Introdução à Medida e Integração

Pós-graduação da EPGE–FGV [1]

Alexandre L. Madureira

Laboratório Nacional de Computação Científica—LNCC, Brasil
URL: `http://www.lncc.br/~alm`
URL: `http://www.lncc.br/~alm/cursos/medida07.html`

[1] 26 de fevereiro de 2007

Prefácio. Estas notas de aula são relativas ao curso de Medida e Integração da Escola de Pós-Graduação em Economia da Fundação Getúlio Vargas (EPGE–FGV). Estas notas devem servir de apoio, e certamente não eliminam a necessidade de se usar os já clássicos, aprimorados e vários livros didáticos. Mencionamos alguns deles na biliografia.

A referência básica é o livro *The elements of integration*, de Robert Bartle [**1**].

Conteúdo

Capítulo 1. Introdução 1

Capítulo 2. Conjuntos e Funções Mensuráveis 3
2.1. Conjuntos Mensuráveis 3
2.2. Funções Mensuráveis 4
2.3. Medidas 7

Capítulo 3. Integração 9
3.1. Integração para funções em $\overline{\mathbb{R}}$ mensuráveis não negativas 9
3.2. Funções Integráveis 12

Capítulo 4. Os espaços L^p 15
4.1. Os espaços L^p 16

Capítulo 5. Convergência 19
5.1. Convergência em medida 20
5.2. Convergência quase uniforme 21

Capítulo 6. Decomposição de Medidas 23

Capítulo 7. Construção 25

Bibliography 29

CAPÍTULO 1

Introdução

Considere a função degrau

$$\phi = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}, \tag{1.0.1}$$

onde $E_j = (a_j, b_j) \subset \mathbb{R}$ são disjuntos, e a função característica

$$\chi_{E_j} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E_j, \\ 0 & \text{se } x \notin E_j \end{cases}.$$

Definimos a integral de ϕ por

$$\int \phi = \sum_{j=1}^{n} c_j (b_j - a_j).$$

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ função limitada. Definimos a integral inferior de Riemann como sendo $\sup \int \phi$, onde ϕ é função degrau como em (1.0.1) tal que

(1) $\phi(x) = 0$ em $\mathbb{R} \backslash [a, b]$
(2) $\phi(x) \leq f(x)$ em $[a, b]$

A integral superior de Riemann pode ser definida de forma análoga (assumindo $\phi(x) \geq f(x)$ e tomando-se o $\inf \int \phi$). Dizemos então que f é Riemann integrável se as integrais superiores e inferiores coincidem.

Considere o exemplo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1] \backslash \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Neste caso f não é Riemann integrável. Entretanto, como $\mathbb{Q}$ é enumerável, seja $\mathbb{Q} = \{x_1, x_2, \dots\}$ e

$$\phi_j = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \{x_1, x_2, \dots, x_j\} \cup [1 - 1/j, 1], \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então $\lim_{j\to\infty} \phi_j(x) = f(x)$ para todo $x \in [0, 1]$. Mas ϕ_j é função degrau e portanto integrável, com $\int \phi_j = 1 - 1/j$, e

$$\int |\phi_i - \phi_j| = \left| \frac{1}{i} - \frac{1}{j} \right|.$$

Portanto a sequência é de Cauchy na norma $\int |\cdot|$, mas não converge para uma função Riemann integrável.

No caso da integral de Lebesgue, considera-se E_j não somente como intervalo, mas de uma forma mais geral, como "'conjunto mensurável." No caso que acabamos de considerar, teríamos

$$\int f = \lim_{j\to\infty} \int \phi_j = 1.$$

CAPÍTULO 2

Conjuntos e Funções Mensuráveis

[1]

Neste capítulo introduzimos o conceito de conjuntos mensuráveis, e a seguir, o de funções mensuráveis. É conveniente contar com o sistema de números reais estendidos que é formado pelo conjuntos $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Chamamos este novo conjunto de $\bar{\mathbb{R}}$ ou $[-\infty, +\infty]$. Introduzimos em $\bar{\mathbb{R}}$ as seguintes operações:

$$+\infty + (+\infty) = +\infty, \qquad -\infty + (-\infty) = -\infty, \qquad +\infty * (+\infty) = +\infty,$$
$$-\infty * (-\infty) = +\infty, \qquad -\infty * (+\infty) = -\infty,$$

e para todo $x \in \mathbb{R}$ definimos

$$x + (+\infty) = +\infty + x = +\infty, \qquad x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty,$$
$$x * (+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ -\infty & \text{se } x < 0, \end{cases} \qquad x * (-\infty) = -x * (+\infty).$$

Usando a ordenação natural de $\mathbb{R}$, ordenamos $\overline{\mathbb{R}}$ assumindo que $-\infty < x < +\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Note que $\overline{\mathbb{R}}$ não é um corpo, e que certas operações não estão nem definidas. Por exemplo, $-\infty$ e ∞ não podem ser adicionados. Finalmente, definimos os conjuntos $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b) da maneira usual para a, $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

2.1. Conjuntos Mensuráveis

A definição de conjuntos mensuráveis é baseada no conceito de σ-álgebra, que vem a seguir.

Definição 2.1.1. *(σ-álgebra) Dizemos que uma família $\mathbf{X}$ de subconjuntos de um conjunto X é uma σ-álgebra se*

(1) $\emptyset \in \mathbf{X}$, $X \in \mathbf{X}$
(2) $A \in \mathbf{X} \implies \mathcal{C}(A) \in \mathbf{X}$
(3) (A_n) *sequência em* $\mathbf{X} \implies \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbf{X}$

Dados um conjunto X e uma σ-álgebra $\mathbf{X}$, chamamos o par $(X, \mathbf{X})$ de *espaço mensurável.*

Exercício 2.1. Mostre que em (3) poderíamos impor $\cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbf{X}$.

Dois exemplos triviais de σ-álgebra, dado X, são $\mathbf{X} = \{\emptyset, X\}$ e $\mathbf{X} = \mathcal{P}(X)$ (coleção de todos subconjuntos de X, chamado de conjunto das partes de X). Outros exemplos mais interessantes vêm a seguir.

[1] Última Atualização: 31/01/2007

Exemplo 2.1. $X = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, e $\mathbf{X} = \{\emptyset, \{1, 3, 5, \dots\}, \{2, 4, 6, \dots\}, \mathbb{N}\}$.

Exemplo 2.2. Se $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$ são σ-álgebra, então $\mathbf{X}_1 \cap \mathbf{X}_2$ é σ-álgebra.

Exemplo 2.3. Seja $A \subset X$. Então existe a menor σ-álgebra contendo A. Note que $\mathcal{P}(X)$ é σ-álgebra com $a \subset \mathcal{P}(X)$, e que a interseção de todas as σ-álgebras contendo A também é uma σ-álgebra. Chamamos esta σ-álgebra de *σ-álgebra gerada por A*.

Exemplo 2.4. Para $X = \mathbb{R}$, a σ-álgebra gerada pelos intervalos abertos é chamada de σ-álgebra de Borel, e os conjuntos que a ela pertencem são denominados conjuntos de Borel.

Exercício 2.2. Mostre que a σ-álgebra gerada pelos intervalos fechados em $\mathbb{R}$ é a σ-álgebra de Borel.

Observação. Se X é um espaço topológico, a álgebra de Borel é a menor álgebra que contém todos os abertos de X.

2.2. Funções Mensuráveis

Passamos agora para a definição de funções mensuráveis, e consideramos um espaço mensurável $(X, \mathbf{X})$.

Definição 2.2.1. *Dizemos que $f : X \to \mathbb{R}$ é mensurável se $f^{-1}((\alpha, +\infty)) \in \mathbf{X}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.*

O resultado abaixo garante que outras definições seriam possíveis.

