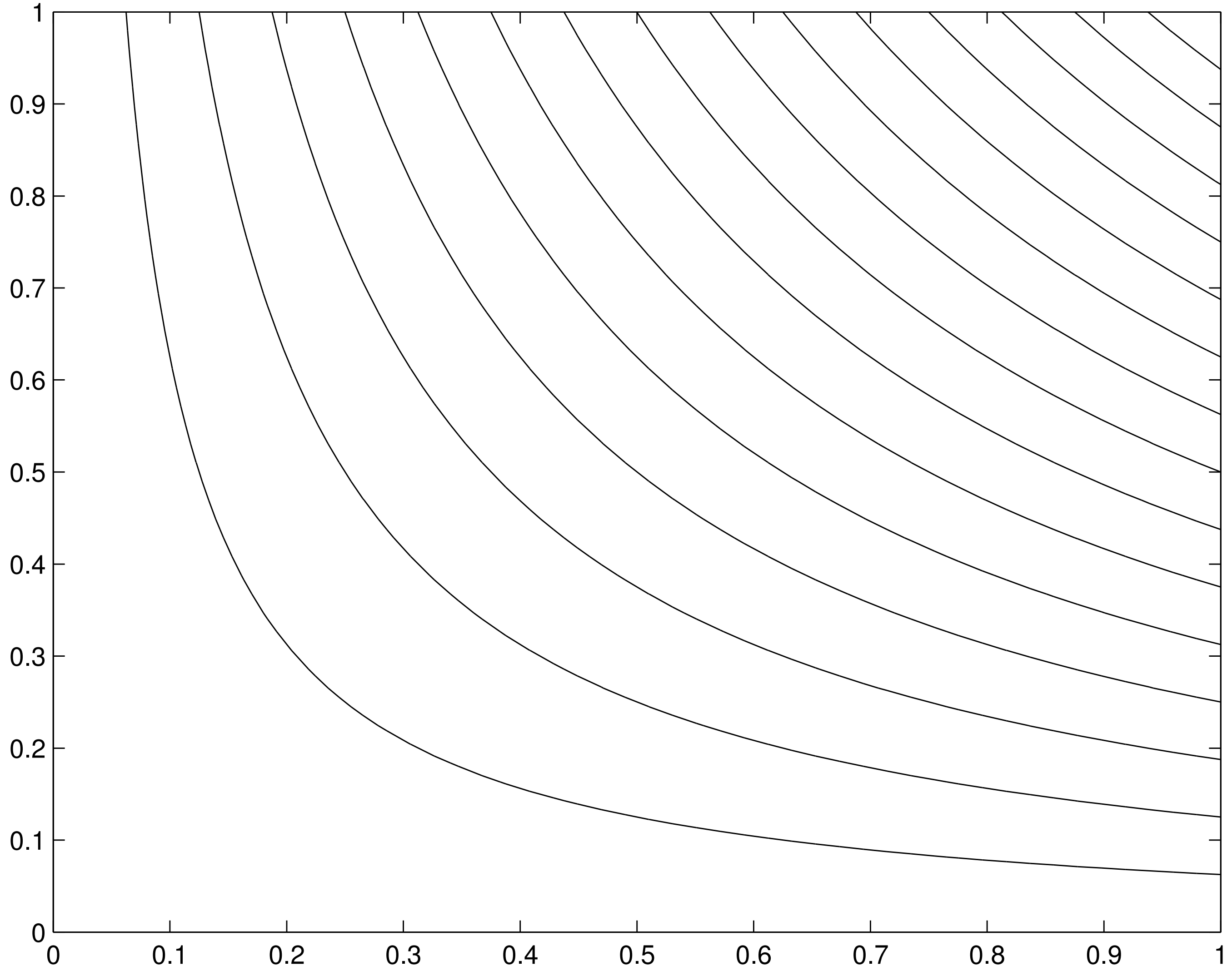
Em duas dimensões temos a função bilinear



