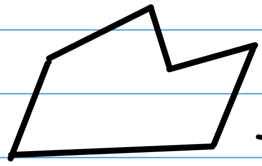
Metodo Elementos Finitos em 2D

Considere o problema de Poisson, de achar u "suave" tal que

$$(D)\quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

e' aberto limitado com fronteira poligonal Γ



Ω

$\Gamma = \partial\Omega$

Para obter uma formulacao variacional do problema (D), basta multiplicar ambos lados da equacao por uma funcao v "suave" e que se se anule em Γ, e integrar por partes:

$$\int_\Omega f v = \int_\Omega -\Delta u \cdot v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \cancelto{0}{\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v}$$

para todo $v \in V$, onde

$$V = \left\{ v \in C^0(\bar\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_1} \text{ e } \frac{\partial v}{\partial x_2} \text{ sejam contínuas por partes, e } v|_\Gamma = 0 \right\}$$

Temos entao que $u \in V$ é tal que

$$(V)\quad a(u,v) = (f,v) \quad \forall v \in V$$

onde $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$ e

$(f,v) = \int_\Omega f v$

Pode-se mostrar que

$$(M) \quad u = \underset{v \in V}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega f v$$

Temos entao que

$$(D) \Rightarrow (V) \Leftrightarrow (M)$$

Havendo regularidade suficiente da solucao u, "vale a volta" $(V) \Rightarrow (D)$.

Metodo de elementos Finitos

Passo 1: defina uma particao $\mathcal{T}_h$ de Ω, i.e.

$$\mathcal{T}_h = \{K_1, \ldots, K_m\}$$

uma coleção de triângulos tais que

- $K_1, \ldots, K_m$ são fechados e limitados
- $\bar{\Omega} = K_1 \cup \cdots \cup K_m$.
- $K_i \cap K_j$ é vazio, um vértice de K_i e K_j, ou uma aresta comum a K_i e K_j.

A partição $\mathcal{T}_h$ é também chamada de malha p/ Ω.

Considere agora o parâmetro

$$h = \max\{h_1, \dots, h_m\}$$

onde h_j é o diâmetro do elemento K_j, definido por

$$h_j = \mathrm{diam}(K_j) = \max_{x,y \in K_j} \|x-y\|$$

(a distância máxima entre dois pontos de K_j)

Obs: A definição de diâmetro acima está bem definida pois K_j é fechado e limitado. Se não fosse fechado, teríamos que usar o supremo da distância, e não o máximo.

Fixada a partição $\mathcal{T}_h$, podemos definir o espaço das funções lineares por partes:

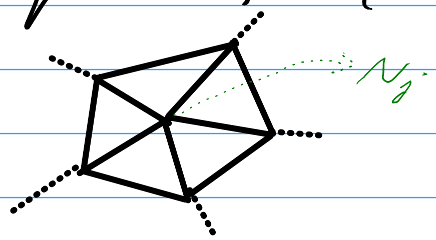
$$V_h = \{v_h \in C^0(\Omega) : v|_K \in P^1(K),\ K \in \mathcal{T}_h,\ v|_\Gamma = 0\}$$

onde $P^1(K)$ é o espaço das funções lineares em K.

Definimos então a solução por elementos finitos como sendo $u_h \in V_h$ t.q.

$$(V_h) \qquad a(u_h, v_h) = (f, v_h) \; \forall v_h \in V_h.$$

Vamos agora construir uma base para V_h. Sejam $N_1, \dots, N_m$ os vértices internos da partição (i.e. $N_j \notin \partial\Omega$).



Considere a função $\varphi_j \in V_h$ t.q.

$$\varphi_j(N_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

Exercício: mostre que

1) se $\varphi_j|_K \in P^1(K)$, então $\varphi_j \in V_h$.

2) $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ é base de V_h.

Obtemos então que

$$v_h \in V_h \Rightarrow v_h(x) = \sum_{i=1}^{m} v_h(x_i)\, \varphi_i(x).$$

Sistema linear:

$AU = f$

onde $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $A_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$

$\vec{U} = [u_1, \ldots u_m]^T \in \mathbb{R}^m$

$\vec{f} = [(f, \varphi_1), \ldots, (f, \varphi_m)]^T$

onde $a(v, w) = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w$

$(f, v) = \int_\Omega f \cdot v$

Obtenho $u_h(x) = \sum_{i=1}^{m} u_i \varphi_i(x)$, $x \in \Omega$.

Assim como em 1D:

$a(u, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h$

$a(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h$

$\Rightarrow a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \|\nabla(u - u_h)\|^2 &= a(u - u_h, u - u_h) \\
&= a(u - u_h, u - v_h) \\
&= \int_\Omega \nabla(u - u_h) \cdot \nabla(u - v_h) \\
&\leq \|\nabla(u - u_h)\| \cdot \|\nabla(u - v_h)\|
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \|\nabla(u - u_h)\| \leq \|\nabla(u - v_h)\| \quad \forall v_h \in V_h$.

Em particular, escolhendo v_h como o interpolante πu de u em V_h obtemos

$$\|\nabla(u-u_h)\| \leq \|\nabla(u-\pi u)\|$$

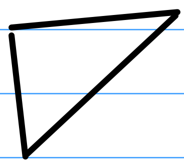
onde $\pi u \in V_h$ e $\pi(u)(x_i) = u(x_i)$.

Usando que $\|\nabla(u-\pi u)\| \leq Ch$:

$$\|\nabla(u-u_h)\| \leq Ch$$

onde $h = \max_{K \in \tau_h} h_K$; $h_K = \text{diam}(K) = \max_{x,y \in K} \|x-y\|$

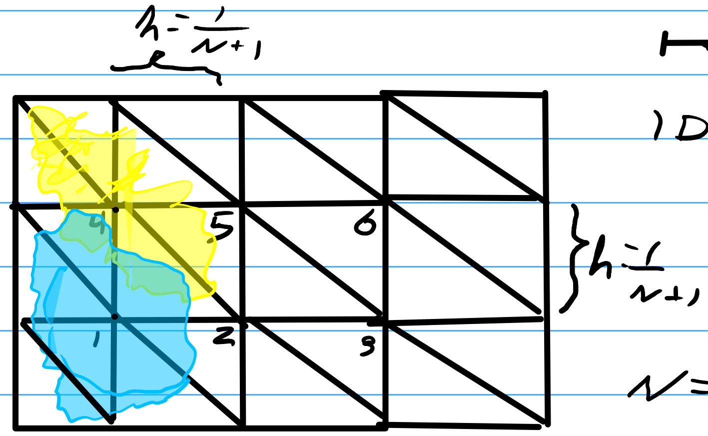
A constante C depende do Ω, f, e do τ_h (mas não do h)!

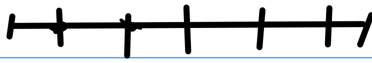


permitido

Nao!

Outra estimativa: $\|u-u_h\| \leq Ch^2$.





1D: $a(\varphi_i, \varphi_j) = 0$ se $|i-j| > 1$ => A tridiagonal

$N = 3$

$\Rightarrow a(\varphi_1, \varphi_4) \neq 0 \Rightarrow A_{14} \neq 0$

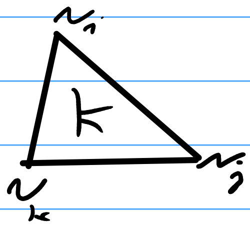
$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & \ddots & & & -1 & \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & & & \\ -1 & & \ddots & & & & \\ & & & & 4 & & \end{bmatrix}$$

Em geral $A_{1,N+1} \neq 0$

Matriz elementar:

Note $A_{ij} = \int_\Omega \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j = \sum_K \int_K \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j =: a_K(\varphi_i, \varphi_j)$

Sejam N_i, N_j, N_k nós do elemento K:



então $\begin{bmatrix} a_K(\varphi_j, \varphi_j) & a_K(\varphi_j, \varphi_k) & a_K(\varphi_j, \varphi_i) \\ a_K(\varphi_k, \varphi_j) & a_K(\varphi_k, \varphi_k) & a_K(\varphi_k, \varphi_i) \\ a_K(\varphi_i, \varphi_j) & a_K(\varphi_i, \varphi_k) & a_K(\varphi_i, \varphi_i) \end{bmatrix}$

Espacos de Hilbert $L^2(\Omega)$ e $H^1_0(\Omega)$

Formas lineares F definida num espaço vetorial V, t.q. $F: V \to \mathbb{R}$

$$F(\alpha u + v) = \alpha F(u) + F(v) \quad \forall u, v \in V$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Forma bilinear $a: V \times V \to \mathbb{R}$ é t.q.

$$a(u + \alpha v, w) = a(u, w) + \alpha a(v, w)$$
$$a(u, \alpha v + w) = \alpha a(u, v) + a(u, w)$$
$$\forall u, v, w \in V \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Dizemos que $a(\cdot,\cdot)$ é simétrica se $a(v,w) = a(w,v)$ $\forall v, w \in V$.

Teremos que $a(\cdot,\cdot)$ define um produto escalar em V se

$$a(v,v) > 0 \quad \forall v \in V,\ v \neq 0.$$

Dado produto escalar $a(\cdot,\cdot)$ definimos a norma (da energia)

$$\|v\|_a = \sqrt{a(v,v)}$$

Vale a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

$$|a(u,v)| \leq \|u\|_a \|v\|_a$$

Obs: A igualdade $|a(u,v)| = \|u\|_a \|v\|_a$ vale sse $u = \alpha v$ ou $v = \alpha u$ p/ algum $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dizemos que um espaço vetorial V é de Hilbert se V for completo.

Dizemos que um espaço é completo se toda sequência de Cauchy converge

Dizemos que uma sequência (v_j) é de Cauchy se $\forall\, \varepsilon > 0$ existir $N > 0$, $N \in \mathbb{N}$ t.q.

$$i, j \geq N \Rightarrow \|v_i - v_j\| < \varepsilon$$

Seja $I = (a, b)$. Defina

$$L^2(I) = \left\{ v : I \to \mathbb{R} : \int_I v^2\, dx < \infty \right\}$$

Podemos definir o produto escalar em $L^2(I)$

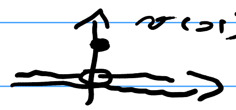
$$(v, w) = \int_I v . w \, dx$$

e a norma

$$\|v\|_{L^2(I)} = (v, v)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_I v^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Na verdade $v(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$

mas $\|v\|_{L^2(I)} = \int_0^1 v^2 = 0$ mesmo com $v \neq 0$.



Solução: "identificar" funções que diferem apenas em conjuntos de "medida nula".

Vale também a desigualdade de Cauchy-Schwartz:

$$|(u,v)| \le \|u\|_{L^2(I)} \|v\|_{L^2(I)} \quad \forall v,u \in L^2(I)$$

Exemplo: $v = x^{-\beta} \in L^2(I)$ se $\beta < \frac{1}{2}$:

$I = (0,1)$

$$\|v\|^2 = \int_0^1 x^{-2\beta}$$

$u(\frac{1}{2})$ não faz sentido mesmo se $u \in L^2(I)$

Note que v não está definida em zero.

Considere agora o espaço

$$H^1(I) = \{ v : I \to \mathbb{R} : v \in L^2(I),\ v' \in L^2(I) \} \subsetneq L^2(I).$$

onde definimos o produto escalar

$$(u,v)_{H^1(I)} = \int_I uv + u'v' \, dx$$

e a norma $\|v\|_{H^1(I)} = (v,v)^{\frac{1}{2}}_{H^1(I)}$

$$= \left(\int_I v^2 + \int_I (v')^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Vale C.S.:

$$(v,w)_{H^1(I)} \le \|v\|_{H^1(I)} \|w\|_{H^1(I)}$$

Note que

$$\|v\|^2_{H^1(I)} = \int_I v^2 + \int_I (v')^2 = \|v\|^2_{L^2(I)} + \|v'\|^2_{L^2(I)}$$

$$\geq \|v\|_{L^2(I)}$$

Obs: $H^1(I) \subseteq C^0(I)$. (fica p/ mais tarde)

Podemos definir $H_0^1(I) \subsetneq H^1(I) \subsetneq L^2(I)$

$$H_0^1(I) = \{ v \in H^1(I) : v(a) = v(b) = 0 \}$$

se $I = (a, b)$.