Lema 2.2.2. As afirmativas são equivalentes.
(1) $f^{-1}((\alpha, +\infty))$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$
(2) $f^{-1}([\alpha, +\infty))$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$
(3) $f^{-1}((-\infty, \alpha))$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$
(4) $f^{-1}((-\infty, \alpha])$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

Demonstração. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ fixo. Então (2) e (3) são equivalentes pois um conjunto é o complementar do outro. O mesmo vale para (1) e (4). Além disto,
$$f^{-1}([\alpha, +\infty)) = \cap_{n=1}^{\infty} f^{-1}((\alpha - 1/n, +\infty))$$
e (1) implica (2). De forma análoga,
$$f^{-1}((\alpha, +\infty)) = \cup_{n=1}^{\infty} f^{-1}([\alpha + 1/n, +\infty))$$
e (2) implica (1). □

O exemplo mais simples de função mensurável é a função constante. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = c$, então $f^{-1}((\alpha, +\infty)) = \emptyset$ para $\alpha \geq c$ e $f^{-1}((\alpha, +\infty)) = X$ para $\alpha < c$.

Exercício 2.3. Mostre que toda função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ é Borel mensurável.

Exercício 2.4. Mostre que $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ é Borel Mensurável, e portanto a função característica
$$\chi_{\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$
é mensurável.

O lema abaixo nos mostra que certas combinações de funções mensuráveis são mensuráveis.

Lema 2.2.3. Sejam f, $g : X \to \mathbb{R}$ mensuráveis, e $c \in \mathbb{R}$. Então cf, $f+g$, fg, $|fg|$ são mensuráveis.

Demonstração. (1) Se $c = 0$, então o resultado é trivial. Sem perda de generalidade, seja c positivo. Então $(cf)^{-1}((\alpha, +\infty)) = f^{-1}((\alpha/c, +\infty)) \in \mathbf{X}$.

(2) Se $r \in \mathbb{Q}$, então

$$S_r = f^{-1}((r, +\infty)) \cap g^{-1}((\alpha - r, +\infty)) \in \mathbf{X}.$$

Mas

$$(f+g)^{-1}((\alpha, +\infty)) = \cup_{r \in \mathbb{Q}} S_r \in \mathbf{X}.$$

(3) Se $f = g$, então $(f^2)^{-1}((\alpha, +\infty)) = X$ para $\alpha < 0$, e

$$(f^2)^{-1}((\alpha, +\infty)) = f^{-1}((-\infty, \sqrt{\alpha})) \cup f^{-1}((\sqrt{\alpha}, +\infty)) \in \mathbf{X}.$$

No caso geral, note que $fg = (1/4)((f+g)^2 - (f-g)^2)$.

(4) Para $\alpha < 0$, tem-se $(|f|)^{-1}((\alpha, +\infty)) = X$. Para $\alpha \geq 0$, tem-se

$$(|f|)^{-1}((\alpha, +\infty)) = f^{-1}((-\infty, \alpha)) \cup f^{-1}((\alpha, +\infty)) \in \mathbf{X}.$$

□

Como corolário do resultado anterior, temos que as funções f^-, f^+ definidas por

$$f^-(x) = \sup\{-f(x), 0\}, \qquad f^+(x) = \sup\{f(x), 0\},$$

são mensuráveis se e somente se f é mensurável pois

$$f = f^+ - f^-, \qquad |f| = f^+ f^-, \qquad f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f), \qquad f^- = \frac{1}{2}(|f| - f).$$

Para funções que tomam valores em $\overline{\mathbb{R}}$, valem as definições e resultados anteriores, *mutatis mutandis*, como mostraremos a seguir.

Definição 2.2.4. *Dizemos que uma função $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável se $f^{-1}((\alpha, +\infty])$ for mensurável para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Denotamos por $M(X, \mathbf{X})$ o conjunto de todas as funções mensuráveis que tomam valores em $\overline{\mathbb{R}}$.*

Observe que

$$f^{-1}(\{+\infty\}) = \cap_{n=1}^{\infty} f^{-1}((n, +\infty)) \in \mathbf{X}, \qquad f^{-1}(\{-\infty\}) = \cup_{n=1}^{\infty} f^{-1}((-n, +\infty)) \in \mathbf{X},$$

se $f \in M(X, \mathbf{X})$.

Exercício 2.5. Mostre que $f \in M(X, \mathbf{X})$ implica que cf, f^2, $|f|$, f^+, f^-, onde $c \in \mathbb{R}$.

Temos que tomar cuidado antes de concluir que f, $g \in M(X, \mathbf{X})$ resulta em $f + g \in M(X, \mathbf{X})$ pois a função $f + g$ não está definida no conjunto

$$\{x \in \mathbf{X} : f(x) = +\infty \text{ e } g(x) = -\infty\} \cup \{x \in \mathbf{X} : f(x) = -\infty \text{ e } g(x) = +\infty\}.$$

Definindo $f + g = 0$ neste conjunto problemático, concluímos que $f + g$ é mensurável.

LEMA 2.2.5. Seja (f_n) sequência em $M(X, \mathbf{X})$, e

$$f(x) = \inf f_n(x), \qquad F(x) = \sup f_n(x),$$
$$f^*(x) = \liminf f_n(x), \qquad F^*(x) = \limsup f_n(x).$$

Entao f, F, f^*, $F^* \in M(X, \mathbf{X})$.

DEMONSTRAÇÃO. Note que (mostre)

$$f^{-1}((\alpha, +\infty)) = \cap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((\alpha, +\infty)), \qquad F^{-1}((\alpha, +\infty)) = \cup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((\alpha, +\infty)),$$

e portanto f e F são mensuráveis. Por outro lado,

$$f^*(x) = \sup_{n\geq 1}\{\inf_{m\geq n} f_n(x)\}, \qquad F^*(x) = \inf_{n\geq 1}\{\sup_{m\geq n} f_n(x)\},$$

e portanto f^* e F^* são mensuráveis. $\square$

COROLÁRIO 2.2.6. Se f_n é sequência em $M(X, \mathbf{X})$ e converge pontualmente para f em X, então $f \in M(X, \mathbf{X})$.

DEMONSTRAÇÃO. Basta notar que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$. $\square$

Obs: Ver exercício 3V no Bartle [**1**].

Para mostrar que $M(X, \mathbf{X})$ é fechado em relação a produtos, i.e., f, $g \in M(X, \mathbf{X})$ resulta em $fg \in M(X, \mathbf{X})$, definimos a sequência f_n tal que

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } |f(x)| \leq n \\ n & \text{se } |f(x)| > n \\ -n & \text{se } |f(x)| < -n \end{cases}$$

Definimos g_n de forma análoga. E possível mostrar (mostre) que f_n e g_n são mensuráveis. Portanto $f_n g_m$ é mensurável. Logo $fg_n \in M(X, \mathbf{X})$ pois $fg_m = \lim_{n\to\infty} f_n g_m$. Concluímos finalmente que fg é mensurável pois $fg = \lim_{m\to\infty} fg_m$.

Concluímos este capítulo com um importante resultado que diz que toda função não negativa em $M(X, \mathbf{X})$ é limite pontual de um sequência crescente de funções simples.

LEMA 2.2.7. Seja $f \in M(X, \mathbf{X})$ função não negativa. Então existe sequência ϕ_n em $M(X, \mathbf{X})$ tal que

(1) $0 \leq \phi_n(x) \leq \phi_{n+1}(x)$ para todo $x \in X$, e todo $n \in \mathbb{N}$.
(2) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(x)$ para $x \in X$
(3) Cada ϕ_n assume um número finito de valores.