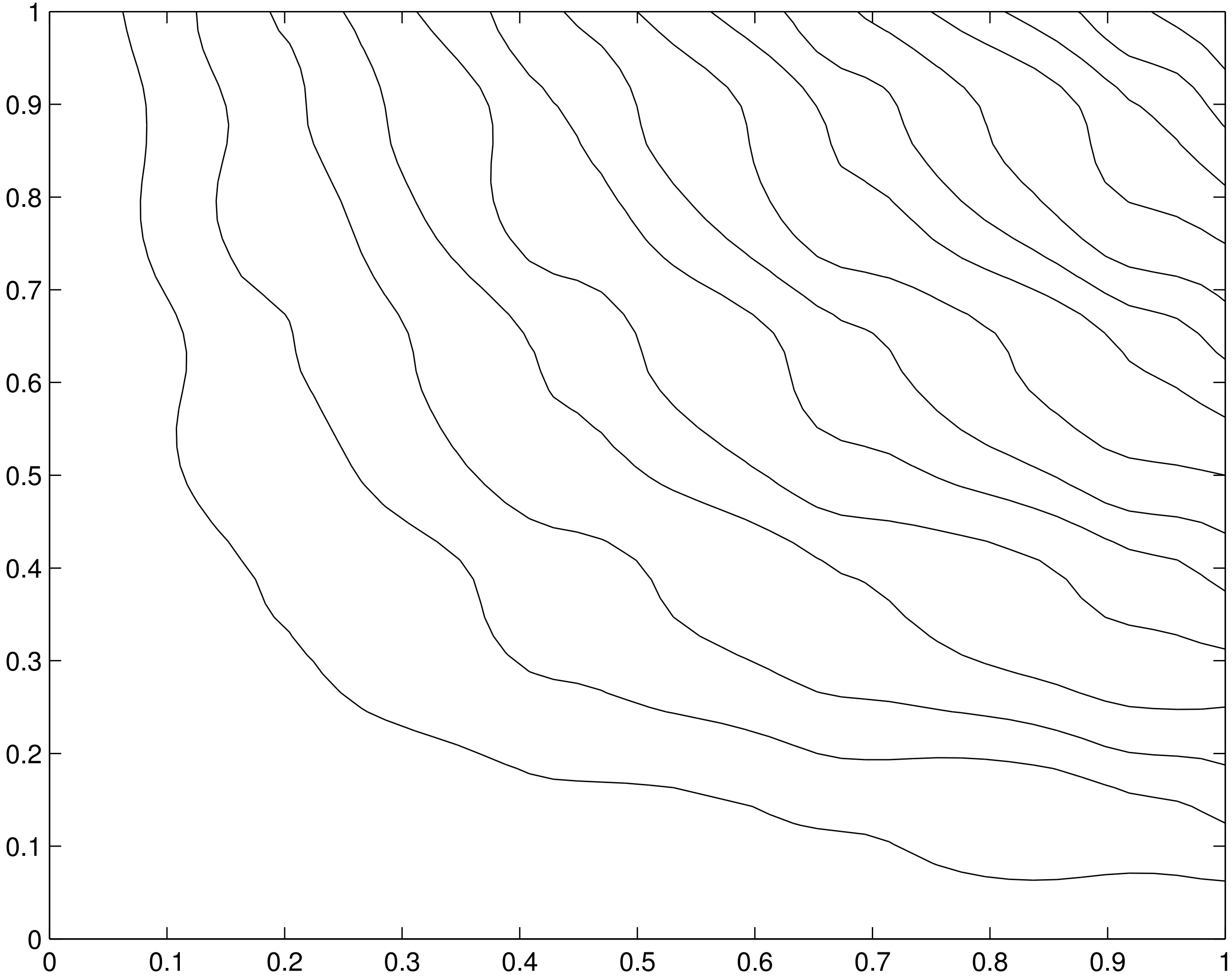
E a função de base multiescala para $\varepsilon/h = 1/64$:



Curvas de nível para a função bilinear



Curvas de nível para a função de base multiescala com $\varepsilon/h = 1/64$:



Introdução aos EFMs

Usando o espaço acima definido, o método de elementos finitos multiescala busca $u^{h,\varepsilon} \in V_0^{h,\varepsilon}$ tal que

$$\int_0^1 \left(a(x/\varepsilon) \frac{du^{h,\varepsilon}}{dx}(x) \frac{dv^{h,\varepsilon}}{dx}(x) \right) dx = \int_0^1 f(x) v^{h,\varepsilon}(x)\, dx$$

para todo $v^{h,\varepsilon} \in V_0^{h,\varepsilon}$.

Introdução aos EFMs

Testando então a aproximação para $\varepsilon = 1/16$ e $h = 1/10$, vemos na figura a seguir que a solução aproximada pelo método de elementos finitos multiescala interpola a solução exata nos nós. Isto não é uma coincidência, é apenas uma característica em uma dimensão de métodos de elementos finitos que utilizam funções que são soluções locais da própria EDP que estão aproximando. Em dimensões maiores essa propriedade é (infelizmente) perdida.