Obs: consideramos em $H_0^1(I)$ o mesmo produto interno que $H^1(I)$.

Considere "novamente"

(D) $\begin{cases} -u'' = f & \text{em } (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$

Com $f \in L^2(I)$.

Temos então que $u \in H_0^1(I)$ t.q.

(V) $\int_0^1 u'v' = \int_0^1 fv \quad \forall v \in H_0^1(I)$

Rascunho: $-\int_0^1 u''v = \int_0^1 u'v' + u'(0)\cancel{v(0)}^{0} - u'(1)\cancel{v(1)}^{0}$

Vale também $u = \underset{v \in H_0^1(I)}{\operatorname{argmin}} F(v)$

onde $F(v) = \frac{1}{2}\int_I (v')^2 - \int_I fv$.

Relembrar o nome:

No [J] pg. 16: $V = \{v \in C^0[0,1] : v'$ é cont. por partes e limitada em I, $v(0) = v(1) = 0\}$

$\Rightarrow V \subsetneq H_0^1(I)$

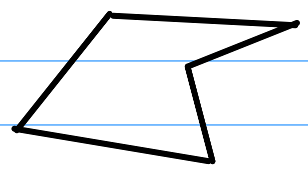
Note que $v \in V \Rightarrow v^2 \in C^0[0,1] \Rightarrow \int_I v^2 < +\infty$
pois v^2 é limitada em $[0,1]$
Além disto v' é cont. p.p. e limitada
$\Rightarrow \int_0^1 (v')^2 < \infty$

$\Rightarrow v \in H_0^1(I)$

Conjectura: $V \neq H_0^1$?

Generalização p/ 2D:

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, $\Gamma = \partial\Omega$ poligonal, Ω aberto limitado



Defino $L^2(\Omega) = \{ v : \Omega \to \mathbb{R} : \int_\Omega v^2 < \infty \}$

com $(v, w)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega v w \, dx$

$$\|v\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega v^2 = (v, v)_{L^2(\Omega)}$$

Defino também

$H^1(\Omega) = \{ v \in L^2(\Omega) : v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_1} \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_2} \in L^2(\Omega) \}$

e $(v, w)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega (v w + \nabla v \cdot \nabla w) \, dx$

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = (v, v)^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega (v^2 + |\nabla v|^2) \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$H^1_0(\Omega) = \{ v \in H^1(\Omega) : v|_\Gamma = 0 \}.$$

Problema forte

$$(D) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u\big|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

Problema fraco: $u \in H_0^1(\Omega)$ é t.q.

$$(V) \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

De forma equivalente: $u = \underset{v \in H_0^1(\Omega)}{\operatorname{argmin}} F(v)$

$$(M)\ F(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega f v$$

Interpretação geométrica do MEF:

Considere

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega = \Gamma \end{cases}$$

Então $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q.

(V) $a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$

onde $a(u,v) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + u\, v)\, dx$; $(f, v) = \int_\Omega f\, v\, dx$

Note que $a(u,v) = (u,v)_{H^1(\Omega)}$ é o produto interno "canônico" do $H_0^1(\Omega)$.

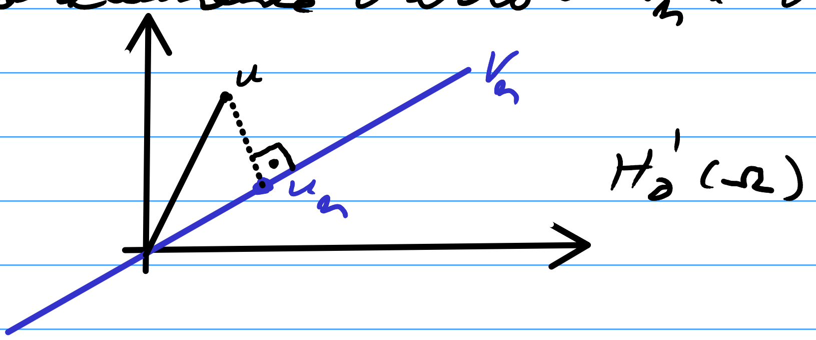
Então $(u, v)_{H^1(\Omega)} = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$

A solução de elementos $u_h \in V_h \subseteq H_0^1(\Omega)$ é tal que

$$(u_h, v_h)_{H^1(\Omega)} = (f, v_h)$$

Logo $\underbrace{(u - u_h, v_h) = 0}_{(*)} \quad \forall v_h \in V_h \subseteq H_0^1(\Omega)$

geometricamente o erro $u - u_h$ é ortogonal a V_h



A propriedade

$$(u-u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$$

é equivalente a

$$\|u-u_h\| = \min \|u-v_h\| \quad \forall v_h \in V_h$$

O problema de Neumann (condicoes de contorno naturais e essenciais)

Considere o problema de achar u t.q.

$$(D)\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{em } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g & \text{em } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\frac{\partial u}{\partial n}$ denota a derivada normal, e $\underline{n}$ aponta p/ o exterior de Γ:

Chamamos o problema acima de problema de Neumann.

Obs: As condições de contorno dos problemas anteriores são chamadas de Dirichlet.

Para obter uma formulação variacional, multiplicamos a equação por v e integramos:

$$\int_\Omega f.v\,dx = \int_\Omega (-\Delta u + u)\,v\,dx$$

$$= \int_\Omega \nabla u \nabla v + uv - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v = \int_\Omega \nabla u \nabla v + uv - \int_\Gamma g v$$

Obtemos então $u \in H^1(\Omega)$

$$(V) \quad \int_\Omega (\nabla u . \nabla v + uv)\,dx = \int_\Omega f v\,dx + \int_\Gamma g v \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Havendo regularidade suficiente de u:
$(V) \Rightarrow (D)$. De fato:

$$\int_\Omega f v + \int_\Gamma g v = \int_\Omega \nabla u \nabla v + u v = \int_\Omega (-\Delta u + u) v + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Então, tomando $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$0 = \int_\Omega (-f - \Delta u + u) v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow -\Delta u + u = f \text{ em } \Omega.$$

Resta então que, p/ $v \in H^1(\Omega)$:

$$\int_\Gamma g v = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v. \text{ Então } g = \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Note que a condição de Neumann não é imposta, mas obtida da formulação. É chamada condição natural. A condição de Dirichlet é imposta, e é chamada condição essencial.

ELEMENTOS FINITOS

Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, aberto limitado e $\Gamma = \partial\Omega$ poligonal, seja a partição

$\tau_h = \{K\}$ em elementos.

Seja

$$V_h = \{ v_h \in C^0(\Omega) : v_h|_K \text{ é linear}, K \in \tau_h \}$$

Note que $V_h \subseteq H^1(\Omega)$, e que $v_h \in V_h$ não tem valor fixado em Γ.

Procuramos então $u_h \in V_h$ t. q.

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h) + \int_\Gamma g v_h \quad \forall v_h \in V_h.$$

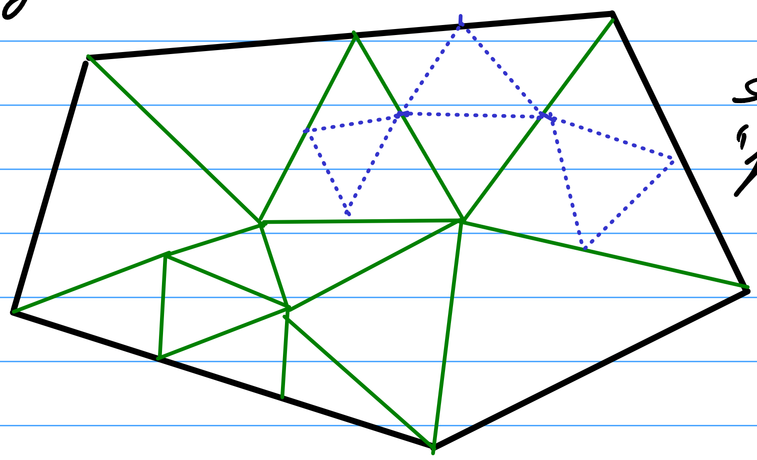
$$a(u_h, v_h) = \int_\Omega \nabla u_h \nabla v_h + u_h v_h .$$

Como antes: $\|u - u_h\| \leq \|u - v_h\| \; \forall v_h \in V_h$
$\leq Ch.$

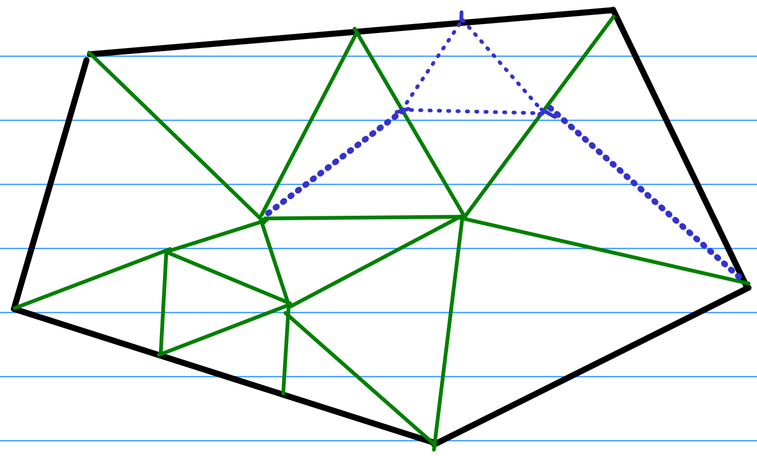
PROGRAMAÇÃO

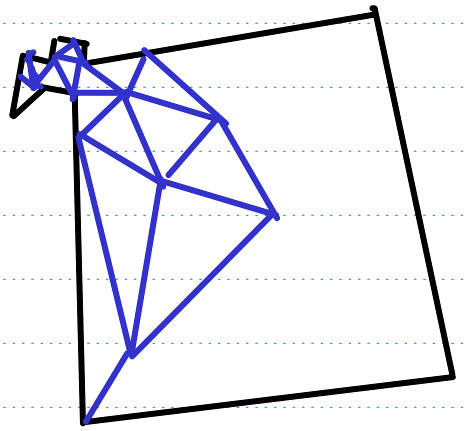
- Entrada de dados
- Geração da malha T_h
- montagem de $A\underline{u} = \underline{b}$
  - matrizes elementares
  - matriz global A
  - montagem do vetor $\underline{b}$
- Resolver $A\underline{u} = \underline{b}$
- Saída dos resultados

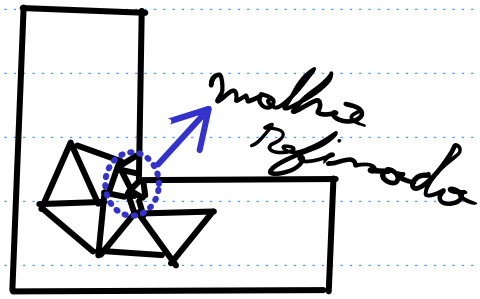
- Geração de malhas:



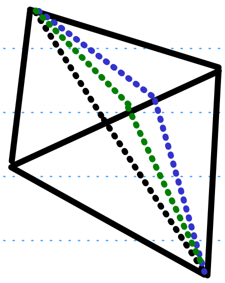
exemplo de "poluição"







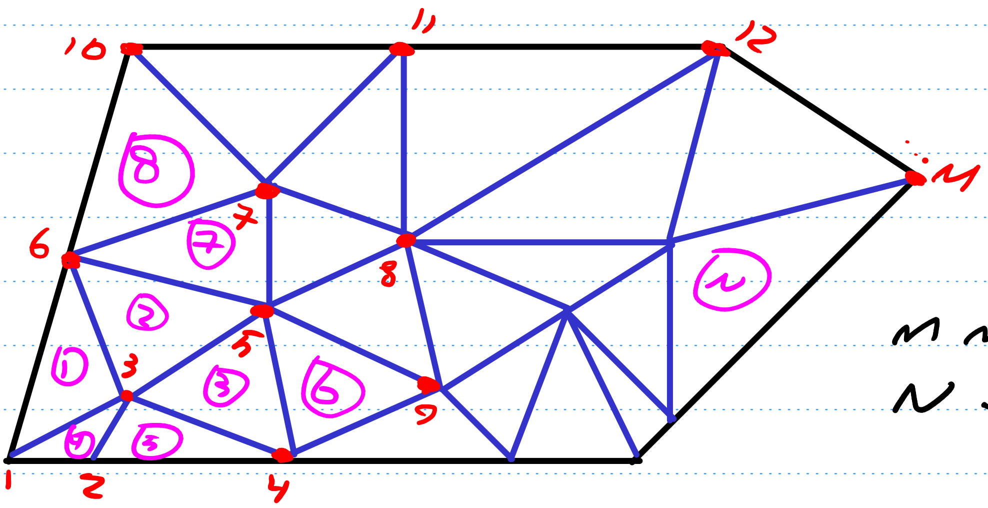
A ser evitado:



geração de elementos distorcidos

montagem das matrizes

- Estrutura de dados:



M vértices
N elementos

matrizes determinando T_h:

$Z \in \mathbb{R}^{2\times M}$: $z_{i,j}$ = coordenada x_i do nó N_j

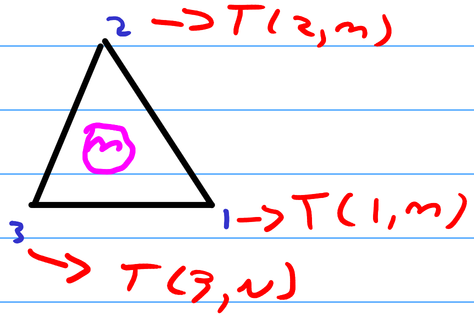
$T \in \mathbb{R}^{3\times N}$: $T_{i,j}$ = # global do i-ésimo nó (local) do elemento j.