DEMONSTRAÇÃO. Para $n \in \mathbb{N}$ seja $\delta_n = 2^{-n}$, e $k_n : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ tal que $k = k_n(t)$ satisfaz $k\delta_n \leq t < (k+1)\delta_n$. Seja

$$\psi_n(t) = \begin{cases} k_n(t)\delta_n & \text{se } 0 \leq t < n \\ n & \text{se } n \leq t \leq +\infty \end{cases}$$

Então $0 \leq \psi_1 \leq \psi 2 \leq \cdots \leq t$. Além disto, $t - \delta_n < \psi_n(t) \leq t$ para $t \in [0, n]$. Logo $\lim_{n\to\infty} \psi_n(t) = t$ para $t \in [0, +\infty]$, e $\phi_n = \psi \circ f$ satisfaz o lema. De fato, $\phi_n^{-1}([\alpha, \infty]) = f^{-1}\psi^{-1}([\alpha, \infty])$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Como $\phi_n^{-1}([\alpha, \infty])$ é conjunto de Borel em $\overline{\mathbb{R}}$, então $\phi_n \in M(X, \mathbf{X})$ (ver exercicio 2p de [**1**]). $\square$

2.3. Medidas

Estudamos neste capítulo certas funções que chamamos de medidas e que estão definidas em σ-álgebras, tomando valores em $\mathbb{R}$. Fixemos novamente X, $\mathbf{X}$.

DEFINIÇÃO 2.3.1. *(Medida) Uma medida μ é uma função definida em $\mathbf{X}$ e tomando valores em $\overline{\mathbb{R}}$ tal que*

(1) $\mu(\emptyset) = 0$
(2) $\mu(E) \geq 0$ *para todo* $E \in \mathbf{X}$
(3) μ *é σ-aditiva, i.e., dada uma sequência disjunta (E_n) em $\mathbf{X}$, então* $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$

OBSERVAÇÃO. Na definição acima, dizemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \infty$ se $\mu(E_n) = \infty$ ou se a série diverge.

OBSERVAÇÃO. Se $\mu(E) < \infty$ para todo $E \in \mathbf{X}$, dizemos que μ é finita.

OBSERVAÇÃO. Se existe uma sequência E_n com $\mu(E_n) < \infty$ para todo n e $X = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, dizemos que μ é σ-finita.

Vejamos agora alguns exemplos. As medidas que consideraremos a seguir, ou são triviais, ou exigem certa credulidade, pois são baseadas em afiramtivas que só provaremos mais tarde.

EXEMPLO 2.5. $\mu \equiv 0$ define uma medida

EXEMPLO 2.6. $\mu(\emptyset) = 0$ e $\mu(E) = \infty$ se $E \neq \emptyset$ também define uma medida

EXEMPLO 2.7. Seja $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \overline{\mathbb{R}}$ a medida de contagem, i.e., $\mu(E)$ é o número de elementos em E caso este seja finito, ou toma o valor $+\infty$ caso contrário. Note que esta medida é σ-finita.

EXEMPLO 2.8. Se $X = \mathbb{R}$ e B é a algebra de Borel, então é possivel mostrar que existe uma única medida μ tal que $\mu((a, b)) = b - a$, para $a < b$. Esta medida é σ-finita. e é chamada de medida de Borel.

Note que da σ-aditividade das medidas temos que

$$E, F \in \mathbf{X}, \quad E \subset F \implies \mu(F) = \mu(E) + \mu(F \backslash E)$$

pois $F = E \cup (F \backslash E)$ e $E \cap (F \backslash E) = \emptyset$. Segue-se também que $\mu(E) \leq \mu(F)$ pois $\mu(F \backslash E) \geq 0$, e, se $\mu(E) \leq \infty$, que $\mu(F \backslash E) = \mu(F) - \mu(E)$.

Outra propriedade enunciada abaixo refere-se a sequências de conjuntos. Dizemos que uma sequência (E_n) em $\mathbf{X}$ é crescente se $E_n \subset E_{n+1}$. Definição análoga vale para decrescente.

LEMA 2.3.2. Seja μ medida e (E_n) em $\mathbf{X}$ crescente. Então

(1) $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n)$

Se (F_n) em $\mathbf{X}$ é decrescente com $\mu(F_1) < +\infty$, então

(2) $\mu(\cap_{n=1}^{\infty} F_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(F_n)$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $A_1 = E_1$ e $A_n = E_n \backslash E_{n-1}$ para $n > 1$. Então A_n é disjunta e

$$E_n = \cup_{i=1}^{n} A_i, \qquad \cup_{n=1}^{\infty} E_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Da σ-aditividade de μ temos

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(\cup_{n=1}^{m} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_m),$$

e portanto (1) vale.

Para mostrar (2), defina $E_n = F_1 \backslash F_n$. Por (1), temos que

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \lim_{n\to\infty} [\mu(F_1) - \mu(F_n)] = \mu(F_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(F_n). \tag{2.3.1}$$

Note entretanto que por De Morgam, $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = F_1 \backslash \cap_{n=1}^{\infty} F_n$, e então

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu(F_1) - \mu(\cap_{n=1}^{\infty} F_n). \tag{2.3.2}$$

De (2.3.1), (2.3.2) temos o resultado. □

Contra-exemplo para $\mu(F_1) = \infty$ em (2): tome $F_n = (n, +\infty)$ com medida de Borel.

Definição 2.3.3. *As definições abaixo serão usadas no decorrer do texto:*

(1) *Chamamos $(X, \mathbf{X}, \mu)$ de espaço de medida.*
(2) *Dizemos que duas funções f, $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ são iguais quase sempre (q.s.) se existe $N \in \mathbf{X}$ tal que $\mu(N) = 0$ e*

$$x \in X \backslash N \implies f(x) = g(x).$$

(3) *De forma análoga, uma sequência f_n converge para f quase sempre se existe $N \in \mathbf{X}$ tal que $\mu(N) = 0$ e*

$$x \in X \backslash N \implies \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Terminamos este capítulo com a definição de medida com sinal, que é uma função $\lambda : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ tal que

(1) $\lambda(\emptyset) = 0$
(2) $\lambda(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$, se E_n é sequência disjunta

Observação. Note que medidas com sinal foram definidas como tomando valores em $\mathbb{R}$, e nao em $\overline{\mathbb{R}}$. Além disto, a série em (2) precisa convergir independentemente da ordem dos E_n.

CAPÍTULO 3

Integração

[1]

3.1. Integração para funções em $\overline{\mathbb{R}}$ mensuráveis não negativas

Considerando o espaco de medida $(X, \mathbf{X}, \mu)$, seja $M^+(X, \mathbf{X})$ o conjunto de funções mensuráveis que tomam valores em $\overline{\mathbb{R}}$ e não negativas.

Neste capítulo definiremos integrais em $M^+(X, \mathbf{X})$ e analizaremos suas propriedades. Começamos com o conceito de função simples.

DEFINIÇÃO 3.1.1. *Dizemos que uma função $\phi : X \to \mathbb{R}$ é simples se toma finitos valores. Note que funções simples podem ser escritas na forma*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i} \tag{3.1.1}$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$, e χ_{E_i} é função característica do conjunto E_i. A representação acima será única se os a_is forem distintos, e se E_i formarem uma partição de X. Chamaremos esta representação unica de canônica.

DEFINIÇÃO 3.1.2. *Se $\phi \in M^+(X, \mathbf{X})$ é simples com representação canônica* (3.1.1), *definimos*

$$\int \phi \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i), \qquad \int_E \phi \, d\mu = \int \phi \chi_E \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E \cap E_i), \tag{3.1.2}$$

OBSERVAÇÃO. Note que a integral pode tomar o valor $+\infty$. Entretanto, devido à convenção $0(+\infty) = 0$, a função identicamente nula tem sempre integral zero.

OBSERVAÇÃO. Supor que ϕ seja sempre não negativa evita que expressões não definidas como $+\infty + (-\infty)$ surjam.

OBSERVAÇÃO. Mesmo que (3.1.1) não seja representação canônica, a integral (3.1.2) está bem definida, i.e., independe da representação (mostre).

Abaixo mostramos que a integral define um funcional linear no espaço das funções simples em $M^+(X, \mathbf{X})$, e que gera novas medidas em $\mathbf{X}$.