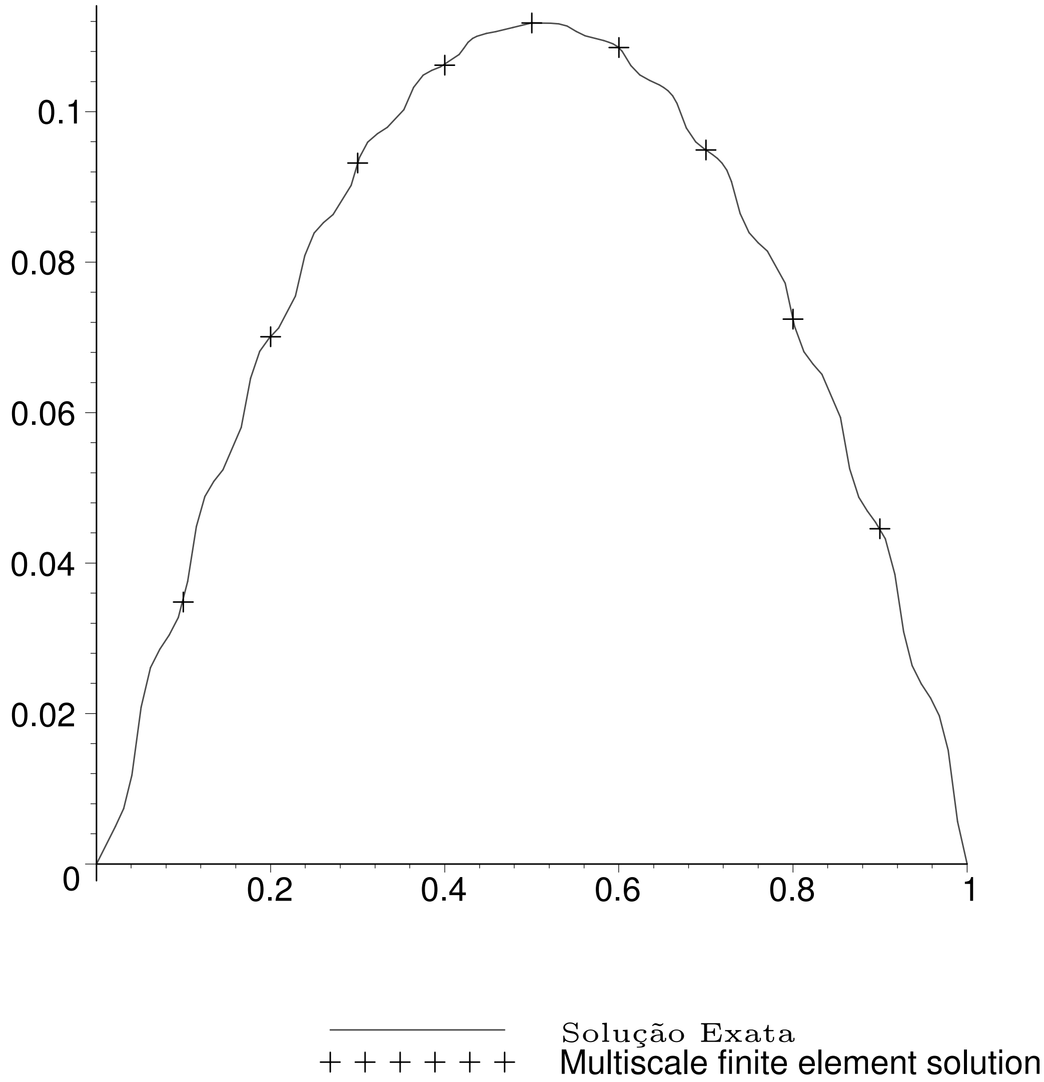


Fig. 11: u^ε e sua aproximação, com $\varepsilon = 1/16$ e $h = 1/10$.

Análise de erro

A análise de erro baseia-se no Lema de Cea, como feito no caso de elementos finitos clássicos.

Lema (Lema de Cea). *Sejam u^ε e $u^{h,\varepsilon}$ soluções exata e por elementos finitos multiescala. Então existe uma constante c tal que*

$$\|u^\varepsilon - u^{h,\varepsilon}\|_{H^1(0,1)} \leq c\|u^\varepsilon - v^{h,\varepsilon}\|_{H^1(0,1)} \quad \textit{para todo } v^{h,\varepsilon} \in V_0^{h,\varepsilon}.$$

Análise de erro

No método de elementos finitos clássico, encontramos uma função em V_0^h que "aproximava bem" u^ε e estimamos o erro de aproximação. No caso, a função em V_0^h era o interpolador de u^ε. Utilizando o Lema de Cea obtivemos a estimativa final.

Similarmente, o desafio agora é achar uma aproximação para u^ε no espaço multiescala $V_0^{h,\varepsilon}$. A análise divide-se em dois casos distintos, dependendo se a malha é refinada o suficiente ou não, em relação ao parâmetro ε.