Na malha acima:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & \\ 3 & 5 & 5 & \cdots \\ 6 & 6 & 3 & \end{bmatrix}$$

Montagem das matrizes locais (ou elementos)

Fixado elemento $m \in \{1, \dots, N\}$
e nós locais $\alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}$ (globalmente são os nós $T(\alpha, m)$ e $T(\beta, m)$)



• numeração global
• numeração local
• número do elemento

funções de base

• Calcula $a^m_{\alpha\beta} = \int_{K_m} \nabla\varphi_\alpha \cdot \nabla\varphi_\beta$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$

m-ésimo elemento

$b_\alpha = \int_{K_m} f \cdot \varphi_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$

• Soma contribuições locais na matriz global:

$$A(T(\alpha, m), T(\beta, m)) \leftarrow A(T(\alpha, m), T(\beta, m)) + a^m_{\alpha\beta}$$

$$b(T(\alpha, m)) \leftarrow b(T(\alpha, m)) + b_\alpha$$

Resolução sistemas lineares

- métodos diretos
- métodos iterativos

Obs: suponha que em parte $\Gamma_D \subseteq \Gamma$ u seja dado: $u|_{\Gamma} = u_D$. Suponha que o nó N_{15} esteja em Γ_D e que $u_{15} = u_h(N_{15})$ seja conhecido e $u_{15} = 5$. Então modificamos a matriz A e o lado direito b:

$$
\begin{array}{r}
\\ \\ 15^a \text{ linha} \to \\ \\ \\
\end{array}
\begin{bmatrix}
 & \ddots & & \vdots & & & \\
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & \vdots & & \ddots & \\
 & & & \uparrow & & & \\
 & & & 15^a \text{ coluna} & & &
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{14} \\ u_{15} \\ \vdots \\ u_M \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{14} \\ 5 \\ b_{16} \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \to 15^a \text{ linha} \\ \\ \\ \\ \end{array}
$$

$\Rightarrow u_{15} = 5$.

FORMULAÇÃO ABSTRATA

- Seja V um espaço de Hilbert (i.e. espaço vetorial completo)
- seja $a: V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilinear
- seja $L: V \to \mathbb{R}$ forma linear

Suponha:

i) $a(\cdot,\cdot)$ seja simétrica

ii) $a(\cdot,\cdot)$ seja contínua, i.e., existe $\gamma > 0$ t.q.

$$a(v,w) \leq \gamma \|v\|_V \|w\|_V \quad \forall v, w \in V$$

iii) $a(\cdot,\cdot)$ seja elíptica, i.e., existe $\alpha > 0$ t.q.

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V.$$

iv) $L(\cdot)$ seja contínua, i.e., existe $\Lambda \geq 0$ t.q.

$$L(v) \leq \Lambda \|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

Considere o problema de minimização: achar $u \in V$ t.q.

$$(M) \quad u = \underset{v \in V}{\operatorname{argmin}} F(v) \qquad \left(\Rightarrow F(u) \leq F(v) \ \forall v \in V \right)$$

onde $F(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - L(v)$.

(V) Achar $u \in V$ t.q.

$$a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V.$$

Teorema: (M) e (V) são equivalentes. Além disto existe uma única solução $u \in V$ p/ estes problemas, assumindo (1)-(10). Além disto

$$\|u\|_V \leq \frac{\Lambda}{\alpha}$$

Dem: Existência e unicidade é uma aplicação direta do Teorema da Representação de Riesz em espaços de Hilbert.

Para ver que (M) ⇒ (V), seja $\varepsilon \in \mathbb{R}$ e $v \in V$. Então $g(\varepsilon) = F(u+\varepsilon v)$

⇒ g tem mínimo em $\varepsilon = 0$ ⇒ $g'(0) = 0$.

Mas

$$g(\varepsilon) = F(u+\varepsilon v) = \frac{1}{2} a(u+\varepsilon v, u+\varepsilon v) - L(u+\varepsilon v)$$
$$= \varepsilon^2 \frac{1}{2} a(v,v) + \frac{\varepsilon}{2} a(u,v) + \frac{\varepsilon}{2} a(v,u) + \frac{1}{2} a(u,u)$$
$$- L(u) - \varepsilon L(v)$$

$$\Rightarrow g'(\varepsilon) = \varepsilon\, a(v,v) + \frac{1}{2} a(u,v) + \frac{1}{2} a(v,u) - L(v)$$

$$\Rightarrow g'(0) = a(u,v) - L(v) = 0 \Rightarrow (V) \text{ vale.}$$

Finalmente:

$$\alpha \|u\|_V^2 \leq a(u,u) = L(u) \leq \Lambda \|u\|_V$$
$$\Rightarrow \|u\|_V \leq \frac{\Lambda}{\alpha}. \quad \square$$

Obs: mesmo sem simetria de $a(\cdot,\cdot)$ valem os resultados acima, mas não há um problema de minimização associado

DISCRETIZAÇÃO

Seja $V_h \subseteq V$ subespaço vetorial de dimensão finita.

Seja $n = \dim V_h$, e $\{\varphi_i : i = 1, \dots, n\}$ base de V_h.

Considere os problemas de achar $u_h \in V_h$ t.q.

$$(M_h) \quad u_h = \underset{v_h \in V_h}{\operatorname{argmin}} F(v_h)$$

Obs: note que $F(u) \leq F(u_h)$.

$$(P_h) \quad a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

método de Galerkin

Reescrevendo o problema acima (P_h) em termos das funções de base:

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i \varphi_i(x)$$

$$\Rightarrow \quad a(u_h, \varphi_j) = L(\varphi_j) \quad j = 1, \dots, n$$

Obtenho então

$$\sum_{i=1}^{M} a(\varphi_i, \varphi_j)\, u_i = L(\varphi_j) \quad , \; j = 1, \dots, M$$

Em forma matricial:

$$(A_h) \quad A\vec{u} = \vec{L} \quad \text{onde } \vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_M \end{bmatrix}, \; \vec{L} = \begin{bmatrix} L(\varphi_1) \\ \vdots \\ L(\varphi_M) \end{bmatrix}.$$

$$\text{e } A_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j).$$

Note que:

(1)

- a simétrica $\Rightarrow$ A simétrica

$$A_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = a(\varphi_j, \varphi_i) = A_{ji} \quad , \; i, j = 1, \dots, M.$$

- Elipcidade de $a(\cdot,\cdot)$ $\Rightarrow$ A positiva definida

$$\vec{v} \cdot A\vec{v} = \sum_{i=1}^{M} v_i \Big(\sum_{j=1}^{M} A_{ij} v_j \Big) = \sum_{i=1}^{M} v_i \Big(\sum_{j=1}^{M} a(\varphi_i, \varphi_j)\, v_j \Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{M} v_i \; a(\varphi_i, v_h) = a(v_h, v_h) \geq \alpha \|v_h\|_V > 0$$

onde $v_h = \sum_{j=1}^{M} v_j \varphi_j \neq 0$.

Concluímos então que A é SPD.

(2) Note que $\forall v_h = \sum_{i=1}^{M} v_i \varphi_i$

$$F(v_h) = \frac{1}{2} a(v_h, v_h) - L(v_h)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M} v_i \sum_{j=1}^{M} v_j \, a(\varphi_i, \varphi_j) - \sum_{i=1}^{M} L(\varphi_i) v_i$$

$$= \frac{1}{2} \vec{v} \cdot A\vec{v} - \vec{b} \cdot \vec{v}$$

Logo $\vec{u} = [u_1, \ldots, u_M] = \underset{\vec{v} \in \mathbb{R}^M}{\operatorname{argmin}} \left[\frac{1}{2} \vec{v} \cdot A\vec{v} - \vec{b} \cdot \vec{v} \right]$ (A_h')

Assim como em dimensão finita, o problema de dim. fin. é bem-posto.

Teo: Existe um único $\vec{u} \in \mathbb{R}^M$ t.q. (A_h) e (A_h') valham. Além disto

$$\|u_h\|_V \leq \frac{\Lambda}{\alpha}, \quad p/ \; u_h = \sum_{i=1}^{M} u_i \varphi_i .$$

Dem: Como A é SPD, então $A\vec{u} = \vec{b}$ tem única solução. Como (A_h) e (A_h') são equivalentes, então (A_h') tem também sol. única.

Além disto

$$\alpha \|u_h\|_V^2 \leq a(u_h, u_h) = L(u_h) \leq \Lambda \|u_h\|_V$$

$$\Rightarrow \|u_h\|_V \leq \frac{\Lambda}{\alpha}, \text{ se } u_h \neq 0. \; \square$$

Lema de Céa: Seja $u \in V$ t.q.
$$a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V$$
e $u_h \in V_h \subseteq V$ t.q.

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V$$

Então $\|u-u_h\|_V \leq \frac{\gamma}{\alpha} \|u - v_h\|_V \quad \forall v_h \in V_h$.

Dem:
$$\alpha \|u-u_h\|^2 \leq a(u-u_h, u-u_h)$$
$$= a(u-u_h, u) - \underbrace{a(u-u_h, u_h)}_{=0}$$

pois $a(u-u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$.
Logo $\forall v_h \in V_h$:
$$\Rightarrow \alpha \|u-u_h\|^2 = a(u-u_h, u) - \underbrace{a(u-u_h, v_h)}_{=0}$$

$$= a(u-u_h, u-v_h)$$

$$\leq \gamma \|u-u_h\|_V \|u-v_h\|_V$$
$$\Rightarrow \|u-u_h\|_V \leq \frac{\gamma}{\alpha} \|u-v_h\|_V \quad \forall v_h \in V_h. \quad \square$$

2.3 NORMA DA ENERGIA

Seja $\|v\|_a = [a(v,v)]^{\frac{1}{2}}$ p/ $\forall v \in V$.

Pelas propriedades de $a(\cdot,\cdot)$,

$\|\cdot\|_a$ é uma norma.

Em geral $\|\cdot\|_a \neq \|\cdot\|_V$. Entretanto

elas são equivalentes, i.e.,
existem constantes c_1, c_2 t.q.

$$c_1\|v\|_V \leq \|v\|_a \leq c_2\|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

De fato:

- $c_1 = \alpha^{\frac{1}{2}}$ pois $\alpha\|v\|^2 \leq a(v,v) = \|v\|_a^2$
- $c_2 = \sqrt{\gamma}$ pois $\|v\|_a^2 = a(v,v) \leq \gamma\|v\|_V\|v\|_2$
$= \gamma\|v\|_V^2$

Nesta "nova" norma:

$$\|u-u_h\|_a^2 = a(u-u_h, u-u_h) \overset{\forall v_h \in V_h}{=} a(u-u_h, u-v_h)$$

$$\underset{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leq} \|u-u_h\|_a \|u-v_h\|_a$$

$$\Rightarrow \|u-u_h\|_a \leq \|u-v_h\|_a \quad \forall v_h \in V_h$$

O método de Galerkin resulta na melhor aproximação na norma da energia.