LEMA 3.1.3. Sejam ϕ, ψ funções simples em $M^+(X, \mathbf{X})$, e seja $c \geq 0$. Então

$$\int c\phi \, d\mu = c \int \phi \, d\mu, \qquad \int \phi + \psi \, d\mu = \int \phi \, d\mu + \int \psi \, d\mu.$$

Além disto, a função $\lambda : \mathbf{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por $\lambda(E) = \int \chi_E \phi \, d\mu$ define uma medida em $\mathbf{X}$.

[1]Última Atualização: 31/01/2007

Demonstração. O caso $c = 0$ é trivial. Seja então $c \neq 0$. Dada a representação canônica (3.1.1) para ϕ, a representação$\sum_{i=1}^{n} ca_i\chi_{E_i}$ é canônica para $c\phi$. Portanto,

$$\int c\phi \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} ca_i\mu(E_i) = c\int \phi \, d\mu,$$

Suponha agora que $\psi = \sum_{k=1}^{m} b_k\chi_{F_k}$, e seja $G_{jk} = E_j \cap F_k$. Então

$$\int_{E_{jk}} (\phi + \psi) \, d\mu = (a_j + b_k)\mu(G_{jk}),$$

$$\int_{E_{jk}} \phi \, d\mu + \int_{E_{jk}} \psi \, d\mu = a_j\mu(G_{jk}) + b_k\mu(G_{jk}) = (a_j + b_k)\mu(G_{jk}).$$

Mas considerando a integral como medida e usando o fato de que E_{jk} gera uma partição de $\mathbf{X}$, obtemos o resultado.

Para mostrar que λ é medida, note que $\phi\chi_E = \sum_{j=1}^{n} a_j\chi_{E_j\cap E}$, e portanto

$$\lambda(E) = \sum_{j=1}^{n} a_j\mu(E_j \cap E) = \sum_{j=1}^{n} a_j\mu_{E_j}(E),$$

onde $\mu_{E_j}(E) = \mu(E_j \cap E)$ também define uma medida (mostre). Como multiplicar uma medida por um número não negativo gera outra medida, e somas de medidas são medidas, então λ é medida. $\square$

Podemos agora definir a integral em $M^+(X, \mathbf{X})$, e para tal definimos o conjunto

$\Phi_f^+ = \{\phi \in M^+(X, \mathbf{X}) : \phi$ é função simples com $0 \leq \phi(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X\}$.

Definição 3.1.4. *Para $f \in M^+(X, \mathbf{X})$, definimos*

$$\int f \, d\mu = \sup_{\phi\in\Phi_f^+} \int \phi \, d\mu.$$

Para $E \in \mathbf{X}$, definimos $\int_E f \, d\mu = \int f\chi_E \, d\mu$.

Note que segue-se da definição acima que

$$f, g \in M^+(X, \mathbf{X}) \text{ com } f(x) \leq g(x) \implies \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu,$$

pois $\Phi_f^+ \subset \Phi_g^+$. De forma semelhante, para $f \in M^+(X, \mathbf{X})$,

$$E, f \in \mathbf{X} \text{ com } E \subset F \implies \int_E f \, d\mu \leq \int_F f \, d\mu,$$

já que $f\chi_E \leq f\chi_F$.

Apresentamos agora o importante *Teorema da Convergência Monótona* (T.C.M.).

Teorema 3.1.5. *Se (f_n) é sequência monótona crescente em $M^+(X, \mathbf{X})$ e converge para f, então*

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

DEMONSTRAÇÃO. Como f é limite de funções mensuráveis em $M^+(X,\mathbf{X})$, então é mensurável e $f \in M^+(X,\mathbf{X})$. Já que $f_n(x) \le f(x)$, então $\int f_n\, d\mu \le \int f\, d\mu$. Logo

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu \le \int f\, d\mu.$$

Para provar a desigualdade oposta, seja $\phi \in \Phi_f^+$. Queremos mostrar que

$$\int \phi\, d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu. \tag{3.1.3}$$

Note que se (3.1.3) valer, então

$$\int f\, d\mu \le \sup_{\phi\in\Phi_f^+} \int \phi\, d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu,$$

e teríamos demonstrado o teorema.

Seja então $\alpha \in (0,1)$, e

$$A_n = \{x \in \mathbf{X} :\ f_n(x) \ge \alpha\phi(x)\} = (f - \alpha\phi)^{-1}([0,+\infty]).$$

Então $A_n \in \mathbf{X}$ e portanto

$$\int_{A_n} \alpha\phi\, d\mu \le \int_{A_n} f_n\, d\mu \le \int f_n\, d\mu. \tag{3.1.4}$$

Mas

(1) A_n é crescente pois f_n é crescente
(2) $\cup_{n=1}^\infty A_n = X$ pois $\alpha < 1$.

Usando a medida $\lambda(A_n) = \int_{A_n} \phi\, d\mu$, temos de (1) e (2) acima que

$$\int \phi\, d\mu = \lambda(X) = \lambda(\cup_{n=1}^\infty A_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} \phi\, d\mu.$$

De (3.1.4) temos

$$\alpha \int \phi\, d\mu \le \int f_n\, d\mu. \tag{3.1.5}$$

Como (3.1.5) vale para todo $\alpha \in (0,1)$, concluímos (3.1.3). □

EXERCÍCIO 3.1. Mostre que se f_n é monótona decrescente, não vale o T.C.M.

A seguir apresentamos algumas consequências do T.C.M. Primeiro mostramos que a integral define um funcional linear em $M^+(X,\mathbf{X})$.

LEMA 3.1.6. Seja

COROLÁRIO 3.1.7. Seja (f_n) sequência em $M^+(X,\mathbf{X})$ crescente, e $f_n(x) \to f(x)$ q.s., onde $f \in M^+(X,\mathbf{X})$. Então

$$\int f\, d\mu = \lim \int f_n\, d\mu.$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $N \in X$ tal que $\mu(N) = 0$ e $f_n(x) \to f(x)$ em $M = X \backslash N$. Pelo T.C.M,

$$\int f\chi_M \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \chi_M \, d\mu.$$

Mas

$$\int f \, d\mu = \int f\chi_M \, d\mu + \int f\chi_N \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\chi_M \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu,$$

pois $f\chi_N = 0$ q.s. e $f_n\chi_N$ q.s.. □

COROLÁRIO 3.1.8. Seja (g_n) sequência em $M^+(X, \mathbf{X})$. Então

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} g_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int \gamma_n \, d\mu.$$

DEMONSTRAÇÃO. T.C.M. □

3.2. Funções Integráveis

A partir de agora, vamos considerar funções que tomem valores em $\mathbb{R}$ e não mais em $\overline{\mathbb{R}}$. Além disto, consideraremos integrais finitas somente.

DEFINIÇÃO 3.2.1. *Seja $\mathcal{L}(X, \mathbf{X}, \mu)$ o espaço de funções $f : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ tais que $f \in M^+(X, \mathbf{X})$ e $\int |f| \, d\mu < \infty$. Definimos a integral de f como*

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu,$$

onde f^+ e f^- são as partes positiva e negativa de f. Finalmente, para $E \in \mathbf{X}$,

$$\int_E f \, d\mu = \int f\chi_E, d\mu.$$

Chamamos $\mathcal{L}(X, \mathbf{X}, \mu)$ de espaço das funções integráveis, e escrevemos simplesmente $\mathcal{L}$ quando não houver risco de confusão.

OBSERVAÇÃO. Quando $\mathbf{X}$ é a σ-álgebra de Borel, e μ é a medida de Borel, então denotamos a integral de $f \in \mathcal{L}$ por $\int f(x) \, dx$ ou $\int f \, dx$.