Análise de erro

Caso I: $h \ll \varepsilon$. Neste caso em que assumimos a malha suficientemente refinada, obtemos a seguinte resultado de convergência, que, a menos de constantes, é o mesmo que o do caso de elementos finitos clássico. Ou seja, para malhas refinadas, *o método multiescala funciona tão bem quanto o método tradicional.*

Teorema. *Sejam u^ε e $u^{h,\varepsilon}$ soluções exata e por elementos finitos multiescala. Então existe uma constante c independente de ε e f tal que*

$$\|u^\varepsilon - u^{h,\varepsilon}\|_{H^1(0,1)} \leq ch\|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Análise de erro

O teorema acima segue facilmente do Lema de Cea e do seguinte resultado de interpolação.

Lema. *Seja* u^ε *solução exata, e seja* $I^{h,\varepsilon}u^\varepsilon = \sum_{j=1}^N u^\varepsilon(x_j)\psi_j$ *interpolador de* u^ε *em* $V_0^{h,\varepsilon}$*. Então existe uma constante* c *tal que*

$$\|u^\varepsilon - I^{h,\varepsilon}u^\varepsilon\|_{H^1(0,1)} \leq ch\|f\|_{L^2(0,1)}^2.$$

A constante c *é independente de* ε *e* f*.*

Demonstração. Note que

$$
\begin{aligned}
&\alpha|u^\varepsilon - I^{h,\varepsilon}u^\varepsilon|^2_{H^1(x_{j-1},x_j)} \\
&\qquad \le \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{d}{dx}(u^\varepsilon - I^{h,\varepsilon}u^\varepsilon)a(x/\varepsilon)\frac{d}{dx}(u^\varepsilon - I^{h,\varepsilon}u^\varepsilon)\,dx \\
&\qquad = -\int_{x_{j-1}}^{x_j} (u^\varepsilon - I^{h,\varepsilon}u^\varepsilon)\frac{d}{dx}\left[a(x/\varepsilon)\frac{d}{dx}(u^\varepsilon - I^{h,\varepsilon}u^\varepsilon)\right]dx \\
&= -\int_{x_{j-1}}^{x_j} (u^\varepsilon - I^{h,\varepsilon}u^\varepsilon)\frac{d}{dx}\left[a(x/\varepsilon)\frac{d}{dx}u^\varepsilon\right]dx = \int_{x_{j-1}}^{x_j} (u^\varepsilon - I^{h,\varepsilon}u^\varepsilon)f\,dx \\
&\qquad \le \|u^\varepsilon - I^{h,\varepsilon}u^\varepsilon\|_{L^2(x_{j-1},x_j)}\|f\|_{L^2(x_{j-1},x_j)} \\
&\qquad\qquad \le ch|u^\varepsilon - I^{h,\varepsilon}u^\varepsilon|_{H^1(x_{j-1},x_j)}\|f\|_{L^2(x_{j-1},x_j)}),
\end{aligned}
$$

pois a desigualdade de Poincaré nos dá que

$\|v\|_{L^2(x_{j-1},x_j)} \le ch|v|_{H^1(x_{j-1},x_j)}$ para todo $v \in H^1_0(x_{j-1},x_j)$.

Temos então

$$|u^\varepsilon - I^{h,\varepsilon}u^\varepsilon|_{H^1(x_{j-1},x_j)} \le ch\|f\|_{L^2(x_{j-1},x_j)}. \tag{1}$$

Para encontrar uma estimativa global, basta somar a desigualdade acima em todos os elementos:

$$\begin{aligned}
\|u^\varepsilon - I^{h,\varepsilon}u^\varepsilon\|^2_{H^1(0,1)} &\le c|u^\varepsilon - I^{h,\varepsilon}u^\varepsilon|^2_{H^1(0,1)} \\
&= c\sum_{j=1}^{N}|u^\varepsilon - I^{h,\varepsilon}u^\varepsilon|^2_{H^1(x_{j-1},x_j)} \le ch^2\sum_{j=1}^{N}\|f\|^2_{L^2(x_{j-1},x_j)} \\
&= ch^2\|f\|^2_{L^2(0,1)},
\end{aligned}$$

onde usamos a estimativa de interpolação (1). Tirando raízes dos dois lados da equação acima obtemos o resultado. $\square$

Análise de erro

Caso II: $\boldsymbol{\varepsilon \ll h}$**.** Mesmo quando ε é pequeno em relação à malha, e o método de elementos finitos lineares não funciona a contento, os elementos finitos multiescala aproximam bem a solução exata.

Abaixo apresentamos uma estimativa de erro.