Exemplos:

2.1 - Seja $V = H^1(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

$$a(v,w) = \int_\Omega (\nabla v \cdot \nabla w + v w)\, d\underline{x} \quad , v, w \in H^1(\Omega$$

$$L(v) = \int_\Omega f v \, d\underline{x}$$

onde $f \in L^2(\Omega)$.

Vimos que as formas acima definem um problema de Neumann com $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ em $\Gamma = \partial\Omega$.

Note que

i) $a(v,w) = a(w,v)$. Logo $a(\cdot,\cdot)$ é sim.

ii)

$$a(v,w) = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w + \int_\Omega v w$$

$$\leq \underbrace{\left(\int_\Omega |\nabla v|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{a_1} \underbrace{\left(\int_\Omega |\nabla w|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{b_1} + \underbrace{\left(\int_\Omega v^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{a_2} \underbrace{\left(\int_\Omega w^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{b_2}$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{b} \leq \|\vec{a}\|_2 \, \|\vec{b}\|_2$$

$$= (a_1^2 + a_2^2)^{\frac{1}{2}} \, (b_1^2 + b_2^2)$$

$$= \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 + v^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla w|^2 + w^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|v\|_{H^1} \, \|w\|_{H^1}$$

$$\Rightarrow a(v,w) \leq \|v\|_{H^1} \|w\|_{H^1} \quad (\text{continuidade de } a(\cdot,\cdot))$$

iii) $a(v,v) = \|v\|_{H^1}^2 \Rightarrow$ coercividade $(\alpha = 1)$

iv) $L(v) = \int_\Omega f v \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_V$

$\Rightarrow L(\cdot)$ é contínua $(\Lambda = \|f\|_{L^2(\Omega)})$.

Exemplo 2.2: $V = H_0^1(I)$; $I = (0,1)$

$a(v,w) = \int_I v' w' \, dx$; $L(v) = \int_I f v$

corresponde ao problema forte

$$\begin{cases} -u'' = f \text{ em } I \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Note que $a(\cdot,\cdot)$ é simétrica e contínua

$$a(v,w) = \int_I v' w' \overset{C.S.}{\leq} \|v'\|_{L^2(I)} \|w'\|_{L^2(I)}$$

Note que

$$\|v'\|_{L^2(I)}^2 = \int_I (v')^2 \leq \int_I v^2 + (v')^2 \, dx = \|v\|_{H^1(I)}^2$$

$\Rightarrow a(v,w) \leq \|v\|_{H^1} \|w\|_{H^1} \quad \forall v, w \in H_0^1$.

e $L(w) = \int_I f w \overset{C.S}{\leq} \|f\|_{L^2(I)} \|w\|_{L^2(I)}$

$\Rightarrow L(\cdot)$ é contínua.

Fica faltando mostrar que

$a(\cdot,\cdot)$ é V-elítica, i.e. $\exists\, \alpha > 0$ t.q.

$a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2_{H^1}$

Note que $a(v,v) = \int_I (v')^2$ e $\|v\|^2_{H^1} = \int_I v^2 + v'^2$

DESIGUALDADE DE POINCARÉ

Desafio: mostrar que $\int_I v^2 \leq \tilde{\alpha} \int_I (v')^2$

Mas $v(x) = \underbrace{v(0)}_{=0 \text{ pois } v \in H_0^1(I)} + \int_0^x v'(s)\, ds$

$\Rightarrow v(x) \leq \left(\int_0^x (v')^2 \right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\int_0^x ds \right)^{\frac{1}{2}}}_{\leq 1 \text{ pois } |x| \leq 1} \leq \|v'\|_{L^2(I)}$

$\Rightarrow \int_0^1 v^2\, ds \leq \int_0^1 \|v'\|^2_{L^2(I)}\, ds$

$\leq \|v'\|^2_{L^2(I)} \Rightarrow \|v\|_{L^2(I)} \leq \|v'\|_{L^2(I)}$.

Voltando à coercividade:

$a(v,v) = \int_I (v')^2 = \frac{1}{2}\|v'\|^2_{L^2(I)} + \frac{1}{2}\|v'\|^2_{L^2(I)}$

$\geq \frac{1}{2}\|v'\|^2_{L^2(I)} + \frac{1}{2}\|v\|^2_{L^2(I)} = \frac{1}{2}\|v\|^2_{H^1(I)}$

$\Rightarrow a$ é V-elítica com $\alpha = \frac{1}{2}$.

NOTAÇÃO: $D^\alpha v = \dfrac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$

$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$ e $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$

e.g. $D^\alpha = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $\alpha = (2, 0)$

$D^\alpha = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$, $\alpha = (1, 1)$

$D^\alpha = \dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\alpha = (1, 0)$

Definimos

$$H^k(\Omega) = \{ v \in L^2(\Omega) : D^\alpha v \in L^2(\alpha), |\alpha| \leq k \}$$

$$\|v\|_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha v|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Exemplo:

$$H^2(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \in L^2(\Omega) \right\}$$

$$\|v\|^2_{H^2(\Omega)} = \int_\Omega \left[v^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right|^2 \right] dx$$

Exemplo 2.5: considere

$$\begin{cases} \Delta \Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \Gamma = \partial \Omega \end{cases}$$

Seja

$$H_0^2(\Omega) = \{v \in H^2(\Omega) : v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ em } \Gamma\}$$

Então

$$\int_\Omega f v = \int_\Omega (\Delta \Delta u) v = -\int_\Omega \nabla(\Delta u) \cdot \nabla v +$$

$$\int_\Gamma \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n} \underbrace{v}_{0} = \int_\Omega \Delta u \Delta v - \int_\Gamma \Delta u \, \underbrace{\frac{\partial v}{\partial n}}_{0} = \int_\Omega \Delta u \Delta v$$

Obtemos assim a formulação variacional

$u \in H_0^2(\Omega)$ é t.q.

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^2(\Omega)$$

$$a(u, v) = \int_\Omega \Delta u \Delta v \; ; \; L(v) = \int_\Omega f v$$

Dificuldade: $a(v, v) \geq \alpha \|v\|_{H^2}^2$

em particular

$$a(v) = \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)^2 \overset{?}{\geq} \bar{\alpha} \int_\Omega \left|\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right|^2$$

Exemplo (advecção-difusão-reação)

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e

$\Rightarrow$ $-\mu \Delta u + \underline{\beta} \cdot \underline{\nabla} u + u = f$ em Ω ; $u = 0$ em Γ

onde $\mu > 0$ e $\underline{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$ é vetor constante.

Forma variacional: $a(u,v) = L(v)$ $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$a(v,w) = \int_\Omega \mu \nabla v \cdot \nabla w + \int_\Omega \underline{\beta} \cdot \underline{\nabla} v\, w + \int_\Omega v w$$

$$L(v) = \int_\Omega f v$$

V-eliticidade:

$$a(v,v) = \int_\Omega \mu |\nabla v|^2 + \int_\Omega (\underline{\beta} \cdot \underline{\nabla} v) v + \int_\Omega v^2$$

Note que $\underline{\beta} \cdot \underline{\nabla} v = \operatorname{div}(\underline{\beta} v) = \underbrace{\cancel{\operatorname{div} \underline{\beta}}}_{=0} v + \underline{\beta} \cdot \underline{\nabla} v$

$$\Rightarrow \int_\Omega \underline{\beta} \cdot \nabla v\, v = \int_\Omega \operatorname{div}(\underline{\beta} v)\, v$$

$$= -\int_\Omega (\underline{\beta} v) \cdot \underline{\nabla} v + \int_\Gamma \overbrace{\cancel{v^2}}^{=0} \underline{\beta} \cdot \underline{n} = -\int_\Omega v (\underline{\beta} \cdot \underline{\nabla} v)$$

$$\Rightarrow \int_\Omega (\underline{\beta} \cdot \underline{\nabla} v)\, v = 0.$$

Portanto

$$a(v,v) = \mu \int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_\Omega v^2$$
$$\geq \min\{1,\mu\} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 + v^2 \right)$$
$$= \min\{1,\mu\} \, \|v\|^2_{H^1(\Omega)}$$

$\Rightarrow \alpha = \min\{1,\mu\}$. Se $\mu \ll 1$, então $\alpha = \mu$.

Então o erro do MEF:

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\|b\|_{L^\infty}}{\alpha} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v_h \in V_h$$
$$\lesssim \frac{\|b\|}{\alpha} h \|u\|_{H^2(\Omega)}$$

usando V_h espaço polin. lineares por partes.

Observe que se $\mu \ll 1$ então $\alpha = \mu$ e a estimativa acima é má notícia. Só para piorar, $\|u\|_{H^2(\Omega)}$ também depende de μ.

Exemplo 2.7:

Seja $\begin{cases} -\operatorname{div}(\underline{\underline{k}}\,\underline{\nabla} u) = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega = \Gamma \end{cases}$

onde $\underline{\underline{k}}(x) = \begin{pmatrix} k_{11}(x) & k_{12}(x) \\ k_{12}(x) & k_{22}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}_{sim}$ é SPD

e $\underline{\xi}^T \underline{\underline{k}}(x)\,\underline{\xi} \geq \alpha \|\underline{\xi}\|^2 \quad \forall\, \underline{\xi} \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \Omega.$

Para obter a forma bilinear:

$$\int_\Omega f v = \int_\Omega -\operatorname{div}(\underline{\underline{k}}\,\underline{\nabla} u)\, v = \int_\Omega (\underline{\underline{k}}\,\underline{\nabla} u)\cdot \underline{\nabla} v$$

$$+ \int_\Gamma (k\,\nabla u)\cdot \underline{n}\, \cancel{v}^{\,0} = \int_\Omega (\underline{\underline{k}}\,\underline{\nabla} u)\cdot \underline{\nabla} v$$

Formulação variacional

$a(u,v) = l(v)$

$a(u,v) = \int_\Omega \left(\underline{\underline{k}}(x)\, \nabla u\right) \cdot \nabla v \;;\; l(v) = \int_\Omega f v$

Coercividade:

$a(v,v) = \int_\Omega k \nabla v \cdot \nabla v \geq \alpha \int_\Omega |\nabla v|^2$

$\geq \bar{\alpha}\, \alpha\, \|v\|^2_{H^1}$ (usando Poincaré)

Formulação alternativa:

$\underline{q} = \underline{\underline{k}} \nabla u$ pode ser de maior interesse.

reescrevo o problema forte

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \underline{q} = f \\ \underline{q} - \underline{\underline{k}} \nabla u = 0 \end{cases}$$

LISTA: escolham 6 exercícios do cap 2.
entrega: 18/05

ALGUNS ESPAÇOS DE ELEMENTOS FINITOS

Exigências sobre V_h: $V_h \subseteq V$.
V_h é composto por polinômios p. partes

Então:

$$V_h \subseteq H^1(\Omega) \Leftrightarrow V_h \subseteq C^0(\Omega)$$

$$V_h \subseteq H^2(\Omega) \Leftrightarrow V_h \subseteq C^1(\Omega)$$

onde

$$C^0(\bar{\Omega}) = \{v : v \text{ é cont. em } \bar{\Omega}\}$$
$$C^1(\bar{\Omega}) = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) : D^\alpha v \in C^0(\bar{\Omega}), |\alpha| = 1\}$$

Ref: de derivadas generalizadas
Axelsson e Barker ; Brezis(?), ...

Para definir V_h é necessário

- $\mathcal{T}_h = \{K\}$ partição de Ω
- especificar as funções em V_h
- os parâmetros que determinam cada função de V_h

Alguns exemplos de espaços de elementos finitos

Considere $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, $J_h = \{K : K \text{ são triâng.}\}$

Defina $P_n(K) = \{v : K \to \mathbb{R} : v \text{ é polinômio do grau} \leq n\}$

Exemplo: $P_1(K) = \{a_0 + a_1 x + a_2 y : a_i \in \mathbb{R}\}$

Note que $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$, onde $\psi_1(x,y) = x$;
$\psi_2(x,y) = y$; $\psi_3(x,y) = 1$, é base do $P_1(K)$

Em particular $\dim P_1(K) = 3$.