OBSERVAÇÃO. Note que $f \in \mathcal{L}$ se e somente se $|f| \in \mathcal{L}$ (integrabilidade absoluta), e como $|f| = f^+ + f^-$, então $0 \le \int f^+ \, d\mu < \infty$ e $0 \le \int f^+ \, d\mu < \infty$. Portanto a integral de f está bem definida.

OBSERVAÇÃO. Na integral de Riemann a integrabilidade absoluta não vale, i.e., pode-se ter $|f|$ integrável sem f sê-la. Considere o exemplo $2\chi_{\mathbb{Q}} - 1$ em $[0, 1]$.

OBSERVAÇÃO. Entretanto $f(x) = x^{-1} \sin x$ é Riemann integrável em $\mathbb{R}$, mas $|f|$ não o é. Logo $f \notin \mathcal{L}$.

Como era de se esperar, $f \in \mathcal{L}$ não mais define uma medida em X, mas sim uma medida com sinal, via

$$\lambda(E) = \int_E f \, d\mu,$$

para $E \in \mathbf{X}$. Se $f = f^+ - f^-$, então $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$, onde $\lambda^+(E) = \int_E f^+ \, d\mu$ e $\lambda^-(E) = \int_E f^- \, d\mu$.

Mais uma vez, a integral define um functional linear, agora em $\mathcal{L}$ (mostre, usando a decomposição $f = f^+ - f^-$).

Lema 3.2.2. Seja $f \in \mathcal{L}$. Então $|\int f\, d\mu| \leq \int |f|\, d\mu$.

Demonstração.

$$|\int f\, d\mu| = |\int f^+ - f^-\, d\mu| \leq |\int f^+\, d\mu| + |\int f^-\, d\mu| = \int f^+ + f^-\, d\mu = \int |f|\, d\mu.$$

□

Concluímos esta parte com um importante resultado de convergência de sequências de funções em $\mathcal{L}$.

Teorema 3.2.3. *(Teorema de Convergência Dominada de Lebesgue - T.C.D.) Seja (f_n) sequência em $\mathcal{L}$, e seja $g \in \mathcal{L}$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.s.. e para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $f \in M(X, \mathbf{X})$ e $f_n(x) \to f(x)$ q.s., então*

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Demonstração. Redefina f e f_n num conjunto de medida nula tal que $f_n(x) \to f(x)$ em X. Como $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.s., então $|f(x)| \leq g(x)$ q.s., e $f \in \mathcal{L}$. Como $g + f_n \geq 0$ q.s., pelo Lema de Fatou (Lema 3.1.6), temos que

$$\int f\, d\mu + \int g\, d\mu = \int (f+g)\, d\mu \leq \liminf \int (f_n + g)\, d\mu = \liminf \int f_n\, d\mu + \int g\, d\mu. \tag{3.2.1}$$

Analogamente, $g - f_n \geq 0$ e então

$$-\int f\, d\mu + \int g\, d\mu = \int (-f+g)\, d\mu \leq \liminf \int (-f_n + g)\, d\mu = -\limsup \int f_n\, d\mu + \int g\, d\mu. \tag{3.2.2}$$

De (3.2.1), (3.2.2), temos que

$$\limsup \int f_n\, d\mu \leq \int f\, d\mu \leq \liminf \int f_n\, d\mu,$$

e portanto

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$

□

CAPÍTULO 4

Os espaços L^p

Já vimos que $\mathcal{L}$ é um espaço vetorial sobre os reais. Veremos agora que $\int |\cdot|\, d\mu$ induz uma semi-norma em $\mathcal{L}$. Definiremos o espaço L^1, no qual a integral acima define uma norma. Mostraremos que L^1 é completo e definiremos os espaços L^p, para $p \in [1, \infty]$.

Lembre-se que uma norma $\|\cdot\|$num espaço vetorial V é uma função de V em $\mathbb{R}$ tal que

(1) $\|v\| \geq 0$ para todo $v \in V$
(2) $\|v\| = 0$ se e somente se $v = 0$
(3) $\|cv\| = |c|\|v\|$ para todo $v \in V$ e $c \in \mathbb{R}$
(4) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ para todo v, $w \in V$

Se $|\cdot|$ satisfaz (1), (3), (4) somente, e não necessariamente (2), chamamos $|\cdot|$ de seminorma. Abaixo temos alguns exemplos de normas.

Exemplo 4.1. Em $\mathbb{R}^n$ temos $\|\cdot\|_\infty$, e $\|\cdot\|_p$ para $p \geq 1$.

Exemplo 4.2. No espaço das funções contínuas em $[0, 1]$, temos que $\|f\|_{\sup} = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$ define uma norma.

Exemplo 4.3. Como exemplo de seminormas, considere o espaço das funções continuamente diferenciáveis em $[0, 1]$. Temos então que $\|f\|_{1,\sup} = \sup\{|f'(x)| : x \in [0, 1]\}$ define uma seminorma. Note que esta se torna uma norma no subespaço das funções diferenciáveis que se anulam no zero, por exemplo.

Em $\mathcal{L}$ definimos

$$\|f\|_1 = \int |f|\, d\mu.$$

Veremos a seguir que $\|\|_1$ define uma semi-norma em L^1. Modificando um pouco e espaço $\mathcal{L}$ tornaremos $\|\|_1$ norma.

Lema 4.0.4. A função$\|\|_1$ acima definida é um semi-norma em L^1. Além disto $\|f\|_1 = 0$ se e somente se $f = 0$ q.s..

Demonstração. Note que para f, $g \in L^1$, e $c \in \mathbb{R}$ temos

(1) $\|f\|_1 = \int |f|\, d\mu \geq 0$
(3) $\|cf\|_1 = \int |cf|\, d\mu = |c| \int |f|\, d\mu = |c|\|f\|_1$
(4) $\|f + g|_1 = \int |f + g|\, d\mu \leq \int |f| + |g|\, d\mu = \|f|_1 + \|f|_1$

Finalmente,

$$\|f\|_1 = 0 \equiv \int |f|\, d\mu = 0 \iff f = 1 \text{ q.s.}$$

□

Motivados pelo resultado acima, definimos para $f \in \mathcal{L}$ a classe de equivalência

$$[f] = \{g \in \mathcal{L} \,:\, g = f \text{ q.s.}\},$$

e definimos o espaço

$$L^1 = \{[f] : f \in \mathcal{L}\}.$$

Então L^1 é espaço vetorial com as operações

$$[f] + [g] = [f + g], \qquad c[f] = [cf],$$

para f, $g \in \mathcal{L}$ e $c \in \mathbb{R}$.

Note que se g, $h \in [f]$, então $g = h$ q.s..

Lema 4.0.5. O espaço L^1 é normado com $\|\cdot\|$ dada para $[f] \in L^1$ por

$$\|[f]\| = \int |f| d\, d\mu,$$

onde $f \in [f]$.

Demonstração. Antes de mais nada note que $\|\cdot\|$ está bem definida em L^1 pois para $[f] \in L^1$ tem-se

$$g, h \in [f] \implies \int |g|\, d\mu = \int |h| d\, d\mu.$$

As propriedades (1), (3), (4) de normas são claramente satisfeitas. Para verificar (2), note que

$$\|[0]\| = \int |0|\, d\mu = 0, \qquad \|[g]\| = 0 \implies g = 0 \text{ q.s.} \implies [g] = [0],$$

pois a classe de equivalência [0] é formada por funções que são iguais a zero quase sempre. □

4.1. Os espaços L^p

Para $1 \leq p \leq +\infty$, definimos L^p como sendo o espaço das classes de equivalência $[f]$ tais que $|f|^p \in \mathcal{L}$. Em L^p definimos

$$\|[f]\|_p = (\int |f|^p\, d\mu)^{1/p}.$$

Denotamos por L^∞ o conjunto das classes de equiavalência $[f]$ onde $f \in M(X, \mathbf{X})$ é limitada q.s., i.e., existe c tal que $|f(x)| \leq c$ q.s..