Teorema. *Sejam u^ε e $u^{h,\varepsilon}$ soluções exata e por elementos finitos multiescala. Então existe uma constante c independente de ε e f tal que*

$$\|u^\varepsilon - u^{h,\varepsilon}\|_{H^1(0,1)} \leq C(\varepsilon h^{-1/2} + h)\|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Análise de erro

Para estimar o erro de aproximação do presente método, temos que encontrar uma função em $V_0^{h,\varepsilon}$ que aproxime u^ε para então aplicar o Lema de Cea. Nosso candidato é u_I, interpolador da solução homogeneizada u^0 em $V_0^{h,\varepsilon}$. Note que no **Caso I** (quando $h \ll \varepsilon$), tomamos como candidato o interpolador de u^ε, diferentemente do que fazemos agora.

Para entender porque o método multiescala funciona bem quando $\varepsilon \ll h$, é preciso usar uma boa aproximação assintótica para u^ε. Usamos então os primeiros termos da expansão assintótica de u^ε.

Análise de erro

De fato, seja u^0 a solução homogeneizada e H solução de

$$-\frac{d}{dy}\left(a(y)\frac{dH}{dy}(y)\right) = \frac{da}{dy}(y) \quad \text{em } (0,1),$$

$$H \text{ periódica com período } 1, \qquad \int_0^1 H(y)\,dy = 0.$$

Além disso, seja

$$u^1(x) = -H(x/\varepsilon)\frac{du^0}{dx}(x),$$

e θ tal que

$$-\frac{d}{dx}\left(a(x/\varepsilon)\frac{d\theta}{dx}(x)\right) = 0 \quad \text{em } (0,1),$$

$$\theta(0) = u^1(0), \quad \theta(1) = u^1(1).$$

Análise de erro

Temos então o seguinte resultado [Moskow e Vogelius, 1997].

Teorema. *Assuma que* $f \in L^2(0,1)$, *e seja* u^ε *solução exata. Sejam* u^0, u^1 *e* θ *como definidos anteriormente. Então existe uma constante* c *independente de* f *e de* ε *tal que*

$$\|u^\varepsilon - u^0 - \varepsilon u^1 + \varepsilon\theta\|_{H^1(0,1)} \leq C\varepsilon\|u^0\|_{H^2(0,1)}.$$

Hou et al. [Hou, Wu, Cai, 1999] notaram que a expansão acima vale tanto para a solução exata como para os elementos da base de elementos finitos multiescala.

Logo, para $i = 1, \ldots, N$ a função ψ_i pode ser aproximada por

$$\psi_i^0 + \varepsilon \psi_i^1 - \varepsilon \theta_i,$$

onde

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi_i^0 = 0 \quad \text{em } \cup_{j=1}^{N+1} (x_{j-1}, x_j), \qquad \psi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

e $\psi_i^1 = H(x/\varepsilon) d\psi_i^0/dx$. Finalmente

$$-\frac{d}{dx}\left(a(x/\varepsilon)\frac{d\theta_i}{dx}(x)\right) = 0 \quad \text{em } \cup_{j=1}^{N+1} (x_{j-1}, x_j), \qquad \theta_i(x_j) = \psi_i^1(x_j).$$

Observação. *Note que no caso unidimensional, ψ_i^0 nada mais é que a função de base linear por partes ϕ_i.*

Análise de erro

Seja u_I interpolador da solução homogeneizada u^0 em $V_0^{h,\varepsilon}$.

Como acima, u_I pode ser aproximado por $u_I^0 + \varepsilon u_I^1 - \varepsilon\theta_I$, onde

$u_I^0 = \sum_{i=1}^N u^0(x_i)\psi_i^0$, e $u_I^1 = H(x/\varepsilon)du_I^0/dx$. Além disso,

$$-\frac{d}{dx}\left(a(x/\varepsilon)\frac{d\theta_I}{dx}(x)\right) = 0 \quad \text{em } \cup_{j=1}^{N+1}(x_{j-1}, x_j), \quad \theta_I(x_j) = u_I^1(x_j).$$

Temos então que

$$\|u^\varepsilon - u_I\|_{H^1(0,1)} \leq \|u^\varepsilon - u^0 - \varepsilon u^1 + \varepsilon\theta\|_{H^1(0,1)} + \|u^0 - u_I^0\|_{H^1(0,1)}$$
$$+ \varepsilon\|u^1 - u_I^1\|_{H^1(0,1)} + \varepsilon\|\theta\|_{H^1(0,1)} + \varepsilon\|\theta_I\|_{H^1(0,1)}$$
$$+ \|u_I - u_I^0 - \varepsilon u_I^1 + \varepsilon\theta_I\|_{H^1(0,1)}$$

Análise de erro

A desigualdade

$$\|u^\varepsilon - u^0 - u^1 + \varepsilon\theta\|_{H^1(0,1)} \leq c\varepsilon\|u^0\|_{H^2(0,1)}$$

é apresentada no Teorema 1. Já

$$\|u_I - u_I^0 - u_I^1 + \varepsilon\theta_I\|_{H^1(0,1)} \leq c\varepsilon\|u^0\|_{H^2(0,1)}$$

baseia-se no Teorema 1 e em $\|u_I^0\|_{H^2(x_{j-1},x_j)} \leq c\|u^0\|_{H^2(x_{j-1},x_j)}$.