Exemplo: funções quadráticas

$$P_2(K) = \{a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 y^2 + a_5 xy : a_i \in \mathbb{R}\}$$

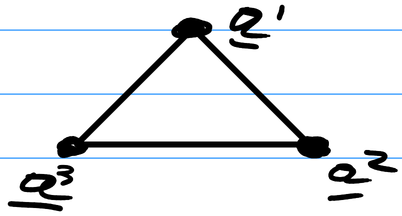
Então $\{1, x, y, x^2, y^2, xy\}$ é base do $P_2(K)$ e $\dim P_2(K) = 6$.

Considere agora

$$V_h = \{ v \in C^0(\bar{\Omega}) : v|_K \in P^1(K), K \in \mathcal{T}_h \}$$

Para determinarmos $v_h \in V_h$ definimos como parâmetros (graus de liberdade) o valor de v_h nos nós.

Teo: seja K triângulo com vértices $\underline{a}^i = (a_1^i, a_2^i)$. Então uma função $v_h \in P_1(K)$ é unicamente determinada por $v_h(\underline{a}^i)$, $i = 1, 2, 3$.



Dem: Seja $v \in P_1(K)$; então, por definição existem $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ t.q.

$$v(x,y) = c_1 x + c_2 y + c_3$$

Então $v(\underline{a}^i) = \alpha_i$, $i = 1,2,3 \iff$

$$\begin{cases} c_1 a_1^1 + c_2 a_2^1 + c_3 = \alpha_1 \\ c_1 a_1^2 + c_2 a_2^2 + c_3 = \alpha_2 \\ c_1 a_1^3 + c_2 a_2^3 + c_3 = \alpha_3 \end{cases}$$

Então

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & 1 \\ a_1^2 & a_2^2 & 1 \\ a_1^3 & a_2^3 & 1 \end{bmatrix}}_{B \in \mathbb{R}^{3\times 3}} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

Para saber se os valores $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ determinam c_1, c_2, c_3 de forma única basta ver se $\det B \neq 0$.

Lembrando que $\frac{1}{2} \det B = \text{Área}(K)$.

Então B é invertível (a menos que K seja degenerado).

Então os coeficientes c_i, $i=1,2,3$, são determinados por $\alpha_i = \nu(\underline{a}^i)$ $i=1,2,3$.

Uma forma "mais simples" de determinar se $\nu(\underline{a}^i)$ fixa de forma única $\nu \in P'(k)$ é mostrar que $\nu(\underline{a}^i)=0$, $i=1,2,3$

$$\Rightarrow \nu(x,y)=0 \quad \forall x,y \in k.$$

Def: Considere agora $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ base de $P_1(k)$, onde

$\lambda_i(\underline{a}^j) = \delta_{ij}$; $i,j=1,2,3$

Note que $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ é LI pois se existem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ t.q.
$\alpha_1 \lambda_1(\underline{x}) + \alpha_2 \lambda_2(\underline{x}) + \alpha_3 \lambda_3(\underline{x}) = 0 \quad \forall \underline{x} \in k$

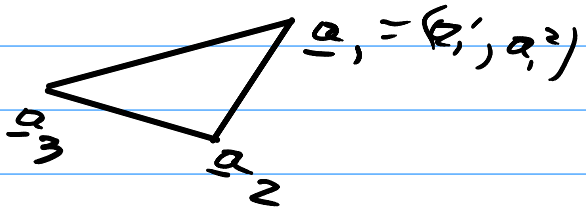
Então

$$\alpha_1\lambda_1(\underline{a}^1) + \alpha_2 \cancelto{0}{\lambda_2(\underline{a}^1)} + \alpha_3 \cancelto{0}{\lambda_3(\underline{a}^1)} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 0.$$

De forma análoga obtemos $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

A função λ_1 pode ser determinada da seguinte forma:



Seja $d_1 x + d_2 y + d_3 = 0$

a equação da reta passando por $\underline{a}_2$ e $\underline{a}_3$, i.e. seja

$$\pi = \{(x,y) : d_1 x + d_2 y + d_3 = 0\}$$

t.q. $\underline{a}_2$ e $\underline{a}_3 \in \pi$.

Seja $\lambda_1(x,y) = \gamma(d_1 x + d_2 y + d_3)$

onde $\gamma \in \mathbb{R}$ é tal que $\lambda_1(\underline{a}^1) = 1$.
Note que $\lambda_1(\underline{a}^2) = \lambda_1(\underline{a}^3) = 0$.

Note então que se $\tilde{v}_h \in P_1(K)$ t.q.

$\tilde{v}_h(\underline{a}^i) = 0 \quad , i=1,2,3$

então $\tilde{v}_h = 0$.

De fato, seja $\tilde{v}_h(\underline{x}) = c_1 \lambda_1(\underline{x}) + c_2 \lambda_2(\underline{x}) + c_3 \lambda_3(\underline{x})$, $\underline{x} \in K$.

Então $\tilde{v}_h(\underline{a}^1) = 0 \Rightarrow c_1 \underbrace{\lambda_1(\underline{a}^1)}_{=1} + c_2 \underbrace{\lambda_2(\underline{a}^1)}_{=0} + c_3 \underbrace{\lambda_3(\underline{a}^1)}_{=0} = 0$

$\Rightarrow c_1 = 0$. De forma análoga $c_2 = c_3 = 0$.

Seja agora

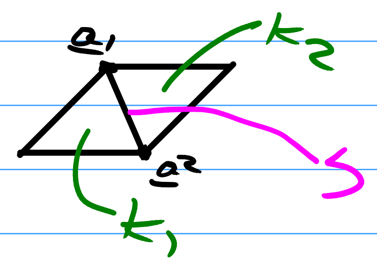
$V_h = \{ v : \Omega \to \mathbb{R} : v|_K \in P_1(K),\ K \in \mathcal{T}_h,$

v é contínua em todos os nós$\}$

Pergunta $V_h \subseteq C^0(\Omega)$

Resposta: sim. Como $v \in V_h$ é contínua no interior dos elementos e dos nós, falta confirmar a continuidade nas arestas.

Sejam K_1, K_2 dois elementos de $\mathcal{T}_h$ com aresta S em comum.



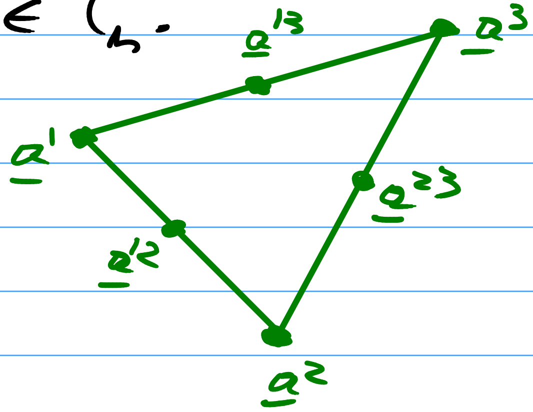
Seja $v_i = v|_{K_i}$, $i = 1, 2$.

Defino em S a função $w = v_1 - v_2$

Então $w = 0$ nos dois nós $\underline{a}^1$ e $\underline{a}^2$ da figura acima. Como w é linear então $w \equiv 0$.

3.2 - Seja $V_h = \{ v_h \in H^1(\Omega) : v_h|_K \in P_2(K), K \in \mathcal{T}_h \}$

Seja $K \in \mathcal{T}_h$.



Graus de liberdade p/ $v_h \in P_2(K)$:

$v_h(\underline{a}^i)$, $i = 1,2,3$ e $v_h(\underline{a}^{ij})$, $i<j$; $i,j = 1,2,3$

Quero mostrar que $v_h(\underline{a}^i) = v_h(\underline{a}^{ij}) = 0$

(p/ todos nós) $\Rightarrow v_h \equiv 0$.

Teo: $v_h \in P_2(K)$ é unicamente determinado pelos graus de liberdade nos nós acima.

Dem: Seja $v_h \in P_2(K)$ t.q.

$$v_h(\underline{a}^i) = v_h(\underline{a}^{ij}) = 0 \quad \forall i,j = 1,2,3,\ i<j.$$

Considere a aresta $e_{23} = \overline{\underline{a}^2\, \underline{a}^3}$. Temos que $v_h\big|_{e_{23}} = 0$.

De fato, $v_h\big|_{e_{23}}$ é quadrática e se anula em três ptos: $\underline{a}^2$, $\underline{a}^3$, $\underline{a}^{23}$. Então $v_h\big|_{e_{23}} = 0$.

Como $\lambda_1(\underline{x})$ também se anula em e_{23}, temos que $v_h(\underline{x}) = \lambda_1(\underline{x})\, w_1(\underline{x})$ (ver problema 3.3 do livro), para algum $w_1 \in P_1(K)$.

Note que, como v_h se anula em $\underline{a}^1$ e $\underline{a}^{13}$ temos que

$$0 = v_h(\underline{a}^1) = \lambda_1(\underline{a}^1)\, w_1(\underline{a}^1) = w_1(\underline{a}^1),$$

$$0 = v_h(\underline{a}^{13}) = \lambda_1(\underline{a}^{13})\, w_1(\underline{a}^{13}) = \tfrac{1}{2} w_1(\underline{a}^{13}).$$

Logo, $w_1(\underline{a}^1) = w_1(\underline{a}^{13}) = 0$.

Como $u_1 \in P_1(K)$ e se anula em dois ptos da aresta $e_{1,3} = \overline{\underline{a}_1\, \underline{a}_3}$, então $u_1|_{e_{1,3}} = 0$

Portanto $u_1(\underline{x}) = c\,\lambda_2(\underline{x})$, para alguma constante c.

Temos então $v_h = c\,\lambda_1 \lambda_2$. Usamos agora que

$$0 = v_h(\underline{a}^{12}) = c\,\lambda_1(\underline{a}^{12})\,\lambda_2(\underline{a}^{12}) = c \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

Então $c = 0$, e $v_h = 0$ em K. $\square$

Obs: $v_h \in P_2(K)$ é dado por

$$v_h(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{3} v_h(\underline{a}^i)\lambda_i(2\lambda_i - 1) + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{3} v_h(\underline{a}^{ij}) 4\lambda_i\lambda_j$$
$$= L(\underline{x})$$

Para ver que é verdade basta conferir:

i) Que o "lado direito" está em $P_2(K)$

ii) Que o "lado direito" é igual a v_h nos nós

Posso usar $L(\underline{x})$ para explicitar uma base p/ $P_2(K)$.

Seja $L_1 \in P_2(K)$ t.q. $L_1(\underline{a}^1) = 1$ e $L_1 = 0$ nos outros nós.

$$\Rightarrow L_1(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{3} L_1(\underline{a}^i)\lambda_i(2\lambda_i - 1) + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{3} L_1(\underline{a}^{ij}) 4\lambda_i\lambda_j$$

$$= L_1(\underline{a}^1)\lambda_1(2\lambda_1 - 1) = \lambda_1(2\lambda_1 - 1)$$

De forma análoga

$L_{12} \in P_2(K)$ t.q. $L_{12}(\underline{a}^{12}) = 1$ e $= 0$ nos demais.

Então

$$L_{12}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{3} L_{12}(\underline{a}^i)\lambda_i(2\lambda_i - 1) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}} L_{12}(\underline{a}^{ij}) 4\lambda_i\lambda_j$$

$$= 4\lambda_1\lambda_2$$

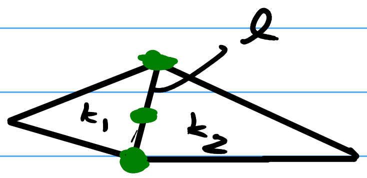
Construímos assim uma base p/ P_2

dada por $\{L_1, L_2, L_3, L_{12}, L_{13}, L_{23}\}$.

Finalmente suponha $v_h : \Omega \to \mathbb{R}$ t.q. $v_h|_K \in P_2(K)$ e suponha que

v_h seja unicamente determinado

em todos os nós de τ_h.



Seja $v_1 = v_h|_{K_1}$ e $v_2 = v_h|_{K_2}$.

Pergunta $d = (v_1 - v_2)\big|_e = 0$?

R. Sim pois d é quadrático no anulando em três nós.

Temos então que $v_h \in C^0(\Omega)$.