Dizemos que uma tal função é *essencialmente limitada*, e definimos

$$\operatorname{esssup} |f| = \inf\{c \in \mathbb{R} : \ |f(x)| \leq c \text{ q.s.}\}$$

Note que

$$\operatorname{esssup} |f| = \inf_{N\mathbf{X}, \mu(N)=0} \sup\{|f(x)| : \, x \in X \backslash N\}.$$

Finalmente definimos $\|[f]\|_\infty = \operatorname{esssup} |f|$.

Observação. É fácil verificar que $\|\cdot\|_p$ está bem definida.

Observação. A fim de simplificar a notação, escreveremos f para designar a classe $[f]$ em L^p.

Observação. Para $X = \mathbb{N}$ e $\mathbf{X} = \mathcal{P}(x)$, é possível identificar L^p com l^p (conjunto de sequências) se μ for a medida de contagem.

Nossa tarefa agora é mostrar que $\|\cdot\|$ é norma, e que $(L^p, \|\cdot\|_p)$ é espaço de Banach (espaço vetorial completo), para $p \in [1, +\infty]$. Começamos por mostrar duas importantes desigualdades, a de Holder e a de Minkowski. Antes uma definição e um resultado auxiliar. Chamamos de conjugados os números p, q tais que $p \in (1, +\infty)$ e q tal que $1/p + 1/q = 1$, ou $p = 1$ e $q = 1 + \infty$.

Lema 4.1.1 (Young). Sejam p, q conjugados com $p \in (1, +\infty)$. Então, para todo x, $y \in [0, +\infty)$, tem-se

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Demonstração. Usando que log é função côncava, obtemos

$$\log(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}) \geq \frac{1}{p}\log(x^p) + \frac{1}{q}\log(y^q) = \log(xy).$$

Como log é crescente, obtemos a desigualdade. □

Lema 4.1.2 (Hölder). Seja p, q conjugados e $f \in L^p$, $g \in L^q$. Então $fg \in L^1$ e $\|fg\| \leq \|f\|_p\|g\|_q$.

Demonstração. Se $p = 1$, $q = \infty$, então $|f(x)g(x)| \leq |f(x)|\|g\|_\infty$ q.s., e vale o lema. Para $p \in (1, +\infty)$, suponha $\|f\|_p\|g\|_q \neq 0$. Então pela desigualdade de Young,

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q}. \tag{4.1.1}$$

Portanto $fg \in L^1$, e integrando (4.1.1) obtemos o resultado. □

Mostramos a seguir que $\|\cdot\|_p$ satisfaz a desigualdade triangular.

Lema 4.1.3 (Minkowski). Sejam f, $g \in L^p$, onde $p \in [1, +\infty]$. Então $f + g \in L^p$ e $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Demonstração. O caso $p = \infty$ é imediato, e $p = 1$ já foi considerado. Seja agora $p \in (1, +\infty)$. Então

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (2\sup\{|f(x)|, |g(x)|\})^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p).$$

Portanto como $f + g$ é mensurável e $|f|$, $|g| \in L^1$, então $|f + g| \in L^1$. Finalmente,

$$|f(x) + g(x)|^p \leq |f(x) + g(x)|^{p-1}(|f(x)| + |g(x)|),$$

e utilizando-se que $|f + g|^{(p-1)q} = |f + g|^q \in L^1$, para p, q conjugados, empregamos Hölder para obter

$$\|f + g\|_p^p \leq \|f\|_p\|(f + g)^{p-1}\|_q + \|g\|_p\|(f + g)^{p-1}\|_q = (\|f\|_p + \|g\|_p)(\int |(f + g)^{(p-1)q}|\,d\mu)^{1/q}$$

$$= (\|f\|_p + \|g\|_p)(\int |(f + g)^p|\,d\mu)^{1/p \times p/q} = (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f + g\|_p^{p/q}.$$

□

Com os resultados acima, conluímos que L^p é um espaço vetorial normado, com norma $\|\cdot\|_p$. O passo final é concluir que L^p é de Banach, i.e., é completo. Lembre-se que um espaço completo é aquele em que toda sequência de Cauchy é convergente para um elemento do próprio espaço.

Teorema 4.1.4 (Riesz–Fischer). *O espaço L^p é completo com a norma $\|\cdot\|$, para $p \in [1, +\infty]$.*

Demonstração. Começamos considerando o caso $p = \infty$. Suponha f_n sequência de Cauchy em L^p, i.e., para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $N_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq N_k \implies \|f_m - f_n\|_i nfty \leq \frac{1}{k}.$$

Portanto existe $E_k \in \mathbf{X}$, com $\mu(E_k) = 0$ tal que para todo m, $n \geq N_k$,

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \text{para todo } x \in X \backslash E_k. \tag{4.1.2}$$

Se $E = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$, então $\mu(E) = 0$. Portanto $(f_n(x))$ é de Cauchy para $x \in X \backslash E$. Seja $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ em $x \in X \backslash E$. Tomando $m \to +\infty$ em (4.1.2) temos para todo $n \geq N_k$,

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \text{para todo } x \in X \backslash E.$$

Logo $f \in L^\infty$ e $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

Seja agora $p \in [1, \infty)$, e f_n sequencia de Cauchy em L^p. Sem perda de generalidade (tomando subsequenbcias se necessario), suponha que

$$\|f_{k+1} - f_k\|_p \leq 2^{-k}$$

Definindo $g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|$ para $x \in X$, temos que $\|g_n\| \leq 1$. Segue-se delo TCM para $g(x) =\in g_n(x)$ que

$$\int |g|^p \, d\mu = \lim \int |g_N|^p \, d\mu \leq 1.$$

Logo $g \in L^p$, pois $g \in M(X, \mathbf{X})$. Se $E = g^{-1}(\{+\infty\})$, então $\mu(E) = 0$. A seguir note que para $m \geq n \geq 2$ tem-se para todo $x \in X$ que

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + \cdots + |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq g(x) - g_{n-1}(x).$$

Logo $(f_n(x))$ é de Cauchy em $X \backslash E$, e converge para uma função f em $X \backslash E$. Definindo $f|_E = 0$ por exemplo, e usando que

$$|f(x) - f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{q.s.},$$

temos pelo TCD que $f \in L^p$ e que $\|f - f_n\| \to 0$. $\square$

CAPÍTULO 5

Convergência

Temos ate agora os seguintes tipos de convergência para sequências de funções:

- pontual
- uniforme
- q.s.
- L^p

Estes vários tipoos de convergência não são equivalentes, como vemos a seguir. Em todos os exemplos consideramos $X = \mathbb{R}$ ou um subconjunto de $\mathbb{R}$, com σ-álgebra de Borel, e a medida de Lebesgue.

Exemplo 5.1. Existem sequências de funçõesem L^p uniformemente convergentes que não convergem em L^p. Considere por exemplo $X = \mathbb{R}$ e $f_n = \chi_{[0,n]}/n^{1/p}$. Então $\|f_n\|_p = 1$, mas f_n converge uniformemente para a função identicamente nula.

Entretanto, se $\mu(x) < \infty$, ent¿ao covergência uniforme implica em convergência L^p. De fato, se dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n(x) - f(x)\| \leq \epsilon$ para todo $n > N$, então $f \in L^p$, e

$$\|f - f_n\|_p^p \leq \epsilon^p \mu(X)$$

Exemplo 5.2. Convergencia pontual de funções em L^p não implicam em convergência em L^p, mesmo se X tiver medida finita. Considere como contraexemplo $X = [0,1]$ e $f_n = n\chi_{[0,1/n]}$.

Por outro lado, fortalencendo um pouco as hipóteses, a convergencia em L^p vale. Se f_n estiver em L^p, existir $g \in L^p$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para todo $x \in X$ e todo $n \in \mathbb{N}$, e f_n convergir pontualmente q.s. para $f \in M(X, \mathbf{X})$, então f_n converge para f em L^p. Isto segue-se do fato que como f é mensurável com $f \leq g$ q.s. então $f \in L^p$. Portanto $|f_n(x) - f(x)|^p \leq 2^p g^p(x)$ q.s., e pelo TCD temos $\|f_n - f\|_p \to 0$.