Usando que u_I^0 é a interpolação de u^0 por funções lineares por partes, obtemos

$$\|u^0 - u_I^0\|_{H^1(0,1)} \leq ch\|u^0\|_{H^2(0,1)}.$$

A seguir, usamos

$$
\begin{aligned}
\|u^1 - u_I^1\|_{H^1(x_{j-1},x_j)} &= \left\| H(\cdot/\varepsilon)\frac{d(u^0 - u_I^0)}{dx} \right\|_{H^1(x_{j-1},x_j)} \\
&\leq \varepsilon^{-1} \left\| \frac{dH}{dx} \right\|_{L^\infty(0,1)} \|u^0 - u_I^0\|_{H^1(x_{j-1},x_j)} \\
&\quad + \|H\|_{L^\infty(0,1)} \|u^0 - u_I^0\|_{H^2(x_{j-1},x_j)} \\
&\leq c\varepsilon^{-1} \|u^0 - u_I^0\|_{H^1(x_{j-1},x_j)} + c\|u^0\|_{H^2(x_{j-1},x_j)}.
\end{aligned}
$$

Somando o quadrado da desigualdade acima entre $j = 1$ e $j = N + 1$ temos

$$
\|u^1 - u_I^1\|_{H^1(0,1)} \leq c(\varepsilon^{-1} h + 1)\|u^0\|_{H^2(0,1)}.
$$

Finalmente temos

$$
\begin{aligned}
\|\theta\|_{H^1(0,1)} &\leq c(|u^1(0)| + |u^1(1)|) \\
&\leq c\|H\|_{L^\infty(0,1)}\left(\left|\frac{du^0}{dx}(0)\right| + \left|\frac{du^0}{dx}(1)\right|\right) \leq c\|u^0\|_{H^2(0,1)},
\end{aligned}
$$

e

$$
\|\theta_I\|^2_{H^1(x_{j-1},x_j)} \leq \frac{c}{h}(|u_I^1(x_{j-1})| + |u_I^1(x_j)|)^2
$$

$$
\leq \frac{c}{h}\|H\|^2_{L^\infty(0,1)}\left(\left|\frac{du_I^0}{dx}(x_{j-1})\right| + \left|\frac{du_I^0}{dx}(x_j)\right|\right)^2 \leq \frac{c}{h}\|u^0\|^2_{H^2(x_{j-1},x_j)}.
$$

Somando a desigualdade acima entre $j = 1$ e $j = N+1$, temos

$$
\|\theta_I\|_{H^1(0,1)} \leq ch^{-1/2}\|u^0\|_{H^2(0,1)}.
$$

Usando as desigualdades acima, obtemos o seguinte resultado.

Teorema. *Sejam* u^ε *e* $u^{h,\varepsilon}$ *soluções exata e por elementos finitos multiescala. Então existe uma constante* c *independente de* ε *e* f *tal que*

$$\|u^\varepsilon - u^{h,\varepsilon}\|_{H^1(0,1)} \leq C(\varepsilon h^{-1/2} + h)\|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Outros Comentários

- Uma importante diferença entre uma e duas dimensões na técnica de elementos multiescala é que no caso bidimensional não é claro que condições de contorno deve-se impor nas arestas na definição das funções de base ψ_i. Em uma dimensão este problema não existe, já que não existe aresta.

- Uma primeira idéia seria impor ψ_i linear nas arestas. Nos artigos de Hou e colaboradores surge a proposta que as funções de base deveriam satisfazer uma "restrição unidimensional" do operador diferencial que define a EDP, ao longo das arestas.

- Esta proposta é *ad hoc*, assim como a definição do que é uma restrição unidimensional de um operador bidimensional, mas parece funcionar bem numericamente. A demonstração de convergência em [Hou, Wu, Cai, 1999] foi feita assumindo que as funções de base são lineares nas arestas.

- As diferenças em uma e duas dimensões não são muitas. Em 2D, aparece o fenômeno de ressonância, quando $h \sim \varepsilon$. Isto é minimizado pelo Tom Hou et al. com “oversampling” , o que torna o método não conforme (análise em [Efendiev, Hou, Wu, 2000]).