$\Rightarrow v_h \in V_h \subseteq H^1(\Omega)$.

Teoria de Aproximação (MEF)

motivação: erro no MEF:

$$\|u-u_h\|_V \leq \frac{\gamma}{\alpha} \|u-v_h\|_V \quad \forall v \in V_h$$

em particular p/ $v_h = \pi u$ (interpolador de u em V_h)

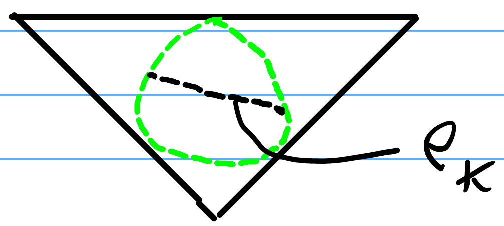
Interpolação em $P_1(K)$

Seja $V_h = \{ v_h \in H^1(\Omega) : v_h|_K \in P_1(K),\ K \in \tau_h \}$

Seja $K \in \tau_h$, e

h_K = diâmetro de K = "maior" lado de ∂K

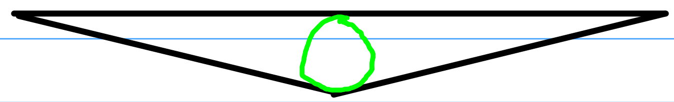
ρ_K = " do raio do círculo inscrito em K



Hipótese:

$$\frac{\rho_K}{h_K} \geq \beta \quad \forall K \in \tau_h$$

Dimero evitar



Seja $v : \Omega \to \mathbb{R}$ "suave".

Seja $\Pi v \in V_h$ interpolada de v nos nós dos elementos, i.e.

$$\Pi(v)(\underline{x}_i) = v(\underline{x}_i), \; i = 1, \ldots, M.$$

TEO: Seja K triângulo com vértices $\underline{a}^1, \underline{a}^2, \underline{a}^3$ e dado v "suave" e $\Pi v \in P_1(K)$ t.q. $\Pi(v)(\underline{a}^i) = v(\underline{a}^i)$, $i = 1, 2, 3$.

Então:

$$(4.3) \quad \| v - \Pi v \|_{L^\infty(K)} \leq 2 h_K^2 \max_{|\alpha|=2} \| D^\alpha v \|_{L^\infty(K)}$$

$$(4.4) \quad \max_{|\alpha|=1} \| D^\alpha (v - \Pi v) \|_{L^\infty(K)} \leq 6 \frac{h_K^2}{\rho_K} \max_{|\alpha|=2} \| D^\alpha v \|_{L^\infty(K)}$$

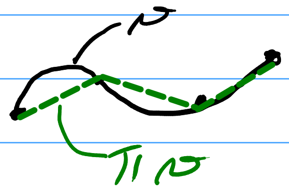
Obs: se $w \in C^0(K)$ então

$$\|w\|_{L^\infty(K)} = \max_{x \in K} |w(x)|.$$

Obs:

$$\|w\|_{L^\infty(K)} = \operatorname{sup\,ess}_{x \in K} |w(x)|$$

Rascunho: (em 1D)



erro tem relação com a curvatura de v (2ª derivada).

Dem: Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in P_1(K)$

t.q. $\lambda_i(\underline{a}_j) = \delta_{ij}$.

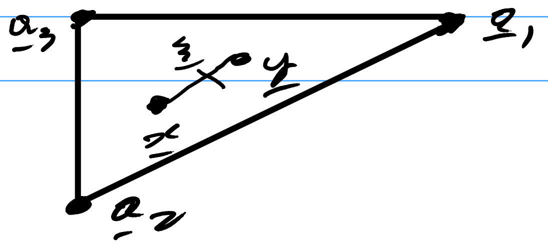
Então $\Pi(v) = v(\underline{a}_1)\lambda_1(\underline{x}) + v(\underline{a}_2)\lambda_2(\underline{x}) + v(\underline{a}_3)\lambda_3(\underline{x})$

Por Taylor, p/ $\underline{x} = (x_1, x_2) \in K$ fixo, $\underline{y} \in K$ fixo,

$$v(\underline{y}) = v(\underline{x}) + \nabla v(\underline{x}) \cdot (\underline{y} - \underline{x}) + R(\underline{x}, \underline{y}), \text{ onde}$$

$$R(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(\xi)(y_i - x_i)(y_j - x_j)$$

e $\underline{\xi}$ é um pto $\underline{\xi} \in K$.



Escolho $\underline{y} = \underline{a}^i$:

$$v(\underline{a}^i) = v(\underline{x}) + p_i(\underline{x}) + R_i(\underline{x})$$

onde

$$p_i^{(\underline{x})} = \nabla v(\underline{x}) \cdot (\underline{a}^i - \underline{x})$$

$$R_i(\underline{x}) = B(\underline{x}, \underline{a}^i)$$

Note que $|a_j^i - x_j| < h_k \quad i = 1,2,3; \; j = 1,2.$

$$\Rightarrow |R_i(\underline{x})| \leq \frac{1}{2} \sum_{l,j=1}^{2} \underbrace{\left| \frac{\partial^2 v}{\partial x_l \, \partial x_j}(\underline{\xi}) \right|}_{} \underbrace{|(a_l^i - x_l)|}_{\leq h_k} \underbrace{|(a_j^i - x_j)|}_{\leq h_k}$$

$$\leq \frac{1}{2} h_k^2 \max_{|\alpha| = 2} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(K)} \cdot 4$$

Sabemos que

$$\Pi v(x) = \sum_{i=1}^{3} v(\underline{a}^i) \lambda_i(\underline{x})$$

$$= \sum_{i=1}^{3} v(\underline{x}) \lambda_i(\underline{x}) + \sum_{i=1}^{3} p_i(x) \lambda_i(x) + \sum_{i=1}^{3} R_i(\underline{x}) \lambda_i(\underline{x})$$

Alguns resultados:

$$(4.9) \quad \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(\underline{x}) = 1$$

$$(4.10) \quad \sum_{i=1}^{3} p_i(\underline{x})\lambda_i(\underline{x}) = 0$$

(a provar)

Logo

$$\Pi v(x) - v(x) = \sum_{i=1}^{3} B_i(\underline{x})\lambda_i(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in K.$$

$$\Rightarrow \underbrace{\max_{x \in K} |\Pi v(x) - v(x)|}_{\|v - \Pi v\|_{L^\infty(K)}} \leq \max_{x \in K} \sum_{i=1}^{3} |B_i(x)|\,|\lambda_i(\underline{x})|$$

$$\leq \max_{x \in K} \left[\frac{1}{2} h_K^2 \max_{|\alpha|=2} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(K)} \cdot 4\right] \overbrace{\sum_{i=1}^{3} \lambda_i(\underline{x})}^{=1}$$

$$= 2 h_K^2 \max_{|\alpha|=2} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(K)}.$$

Outros resultados (a provar)

$$(4.11) \quad \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\lambda_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \lambda_i}_{=1\ (4.9)} = 0 \quad \checkmark$$

$$(4.12) \quad \sum_{i=1}^{3} p_i(x)\frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v}{\partial x_j}$$

Para mostrar:

$$(4.4)\quad \max_{|\alpha|=1} \| D^{\alpha}(v-\Pi v)\|_{L^\infty(K)} \leq 6\,\frac{h_K^2}{\rho_K} \max_{|\alpha|=2} \|D^{\alpha} v\|_{L^\infty_{C_K}}$$

Note que

$$\frac{\partial \Pi v(\underline{x})}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^{3} v(\underline{a}^i)\,\frac{\partial \lambda_i}{\partial x_1}(x)$$

De $v(\underline{a}^i) = v(\underline{x}) + p_i(\underline{x}) + R_i(x)$:

$$\frac{\partial \Pi v(\underline{x})}{\partial x_1} = v(x) \sum_{i=1}^{3} \underbrace{\frac{\partial \lambda_i}{\partial x_1}}_{\to 0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{3} p_i(x)\frac{\partial \lambda_i}{\partial x_1}}_{=\frac{\partial v}{\partial x_1}}$$

$$+ \sum_{i=1}^{3} R_i(x)\,\frac{\partial \lambda_i}{\partial x_1}$$

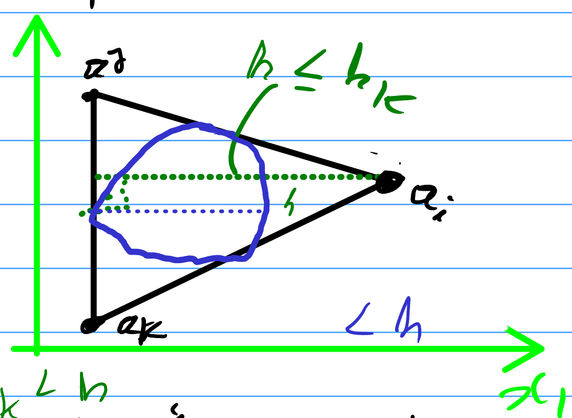
$$= \frac{\partial v}{\partial x_1}(\underline{x}) + \sum_{i=1}^{3} R_i\,\frac{\partial \lambda_i}{\partial x_1}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_1}(v-\Pi v) = -\sum_{i=1}^{3} R_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_1}$$

Note que $\dfrac{\partial \lambda_i}{\partial x_1} \leq \dfrac{1}{\rho_K}$

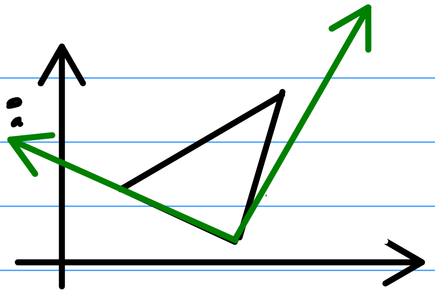
$\parallel$

$\dfrac{1}{h} < \dfrac{1}{\rho_K}$



Sei que $\lambda_i(a^k) = \lambda_i(a^j) = 0$ e $\lambda_i(a^i) = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial \lambda_i}{\partial x_1} = \dfrac{1}{h}$.

Caso geral:



Sugestão: mudar o sistema de coordenadas (preto $\to$ verde).

Então

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_1}(v - \Pi v)\right| \leq 6\,\frac{h_K^2}{\rho_K}\max_{|\alpha|=2}\|D^\alpha v\|_{L^\infty(K)}.$$

$\boxed{//}$

(4.9): $\sum \lambda_i(x) = 1.$

Dem.: De fato, considere $v(x) = 1$.

Então $1 = v(x) = \Pi v(x) = \sum_{i=1}^{3} \underbrace{v(a^i)}_{=1} \lambda_i(x)$

$= \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(x) \quad \forall x \in K.$

(4.10) $\sum_{i=1}^{3} p_i(\underline{x})\lambda_i(\underline{x}) = 0$; $p_i(x) = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial v}{\partial x_j}(\underline{x})(a_j^i - x_j)$

Dem: seja $v = d_1 x_1 + d_2 x_2 \in P^1(K)$, $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \Pi v = v$ e

$p_i = \sum_{j=1}^{2} d_j (a_j^i - x_j)$ e $R_j = 0$

$$\Rightarrow v(x) = \Pi v(x) \overset{\text{fórmula anterior (Taylor)}}{=} v(x) + \sum_{j=1}^{2} d_j (a_j^i - x_j)\lambda_j(\underline{x})$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{2} d_j (a_j^i - x_j)\lambda_j(\underline{x}) = 0$$

Para terminar escolher $d_j = \frac{\partial v}{\partial x_j}(\underline{x})$. $\boxed{\equiv}$

Para os espaços $H^m(\Omega)$, $m = 0, 1$.

(Obs: $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$)

Def: seminormas

$$|v|_{H^m(\Omega)} = \left[\sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |D^\alpha v|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Nem sempre é norma pois

$v \equiv 1 \Rightarrow |v|^2_{H^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2 = 0$

mas $v \neq 0$.