Exemplo 5.3. É possível construir uma função que convirja em L^p mas não pontualmente. Considere

$$f_1 = \chi_{[0,1]},$$
$$f_2 = \chi_{[0,1/2]}, \qquad f_3 = \chi_{[1/2,1]},$$
$$f_4 = \chi_{[0,1/4]}, \qquad f_5 = \chi_{[1/4,1/2]}, \qquad f_6 = \chi_{[1/2,3/4]}, \qquad f_7 = \chi_{[3/4,1]}, \cdots$$

Então para $2^n \leq k \leq 2^{n+1}$ temos $\|f_k\|_p^p = 1/2^n$, e portanto $f_k \to 0$ em L^p, mas para todo $x \in [0,1]$ a sequência $f_n - (x)$ não converge.

5.1. Convergência em medida

Dizemos que uma sequencia (f_n) em $M(x, \mathbf{X})$ *converge em medida* para $f : X \to \mathbb{R}$ mensurável se $\lim_n \to \infty \mu(E_n(\alpha)) = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, onde

$$E_n(\alpha) = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}.$$

Escrito de outra forma, a convergencia em medida ocorre se para todos ϵ e α positivos existir N tal que $\mu(E_n(\alpha)) \leq \epsilon$ para todo $n \geq N$.

De forma análoga, dizemos que (f_n) é *Cauchy em medida* se para todos ϵ e α positivos existir N tal que

$$\mu(\{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| \geq \alpha\}) \leq \epsilon$$

para todos m, $n \geq N$.

algumas relações da noção de convergencia em medida com outras já vistas são apresentadas nos exemplos abaixo.

Exemplo 5.4. Observe que convergência uniforme implica em convergencia em medida pois $\mu(E_n(\alpha)) = 0$, se tomarmos n suficientemente grande. A volta entretanto não vale. Como contraexemplo considere $n\chi_{[0,1/n]}$

Exemplo 5.5. Convergência q.s. não resulta em convergencia em medida se $\mu(X) = \infty$. De fato considere $f_n = \chi_{[n,+\infty)}$.

Exemplo 5.6. Convergencia em medida não implica em convergencia L^p; considere a sequencia dada por $\chi_{[0,1/n]}n^{1/p}$. A volta vale pois

$$\alpha^p \mu(E_n(\alpha)) \leq \int_{E_n(\alpha)} |f_n - f|^p \, d\mu \leq \|f_n - f\|_p.$$

Uma relação entre convergencia Cauchy em medida e convergencia q.s. e em medida é apresentada no resultado abaixo.

Teorema 5.1.1. *Seja (f_n) sequencia de funções reais mensuráveis e Cauchy em medida. Então existe uma subsequencia que converge q.s. e em medida para $f : X \to \mathbb{R}$ mensurável.*

Demonstração. Primeiro mostraremos a convergencia q.s., e para tal seja $(g_k) = (f_{n_k})$ subsequencia de (f_n) tal que $\mu(E_k) \leq 2^{-k}$, onde $E_k = \{x \in X : |g_{k+1}(x) - g_k(x)| \geq 2^{-k}\}$. Para construir tal subsequencia, basta ver que para todo $k \in \mathbb{N}$, existe N_k tal que

$$\mu(\{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| \geq 2^{-k}\}) \leq 2^{-k},$$

para todo m, $n \geq N_k$. Escolha então $g_k = f_{N_k}$.

Seja $F_k = \cup_{j=1}^{\infty} E_j$. Então $F_k \in \mathbf{X}$ e $\mu(F_k) \leq \sum_{j=k}^{\infty} \mu(E_j) = 2^{1-k}$. Se $i \geq j \geq k$, e $x \in X \backslash F_k$ então

$$|g_i(x) - g_j(x)| \leq |g_i(x) - g_{i-1}(x)| + \cdots + |g_{j+1}(x) - g_j(x)| \leq 2^{1-i} + \cdots + 2^{-j} \leq 2^{1-j}. \tag{5.1.1}$$

Seja $F = \cap_{k=1}^{\infty} F_k$. Então F é mensurável e $\mu(F) = 0$ pois $F \subset F_k$ e portanto $\mu(F) \leq \mu(F_k)$ para todo k. Logo $(g_i(x))$ converge para $x \in X \backslash F$. Seja

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{i \to \infty} g_i(x) & x \in X \backslash F, \\ 0 & x \in F. \end{cases}$$

Então $f : X \to \mathbb{R}$ é mensurável e $g_i(x) \to f(x)$ uniformemente em $X \backslash F$ pois para $j \geq k$ e $x \notin F$ tem-se podemos tomar $i \to \infty$ em (5.1.1) e então

$$|f(x) - g_j(x)| \leq 2^{1-k}. \tag{5.1.2}$$

Em particular temos que $g_i(x) \to f(x)$ q.s.. □

5.2. Convergência quase uniforme

Uma sequência (f_n) em $M(X, \mathbf{X})$ é de Cauchy quase uniformemente (q.u.) se para todo $\delta > 0$ existir $E_\delta \in \mathbf{X}$ tal que $\mu(E_\delta) \leq \delta$ e f_n converge uniformemente em $X \backslash E_\delta$. Da mesmo forma, uma sequência (f_n) em $M(X, \mathbf{X})$ converge quase uniformemente para $f \in M(X, \mathbf{X})$ se para todo $\delta > 0$ existir $E_\delta \in \mathbf{X}$ tal que $\mu(E_\delta) \leq \delta$ e $f_n \to f$ uniformemente em $X \backslash E_\delta$.

É fácil ver que se (f_n) converge quase uniformemente (q.u.), então é de Cauchy quase uniformemente. Abaixo mostramos que a volta também vale.

Lema 5.2.1. Seja (f_n) de Cauchy quase uniformemente. Então existe f mensurável tal que f_n converge para f q.u. e q.s..

Demonstração. Para $k \in \mathbb{N}$ seja $E_k \in \mathbf{X}$ tal que $\mu(E_k) \leq 2^{-k}$ e f_n converge uniformemente em $X \backslash E_k$. Seja $F_k = \cup_{j=k}^{\infty} E_k$. Então $\mu(F_k) \leq 2^{1-k}$. Como $X \backslash F_k \subset X \backslash E_k$, então f_n converge uniformemente em $X \backslash F_k$. Seja

$$g(x) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(x) & \text{se } x \notin F_k, \\ 0 & \text{se } x \in F_k. \end{cases}$$

Note que F_k é crescente, e $F = \cap_{k=1}^{\infty} F_k \in \mathbf{X}$, com $\mu(F) = 0$. Para $x \in F$, $g_k(x) = 0$ para todo k. Para $x \notin F$, $g_k(x) = 0$ para $k > k_0$, para algum k_0. Logo g_k converge pontualmente. Seja f seu limite. Então g_k mensurável implica em f mensurável, e para $x \notin F$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Logo $f_n \to f$ q.s. Finalmente, para ver que $f_n \to f$ q.u., dado $\delta > 0$, seja $2^{1-k} < \delta$. Então $\mu(F_k))) < \delta$ e $f_n \to g_k = f$ em $X \backslash F_k$. □

É possível mostar que se (f_n) converge q.u. para f, então a convergência também é em medida. De fato seja $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$ e

$$E_n(\alpha) = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}.$$

Queremos mostrar que $\lim_{n\to\infty} E_n(\alpha) = 0$.

Então, para $\delta > 0$, seja $E_\delta \in \mathbf{X}$ tal que $\mu(E_\delta)$ e $f_n \to f$ uniformemente em $X \backslash E_\delta$. Logo existe N_0 tal que

$$n > N_0 \implies E_n(\alpha) \subset E_\delta \implies \mu(E_\delta) < \delta,$$

como queríamos.