- Introdução: um modelo
- Solução homogeneizada
- Aproximação por Elementos Finitos Clássicos
- Elementos Finitos Multiescala
- Outros Métodos
- Conclusões

Residual Free Bubbles (RFB)

Recentemente, Sangalli (2003) aplicou a idéia de *Residual Free Bubbles* em EDPs com coeficientes oscilatórios com excelentes resultados. O método guarda forte similaridades com o MsFEM.

As "bolhas" são funções com suporte local que resolvem, exata ou aproximadamente, a equação diferencial em cada elemento. O lado direito destes problemas vem do resíduo devido à parte polinomial da solução numérica. Outro fator é que as bolhas se anulam no bordo de cada elemento.

A seguir apresentamos de forma breve a idéia central do RFB.

Residual Free Bubbles (RFB)

Em geral, para problemas com múltiplas escalas, é possível decompor a solução como

$$u_{\text{solução}} = u_{\text{macro}} + u_{\text{micro}}$$

No método RFB, a decomposição é

$$u_{\text{RFB}} = u_{linear} + u_b$$

onde u_{linear} é a parte linear por partes, e a "bolha" u_b captura informações sobre a microescala.

Residual Free Bubbles (RFB)

Seja Ω um polígono, $\varepsilon > 0$ representa a pequena escala,

$$\mathcal{L}^\varepsilon u = f \quad \text{em } \Omega,$$

$$u = 0 \quad \text{em } \partial\Omega,$$

e sua formulação fraca: achar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(u,v) = (f,v) \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

e $(f,v) = \int_\Omega f v \, d\mathbf{x}$. Tomamos como exemplo

$$\mathcal{L}^\varepsilon u = -\operatorname{div}\bigl(K^\varepsilon(x) \nabla u\bigr), \qquad a(u,v) = \int_\Omega \bigl(K^\varepsilon(x) \nabla u\bigr) \cdot \nabla v \, d\mathbf{x}.$$

Residual Free Bubbles (RFB)

Considere a partição de Ω em elementos finitos, e o *espaço enriquecido* associado

$$V_h := V_1 \oplus B,$$

onde

- $V_1 \subset H_0^1(\Omega)$ é o espaço das funções lineares ou bilineares por partes
- $B \subset H_0^1(\Omega)$ é o espaço das "bolhas", funções que se anulam no bordo dos elementos

O método consiste em achar $u_h \in V_h = V_1 \oplus B$ onde

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \text{para todo } v_h \in V_h.$$

Escrevendo $u_h = u_1 + u_b$ temos

$$a(u_1 + u_b, v_1) = (f, v_1) \quad \text{para todo } v_1 \in V_1,$$

$$a(u_1 + u_b, v_b) = (f, v_b) \quad \text{para todo } v_b \in B.$$

Logo, a segunda equação é válida em cada elemento:

$$a(u_1 + u_b, v_b)|_K = (f, v_b)|_K \quad \text{para todo } v_b \in H_0^1(K),$$

para todo elemento K.

A parte da bolha é solução forte do problema local

$$\mathcal{L}^\varepsilon u_b = -\mathcal{L}^\varepsilon u_1 + f \quad \text{em } K,$$

$$u_b = 0 \quad \text{em } \partial K.$$

Escrevendo $u_b = T(-\mathcal{L}^\varepsilon u_1 + f)$ e usando condensação estática,

temos

$$a(u_1 + u_b, v_1) = (f, v_1) \implies a(u_1 + T(-\mathcal{L}^\varepsilon u_1 + f), v_1) = (f, v_1)$$

$$\implies a(u_1 - T\mathcal{L}^\varepsilon u_1, v_1) = (f, v_1) - a(Tf, v_1)$$

$$\implies a\big((I - T\mathcal{L}^\varepsilon)u_1, v_1\big) = (f, v_1) - a(Tf, v_1)$$

para todo $v_1 \in V_1$,

Uma primeira forma de se interpretar a formulação acima é como um *método estabilizado livre de paramêtros*: achar $u_1 \in V_1$ onde

$$a(u_1, v_1) - a(T\,\mathcal{L}^\varepsilon\, u_1, v_1) = (f, v_1) - a(Tf, v_1) \quad \text{para todo } v_1 \in V_1.$$

Outra forma é como "upscaling" numérico: achar $u_1 \in V_1$ onde

$$a^*(u_1, v_1) =< f^*, v_1 > \quad \text{para todo } v_1 \in V_1,$$

$$a^*(u_1, v_1) = a((I - T\,\mathcal{L}^\varepsilon)u_1, v_1), \qquad < f^*, v_1 >= (f, v_1) - a(Tf, v_1).$$