Thm 4.2: Seja $v \in H^2(K)$ e $\Pi(v) \in P^1(K)$

$$\| v - \Pi v \|_{L^2(K)} \leq C h_K^2 | v |_{H^2(K)} ,$$

$$| v - \Pi v |_{H^1(K)} \leq C \frac{h_K^2}{\rho_K} | v |_{H^2(K)} .$$

Estimativa global (em Ω)

Seja $v \in H^2(\Omega)$ e $\Pi v \in V_h = \{ v_h \in C^0(\Omega) : v_h|_K \in P_1(K) \ K \in \mathcal{T}_h \}$

Seja $\Pi(v)(x^i) = v(x^i)$ em todos os nós de $\mathcal{T}_h$. Então

$$\| v - \Pi v \|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega (v - \Pi v)^2 \, dx$$

$$= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (v - \Pi v)^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \| v - \Pi v \|^2_{L^2(K)} \leq \sum_K C h_K^4 | v |^2_{H^2(K)}$$

$$\underset{h_K \leq h}{\leq} C h^4 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} | v |^2_{H^2(K)} = C h^4 | v |^2_{H^2(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \| v - \Pi v \|_{L^2(\Omega)} \leq C h^2 | v |_{H^2(\Omega)}$$

De forma análoga

$$|v-\Pi v|^2_{H^1(\Omega)} = \sum_K |v-\Pi v|^2_{H^1(K)} \leq \sum_K C \frac{h_K^4}{\rho_K^2} |v|^2_{H^2(K)}$$

$$\underset{*}{\leq} C \sum_K \beta\, h_K^2 |v|^2_{H^2(K)} \leq C h^2 |v|^2_{H^2(\Omega)}$$

$\rho_K \geq \beta h_K$

$$\Rightarrow |v-\Pi v|_{H^1(\Omega)} \leq C h |v|_{H^2(\Omega)}.$$

Estimativas p/ polinômios de "alta" ordem

Em geral, p/ polinômios de ordem r:

$$\| u - \Pi_h u \|_{L^2(\Omega)} \leq C h^{r+1} |u|_{H^{r+1}(\Omega)}$$

$$|u - \Pi_h u|_{H^1(\Omega)} \leq C h^{r} |u|_{H^{r+1}(\Omega)}$$

Obs: se $u \in H^s(\Omega)$ somente, com $s < r+1$

então o erro é estimado como

$$\| u - \Pi_h u \|_{L^2(\Omega)} \leq C h^{s} |u|_{H^{s}(\Omega)}$$

$$|u - \Pi u|_{H^1(\Omega)} \leq C h^{s-1} |u|_{H^{s}(\Omega)}$$

4.4. Estimativas do erro de MEF p/ problemas elíticos

Lembrete: $\|u-u_h\|_V \leq c\|u-v_h\|_V \quad \forall v_h \in V_h$

usando a notação usual.

Em particular $\|u-u_h\|_V \leq C\|u-\Pi_h u\|_V$

Exemplo: se $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q.

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

se $u_h \in V_h \subseteq H_0^1(\Omega)$ t.q.

$$\int_\Omega \nabla u_h \nabla v_h = \int_\Omega f v_h \quad \forall v_h \in V_h$$

onde $V_h = \{v_h \in H_0^1(\Omega) : v_h \in P_r(K), K \in \mathcal{T}_h\}$

Então

$$\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c h^r |u|_{H^{r+1}(\Omega)}$$

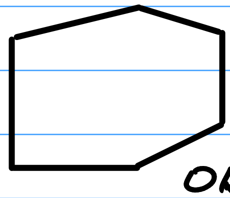
se $u \in H^{r+1}(\Omega)$.

Se $r=1$:

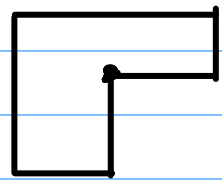
$$\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C h |u|_{H^2(\Omega)}$$

Regularidade de soluções de EDPs

Seja $-\Delta u = f$ em Ω; $u = 0$ em $\Gamma = \partial\Omega$.



Ok.



Problemas!

Se Γ for suave e $f \in H^r(\Omega)$ então

$$u \in H^{r+2}(\Omega) \quad \text{e} \quad \|u\|_{H^{r+2}(\Omega)} \le C\|f\|_{H^r(\Omega)}$$

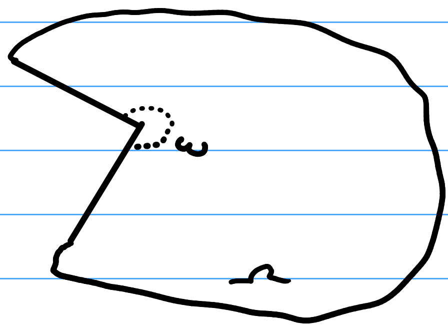
$\Rightarrow$ "ganha-se" duas derivadas

Em particular (p/ $r=0$)

$$f \in L^2(\Omega) \Rightarrow u \in H^2(\Omega).$$

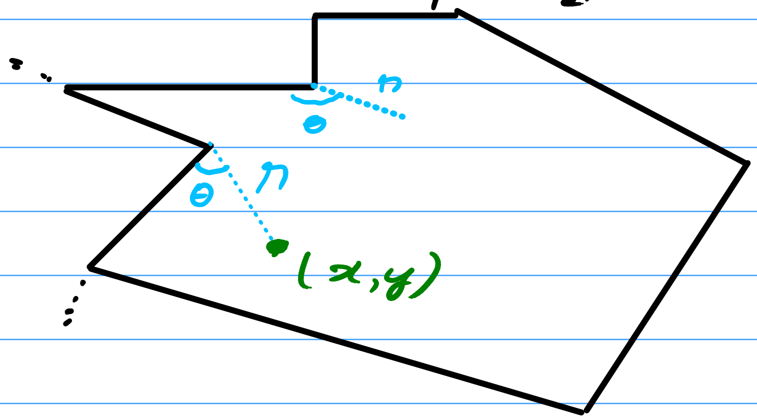
Se Γ não for suave então $u \notin H^2(\Omega)$ em geral (mesmo se f for suave!)

Exemplo: $u(r,\theta) = r^\gamma \alpha(\theta) + \beta(r,\theta)$; $\gamma = \dfrac{\pi}{\omega}$



(descrição "local" de u)

Coordenadas locais (polares): $(x,y) \longleftrightarrow (r,\theta)$



Seja então $u(r,\theta) = r^{\gamma}\alpha(\theta) + \beta(r,\theta)$; $\gamma = \frac{\pi}{\omega}$

onde $\alpha(\cdot)$ e $\beta(\cdot,\cdot)$ são suaves!

Se $\underbrace{\omega \leq \pi}_{\text{convexo}} \Rightarrow \gamma \geq 1 \Rightarrow u$ é suave $(u \in H^2(\Omega))$

Se $\underbrace{\omega > \pi}_{\text{não convexo}} \Rightarrow \gamma < 1 \Rightarrow u$ não é suave $(u \notin H^2(\Omega))$

Exemplo: Seja $u = r^{\gamma}\alpha(\theta) + \beta(r,\theta)$

Então $u \in H^s(\Omega)$ se $D^{\alpha}u \in L^2$ p/ $|\alpha| = s$.

$$\int_{\Omega} |D^{\alpha}u|^2 \sim \int_0^R \left| r^{\gamma-s} \right|^2 r\, dr$$

$$= \int_0^R r^{2(\gamma-s)+1} < \infty$$

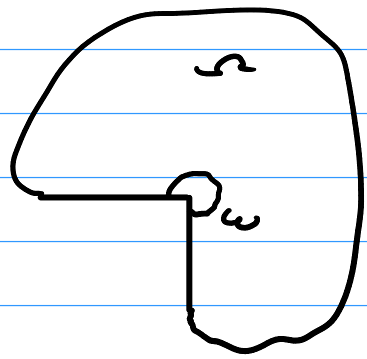
$\Leftrightarrow 2(\gamma - s) + 1 > -1$, i.e. $\gamma - s > -1$

$\Leftrightarrow \boxed{s < \gamma + 1}$ P/ $s=2$: $\gamma > 1$.

Estimativa de erro MEF:

$$\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)} \le C h^{s-1} \|u\|_{H^s(\Omega)}$$
$$= C h^{\gamma-\varepsilon} \|u\|_{H^{\gamma+1-\varepsilon}}$$

tomando ($s = \gamma+1-\varepsilon$) onde $\varepsilon > 0$



Considere $\omega = \frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{\omega} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow u \in H^s(\Omega)$, $\forall s < \gamma+1 = \frac{5}{3} < 2$.

Estimativa de erro p/ MEF:

$$\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)} \le C h^{\frac{2}{3}-\varepsilon} \|u\|_{H^{\frac{5}{3}-\varepsilon}}$$

$\forall \varepsilon > 0$ (mas $\|u\|_{H^{\frac{5}{3}-\varepsilon}} \to \infty$ se $\varepsilon \to 0$)

Métodos Adaptativos

Lembrete:

P/ u "suave":

$$\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|u-\Pi_h u\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\leq C\Big[\sum_{K\in T_h}\underbrace{\big(h_K |u|_{H^2(K)}\big)^2}_{\text{erro de interpolação em } K.}\Big]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C h |u|_{H^2(\Omega)}.$$

Objetivo: $\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C h$

P/ u "não suave":

Ideia: $h_K \sim C h\, d_K^{1-\gamma}$ (onde d_K é a distância de K ao vértice do Γ)

$$\|u-u_h\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C\|u-\Pi u_h\|^2_{H^1(\Omega)}$$

$$\leq C_\varepsilon \sum_K \left(h_K^{\gamma-\varepsilon}\|u\|_{H^{\gamma+1-\varepsilon}(K)}\right)^2 \overset{?}{\leq} Ch \quad \text{DESEJO}$$

ideia: escolher h_K t.q. $h_K^{\gamma}\|u\|_{H^{\gamma+1}(K)} \leq C h \|f\|_{L^2(K)}$

Próximo do "bico": h_K t.q. $h_K = h^{\frac{1}{\gamma}}$

Em geral: $h_K = C h\, d_K^{1-\gamma}$ (se $d_K \approx h_K \Rightarrow 1 = C h \cdot h_K^{-\gamma} \Rightarrow h_K = h^{\frac{1}{\gamma}}$)

$(h_K \leq d_K)$

Outros Problemas com singularidades:

- Placas
- Reação-difusão ($-\varepsilon\Delta u + u = f$ com $\varepsilon \ll 1$)

...

Métodos adaptativos

Quando não se conhece a singularidade:

Seja $\delta > 0$ uma tolerância, e quer-se buscar u_h t.q.

$$\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)} \lesssim \delta$$

Busca-se refinar elementos somente quando necessário. Espera-se que $\mathcal{T}_h$ seja tal que

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2 |u|^2_{H^2(K)} \sim \left(\frac{\delta}{c}\right)^2 .$$

Algoritmo:

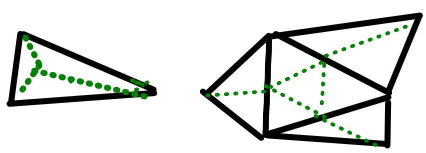
- Dada malha inicial $\tilde{\mathcal{T}}_h = \{\tilde K\}$, calcule $\tilde u_h$ (solução E.F.)

- Estime $|u|_{H^2(\tilde K)}$ usando $\tilde u_h$ (Dif. fin. etc.)

- Construa nova malha $\mathcal{T}_h = \{K\}$ refinando $\tilde{\mathcal{T}}_h$: refine cada $\tilde K \in \tilde{\mathcal{T}}_h$ t.q.

$$h_{\tilde K}^2 |\tilde u_h|^2_{H^2(\tilde K)} > \frac{\delta^2}{\tilde N c^2} \quad \left(\text{onde } |\tilde u_h|_{H^2(K)} \sim |u|_{H^2(K)}\right)$$

onde $\tilde N$ = número de elementos em $\tilde{\mathcal{T}}_h$.



- Calcule u_h na nova malha

- itere até $\sum h_K^2 |u|^2_{H^2(K)} < \frac{\varepsilon}{c}$

Obs: É possível usar ideias semelhantes com outros objetivos: L^2, H^2, etc.

Estimativas em $L^2(\Omega)$

Note que $\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C h |u|_{H^2(\Omega)}$

Como $\|u-u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u-u_h\|_{H^1(\Omega)}$

$\Rightarrow \|u-u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C h |u|_{H^2(\Omega)}$.