Na interpretação multiescala:

- V_1 é o espaço macro, enxerga apenas as propriedades "macro"
- B é o espaço micro, capturando o efeito das pequenas escalas

Finalmente, é possível ver esta formulação "quase" como um método de Petrov–Galerkin. Se $\{\psi_i\}$ é uma base de V_1, e $u_1 = \sum_{i=1}^N u_i \psi_i$, então

$$\sum_{i=1}^N u_i a((I - T\,\mathcal{L}^\varepsilon)\psi_i, \psi_j) = (f, \psi_j) - a(Tf, \psi_j)$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^N u_i a(\lambda_i, \psi_j) = (f, \psi_j) - a(Tf, \psi_j), \text{ onde } \lambda_i = (I - T\,\mathcal{L}^\varepsilon)\psi_i.$$

Então,

$$\mathcal{L}^\varepsilon \lambda_i = 0 \quad \text{em } K, \qquad \lambda_i = \psi_i \quad \text{em } \partial K,$$

As funções de base do espaço das funções admissíveis resolvem o operador localmente, e as funções teste continuam as mesmas.

Heterogeneous Multiscale Method (HMM)

Esta proposta é estudada por E, Engquist, Huang, Ming, Li, Vanden-Eijnden, Zhang, Yue, a partir de 2003. Damos uma breve descrição do método considerando o problema

$$-\operatorname{div}[a^\varepsilon(x)\,\nabla\, u^\varepsilon(x)] = f(x) \quad \text{em } \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

$$u^\varepsilon = 0 \quad \text{em } \partial\Omega,$$

ode $\varepsilon \ll 1$ “representa” as pequenas escalas, e $a^\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}^{2\times 2}$. Seja V^1 o espaço das funções de elementos finitos contínuas e lineares por partes.

Se existir matriz efetiva A que incorpore os efeitos das microescalas, a forma bilinear

$$\int_D (A \nabla V) \cdot \nabla W \, dx \quad \text{para } V, W \in V^1,$$

seria boa para se tentar aproximar a solução original.

Para um elemento K, considere a quadratura

$$\int_K p(x) \, dx \approx \sum_{l=1}^{L} w_l p(x_l).$$

Logo

$$\int_D (A \nabla V) \cdot \nabla W \, dx \approx \sum_{l=1}^{L} w_l [(A \nabla V) \cdot \nabla W](x_l).$$

Heterogeneous Multiscale Method (HMM)

Aproximamos $[(A \nabla V) \cdot \nabla W](x_l)$ da seguinte forma. Considere $I_\delta(x_l)$ o quadrado de tamanho δ centrado em x_l, e, dado $V \in V^1$ ache $v_l = R(V)$ tal que

$$- \operatorname{div}[a^\varepsilon(x) \nabla v_l(x)] = 0 \quad \text{em } I_\delta(x_l),$$

$$v_l = V \quad \text{em } \partial I_\delta(x_l).$$

Tome então

$$[(A \nabla V) \cdot \nabla W](x_l) \approx \frac{1}{\delta} \int_{I_\delta(x_l)} [a^\varepsilon(x) \nabla v_l(x)] \cdot \nabla w_l(x)\, dx,$$

onde $v_l = R(V)$ e $w_l = R(W)$.

Observação. *A escolha de δ depende do problema em questão. Por exemplo, para problemas periódicos, δ pode ser o próprio período. As condições de contorno para se definir o operador $R(\cdot)$ também podem ser mudadas para, por exemplo, $V - R(V)$ periódico em $I_\delta(x_l)$.*

- Introdução: um modelo
- Solução homogeneizada
- Aproximação por Elementos Finitos Clássicos
- Elementos Finitos Multiescala
- Uma dificuldade extra
- Outros Métodos
- Conclusões

Conclusões

- Analisamos como aproximar soluções de equações diferenciais que têm coeficientes oscilatórios.
- Vimos que além da técnica usual de homogeneização, elementos finitos multiescala são uma boa opção numérica. Vimos também que os elementos finitos clássicos não aproximam bem a solução exata, e vimos o motivo.

- O problema com os elementos finitos clássicos está na escolha dos espaços de funções. Nos elementos finitos multiescala, as funções incorporam as pequenas escalas.
- A análise de erro do método multiescala é sofisticada (principalmente em 2D). A grande (única) diferença para o caso de elementos finitos lineares está na estimativa de interpolação.
- Outros métodos tentam de uma forma ou de outra fazer o upscaling numericamente, a um custo mais baixo possível.
- Esta é uma ativa e promissora área de pesquisa. Tem vários aspectos matemática como de aplicaçõesa serem investigados.

FIM

Obrigado!