Entretanto $\|u-\Pi u\|_{L^2(\Omega)} \leq C h^2 |u|_{H^2(\Omega)}$

leva à conjectura que $\|u-u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C h^2 |u|_{H^2(\Omega)}$

Teo: Seja Ω poligonal, convexo, $u, u_h \in H_0^1(\Omega)$ soluções exata e EF de $-\Delta u = f$ em Ω. Então existe c t.q.

$$\|u-u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C h^2 |u|_{H^2(\Omega)}.$$

Dem: Seja $e = u - u_h$, $a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$.

$\Rightarrow \quad a(e, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$.

Seja $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ solução fraca de

$$\begin{cases} -\Delta \varphi = e & \text{em } \Omega \\ \varphi = 0 & \text{em } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

Como Ω é convexo, então $|\varphi|_{H^2(\Omega)} \leq C\|e\|_{L^2(\Omega)}$

Então

$$\|e\|_{L^2}^2 = \int_\Omega e^2\, dx = \int_\Omega (-\Delta\varphi)e \overset{e \in H_0^1(\Omega)}{=} \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla e = a(\varphi, e)$$

$$= a(\varphi - \Pi\varphi, e) \underset{C.S.}{\leq} |\varphi - \Pi\varphi|_{H^1(\Omega)} |e|_{H^1(\Omega)}$$

$$\leq C h |\varphi|_{H^2(\Omega)}\, h |u|_{H^2(\Omega)} \leq C h^2 \|e\|_{L^2(\Omega)} |u|_{H^2(\Omega)}$$

onde $\Pi\varphi \in V_h$ é o interpolante do φ.

$$\Rightarrow \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C h^2 |u|_{H^2(\Omega)}.$$

$\blacksquare$

Observação sobre $\|\cdot\|_{H^{-1}(\Omega)}$:

Estimativa de estabilidade.

$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\Lambda}{\alpha}$, onde $a(u,v) = L(v)\ \forall v \in H_0^1(\Omega)$

e $a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2_{H^1(\Omega)}$; $|L(v)| \leq \Lambda \|v\|_{H^1(\Omega)}$.

Então $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\Lambda}{\alpha}$ (estabilidade).

Pergunta: se $L(f) = (f,v)$, onde

$f: H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ é um funcional limitado.
$\quad v \mapsto (f,v)$

i.e. $f \in [H^1(\Omega)]' =: H^{-1}(\Omega)$.

ser limitado significa que

$\left|\left(f, \frac{v}{\|v\|}\right)\right| \leq \Lambda$ p/ todo $v \neq 0$, $v \in H_0^1(\Omega)$

Qual é o menor Λ possível?

$$\Lambda = \sup_{\substack{v \in H_0^1(\Omega)\\ v \neq 0}} \left|\left(f, \frac{v}{\|v\|}\right)\right|$$ (esta é a chamada norma do operador)

Consequência: $(f,v) \leq \Lambda \|v\|_{H^1(\Omega)}$.

Exemplo: Se $f \in L^2(\Omega)$ e

$L(v) = \int_\Omega f v$

então

$$\left| \int_\Omega f \cdot v \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \quad (\forall v \in L^2(\Omega))$$

$$\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (\forall v \in H^1(\Omega))$$

$$\Rightarrow \Lambda = \sup_{v \in H^1(\Omega)} \frac{\int f v}{\|v\|_{H^1}} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Exemplo: Em $(-1,1)$, seja $L_\delta(v) = v(0)$ $\forall v \in H^1(-1,1)$,

(o chamado "delta de Dirac").

É possível pois $H^1(-1,1) \subseteq C^0(-1,1)$.

$\Rightarrow L_\delta \in H^{-1}(-1,1)$. Mas $L_\delta \notin L^2(-1,1)$

$|L_\delta(v)| \leq \Lambda \|v\|_{H^1(-1,1)}$

Obs: não vale em $\mathbb{R}^2$.

ALGUNS PROBLEMAS

1- ELASTICIDADE

Problema: dado um corpo B ocupando o domínio Ω, o que acontece quando impõe-se uma força sobre B?

Matematicamente: dado $\underline{x} \in \Omega$, quer-se achar o deslocamento

$$\underline{u}(\underline{x}) = (u_1(\underline{x}), u_2(\underline{x}), u_3(\underline{x}))$$

Para pequenos deslocamentos, podemos considerar elasticidade linear.

Definimos o tensor de deformação $\varepsilon \in \mathbb{R}^{3\times3}$

$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^T u)$ $$\varepsilon_{ij}(\underline{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad i,j = 1,2,3.$$

e o tensor tensão $\sigma \in \mathbb{R}^{3\times3}$ é $\left(\begin{matrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) \\ & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{matrix}\right)$

$$\sigma = A(\varepsilon) \quad \text{(Relação constitutiva)}$$

onde $A: \mathbb{R}^{3\times3} \to \mathbb{R}^{3\times3}$

No caso linear, $A \in \mathbb{R}^{3\times3\times3\times3}$

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l=1}^{3} A_{ijkl}(\underline{x})\, \varepsilon_{kl}$$

Se A não depende de $\underline{x}$, o material é homogêneo.

Se A independe da orientação, o material é isotrópico.

Nestes casos:

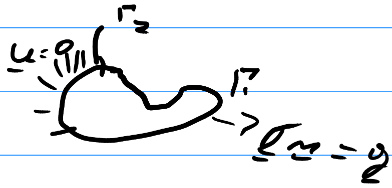
$$\sigma_{ij} = \lambda \,\mathrm{div}\, \underline{u}\, \delta_{ij} + \mu\, \varepsilon_{ij}(\underline{u})$$

onde λ, μ são os coeficientes de Lamé:
(relacionados ao módulo de Young E e coeficiente de Poisson ν)

Além disto $\mathrm{div}\, \underline{u} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Condições de contorno:



- $\underline{u} = 0$ em Γ_2
- $\underline{\sigma}\, \underline{n} = \underline{g}$ em Γ_1 $\left(\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}\, n_j = g_j \right)$: tração $\underline{g}$

onde $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, e $\underline{n}$ é a normal a Γ_1.

Condição de equilíbrio

$-\underline{\text{div}}\, \sigma = \underline{f}$ em Ω

i.e. $-\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} = f_i \quad , i=1,2,3$

Como $\sigma = A\varepsilon(u)$:

$$\underline{\text{div}}(A\varepsilon(u)) = \underline{f} \text{ em } \Omega, \quad + \text{c.c.}$$

Forma fraca:

Lema:

$$\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(u) = -\int_\Omega \underline{\text{div}}\, \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{u} + \int_\Gamma (\underline{\underline{\sigma}}\, \underline{n}) \cdot \underline{u}$$

Notação: $\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\varepsilon}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$; $\underline{u}$, $\underline{\text{div}}\, \sigma \in \mathbb{R}^3$

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij} = \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij}$$

$$\underline{\text{div}}\, \underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}$$

Dem:

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij} = \sum_{i,j}^{3} \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \underbrace{\sigma_{ji}}_{\sigma_{ij} = \sigma_{ji}} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

(uso $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$

$$= \sum_{i,j=1}^{3} \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla}}\, \underline{u}$$

Usando Green:

$$\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) = \int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u} = \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{3} \left(-\int_\Omega \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \cdot u_i + \int_\Gamma \sigma_{ij} n_j u_i \right)$$

$$= \int_\Omega -\underline{\operatorname{div}}\,\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{u} + \int_\Gamma (\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n}) \cdot \underline{u} \qquad \boxed{=}$$

Então obtemos a forma fraca do problema de elasticidade:

seja $\underline{v} \in H^1(\Omega)$ ($v_i \in H^1(\Omega)$, $i=1,2,3$), t.q. $\underline{v}|_{\Gamma_2} = 0$.

Então

$$\int_\Omega \underline{f} \cdot \underline{v} = \int_\Omega -\underline{\operatorname{div}}\,\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v} = \int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) - \int_\Gamma (\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n}) \cdot \underline{v}.$$

$$\underset{\underline{\underline{\sigma}} = A\underline{\underline{\varepsilon}}(u)}{=} \int_\Omega A\,\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) - \int_\Gamma \{\underbrace{[A\,\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})]\underline{n}}_{= g \text{ em } \Gamma_1}\} \cdot \underbrace{\underline{v}}_{= 0 \text{ em } \Gamma_2}$$

$$= \int_\Omega A\,\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) - \int_{\Gamma_1} \underline{g} \cdot \underline{v}$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \underline{f}\,\underline{v} = \int_\Omega A\,\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) - \int_{\Gamma_1} \underline{g} \cdot \underline{v} \qquad \forall \underline{v} \in H^1(\Omega)\ \text{t.q.}\ \underline{v}|_{\Gamma_2} = 0$$

Forma fraca:

$\underline{u} \in V = \{ \underline{v} \in [H^1(\Omega)]^3 : \underline{v}|_{\Gamma_2} = 0 \}$

t.q.

$$\int_\Omega A\varepsilon(u) : \varepsilon(v) = \int_\Omega f v + \int_{\Gamma_1} g \underline{v}$$

Usando $A\varepsilon(u) = \lambda \operatorname{div} \underline{u}\, \underline{\underline{I}} + \mu\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_\Omega \lambda \operatorname{div} \underline{u} \operatorname{div} \underline{v} + \mu\, \underline{\underline{\varepsilon}}(u) : \underline{\underline{\varepsilon}}(v)}_{a(u,v)} = \int_\Omega f \underline{v} + \int_{\Gamma_1} g \underline{v}$$

Parte difícil: provar coercividade. Temos que achar $\alpha > 0$ t.q.

$$a(v,v) \geq \alpha \|\underline{v}\|_V \quad \forall \underline{v} \in V,$$

onde $\|v\|_V^2 = \sum_{i=1}^3 \|v_i\|_{H^1(\Omega)}^2$

"Basta" mostrar a desigualdade de Korn:

$$\int_\Omega \varepsilon(u) : \varepsilon(v) \geq \alpha \left(|\nabla \underline{v}|_{L^2(\Omega)} + \|\underline{v}\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

$\forall \underline{v} \in V.$

Dificuldade: $\begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ são t.q. $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{0}}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

STOKES

Busca $\underline{u}$ e p t.q.

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) - p \underline{\underline{I}} \\ -\underline{\operatorname{div}}\, \underline{\underline{\sigma}} = \underline{f} \quad ; \operatorname{div} \underline{u} = 0 \\ \underline{u} = 0 \quad \text{em } \Gamma \end{cases}$$

$$\Rightarrow -2\mu\, \underline{\operatorname{div}}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) + \underline{\operatorname{div}}(p \underline{\underline{I}}) = \underline{f}$$

Note que

- $$(\underline{\operatorname{div}}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}))_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon_{ij}(\underline{u})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$= \frac{1}{2}\Delta u_i + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j}}_{= \operatorname{div} \underline{u} = 0} = \frac{1}{2}\Delta u_i$$

$$\Rightarrow -2\mu\, \underline{\operatorname{div}}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) = \mu \Delta \underline{u}$$

- $$\underline{\operatorname{div}}(p \underline{\underline{I}}) = \underline{\operatorname{div}} \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \nabla p$$

Temos então
$$\begin{cases} -\mu \Delta \underline{u} + \underline{\nabla} p = \underline{f} & \text{em } \Omega \\ \operatorname{div} \underline{u} = 0 & \text{em } \Omega \\ \underline{u} = 0 & \text{em } \Gamma \end{cases}$$

Forma fraca: $V = \{ \underline{v} \in H_0^1(\Omega) : \operatorname{div} \underline{v} = 0 \}$

Se u for solução forte e $u \in V$:

$$\int_\Omega f \, \underline{v} = \int_\Omega -\mu \Delta u \cdot v + \int_\Omega \underline{\nabla} p \cdot \underline{v}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \mu \nabla u_i \cdot \nabla v_i - \int_\Omega p \cdot \overbrace{\operatorname{div} v}^{=0} + \int_\Gamma p \, \overbrace{\underline{v}}^{=0} \cdot \underline{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \mu \nabla u_i \cdot \nabla v_i \qquad \forall v \in V.$$

Forma fraca: $u \in V$ t.q.

$$\int_\Omega \mu \nabla u_i \cdot \nabla v_i = \int_\Omega f \cdot \underline{v} \qquad \forall v \in V.$$