A volta do resultado acima também "quase" vale, i.e., se $f_n \to f$ em medida, então existe uma subsequência convergindo q.u. para f (ver Bartle [**1**]). O contraexemplo da sequência convergindo em L^p e portanto em medida, mas que não converge em nenhum ponto do domínio mostra que convergencia em medida não implica em convergencia q.u..

Temos então que convergência em L^p implica em convergencia q.u. de subsequência. Por outro lado, convergência q.u. não implica em convergência L^p. Exemplo: $n\chi_{[0,1/n]}$. Com convergência dominada q.u. implica em L^p.

Outros fatos:

Convergência q.u. implica q.s., mas convergência uniforme não implica q.u. (contraexemplo: $\chi_{[n,+\infty]}$). Por outro lado, se $\mu(X) < \infty$), ou se a convergencia for dominada, então convergência uniforme implica q.u..

CAPÍTULO 6

Decomposição de Medidas

Seja λ uma medida com sinal. Dizemos que $P \in \mathbf{X}$ é λ-*positivo* se $\lambda(P \cap E) \geq 0$ para todo $E \in \mathbf{X}$. De forma análoga, dizemos que $N \in \mathbf{X}$ é λ-*negativo* se $\lambda(N \cap E) \leq 0$ para todo $E \in \mathbf{X}$. Finalmente, $Z \in \mathbf{X}$ é λ-*nulo* se $\lambda(Z \cap E) = 0$ para todo $E \in \mathbf{X}$. Caso a medida com sinal considerada seja clara, usaremos a terminologia *positivo, negativo, nulo*.

Teorema 6.0.2. *(Decomposição de Hahn) Existe $P \in \mathbf{X}$ tal que P é positivo e $N = X \backslash P$ é negativo.*

Dizemos que o par P e N do teorema acima formam uma decomposição de Hahn. Observe que a decomposição não é única (considere os conjuntos de medida nula). Em termos de medida, esta não unicidade não importa, como nos mostra o resultado abaixo.

Lema 6.0.3. Se P_1 e N_1 e P_2 e N_2 são duas decomposições de Hahn, então

$$\lambda(E \cap P_1) = \lambda(E \cap P_1), \qquad \lambda(E \cap P_2) = \lambda(E \cap P_2),$$

para todo $E \in \mathbf{X}$.

De posse do lema acima, podemos considerar as medidas finitas λ^+ e λ^- dadas por

$$\lambda^+(E) = \lambda(E \cap P), \qquad \lambda^-(E) = -\lambda(E \cap N)$$

para $E \in \mathbf{X}$. São chamadas de *variações positiva e negativa de* λ. Chamamos ainda de *variação total* a medida finita $|\lambda|$ dada por

$$|\lambda|(E) = \lambda^+(E) + \lambda^-(E).$$

A definição acima dá origem à decomposição

$$\lambda(E) = \lambda(E \cap P)\lambda(E \cap N) = \lambda^+(E) - \lambda^-(E),$$

para $E \in \mathbf{X}$. Temos ainda o seguinte resultado.

Teorema 6.0.4. *(Decomposição de Jordan) É possível decompor a medida com sinal λ como diferença entr duas medidas finitas, em particular $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$. Além disto, se μ e ν forem medidas finitas tais que $\lambda = \mu - \nu$, então*

$$\mu(E) \geq \lambda^+(E), \qquad \nu(E) \geq \lambda^-(E),$$

para $E \in \mathbf{X}$.

Um caso particular de medida com sinal é dado por

$$\lambda(E) = \int f \, d\mu \tag{6.0.1}$$

onde μ é medida e f é μ-integrável. O resultado abaixo caracteriza as variações positivas e negativas para λ em (6.0.1).

Teorema 6.0.5. *Se $f \in \mathcal{L}$ e λ é dada por* (6.0.1), *então*

$$\lambda^+(E) = \int_E f^+ \, d\mu, \qquad \lambda^-(E) = \int_E f^- \, d\mu, \qquad |\lambda|(E) = \int_E |f| \, d\mu,$$

CAPÍTULO 7

Construção

Gostaríamos de definir um medida em $X = \mathbb{R}$ que, aplicada a intervalos dê o seu comprimento.

Dizemos que uma família A de subconjuntos de X forma uma álgebra se

(1) $\emptyset$, $X \in \mathbf{A}$
(2) $E \in \mathbf{A} \implies \mathcal{C}(E) \in \mathbf{A}$
(3) $E_1, \ldots, E_n \in \mathbf{A} \implies \cup_{i=1}^{n} E_i \in \mathbf{A}$

Um exemplo de álgebra é a família F de uniões finitas de conjuntos em $\mathbb{R}$ da forma

$$(a, b], \quad (-\infty, b], \quad (a, +\infty), \quad (-\infty, +\infty)$$

Note que F não forma uma σ-álgebra.

Uma medida μ definida numa álgebra $\mathbf{A}$ é tal que

(1) $\mu(\emptyset) = 0$
(2) $\mu(E) \geq 0$ para todo $E \in \mathbf{A}$
(3) Se (E_n) é sequência disjunta em $\mathbf{A}$ com $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathbf{A}$, então

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Um exemplo de medida em F é dada por $l(\cdot)$, onde

$$l(\cup_{n=1}^{\infty}(a_j, b_j]) = \sum b_j - a_j,$$

para $(a_j, b_j]$ disjuntos. Mostrar que $l(\cdot)$ está bem definida e que é de fato uma medida involve certo trabalho [**2**].

Procedemos agora no processo de garantir a existencia de uma σ-álgebra $\mathbf{A}^*$ contendo $\mathbf{A}$ e de uma medida μ^* definida em $\mathbf{A}^*$ e que estende μ.

Passos principais:

(1) Definir medida exterior μ^* (que não é σ-aditiva e portanto não é medida) em $\mathcal{P}(X)$ com $\mu^* = \mu$ em $\mathbf{A}$.
(2) Mostrar (Caratheódory) que existe σ-álgebra $\mathbf{A}^* \supset \mathbf{A}$, onde μ^* é medida.
(3) Mostrar (Hahn) que se μ é σ-álgebra, então a extensão é única.

7.0.1. Passo 1. Seja $B \subset X$ e $S_B = \{(E_n)\text{sequência em } \mathbf{A} : B \subset \cup_{n=1}^{\infty} E_n\}$. Definimos então a medida exterior $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ por

$$\mu^*(B) = \inf_{(E_n) \in S_B} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n),$$

para $B \subset X$. Note que μ^* está bem definida para *todo* subconjunto de X, e não apenas numa σ-álgebra.

Temos então o seguinte resultado.

LEMA 7.0.6. Seja μ^* medida exterior. Então

(1) $\mu^*(\emptyset) = 0$
(2) $\mu^*(B) \geq 0$ para todo $B \subset X$
(3) Se $A \subset B$, então $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
(4) Se $B \in \mathbf{A}$ então $\mu^*(B) = \mu(B)$
(5) Se (B_n) é sequência em $\mathcal{P}(X)$ então $\mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n)$

DEMONSTRAÇÃO. Os ítens (1), (2) e (3) são imediatos.

Para mostrar (4), note primeiro que $(B, \emptyset, \emptyset, \cdots) \in S_B$ e então $\mu^*(B) \leq \mu(B)$. Seja agora $(E_n) \in S_B$. Então $B = \cup_{n=1}^{\infty}(B \cap E_n)$ e

$$\mu(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B \cap E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Portanto $\mu(B) \leq \mu^*(B)$.

O ítem (5) segue-se do seguinte argumento. Seja $\epsilon > 0$, e para j fixo, seja $(E_{jk}) \in S_{B_j}$ com

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_{jk}) + 2^{-j}\epsilon \geq \mu^*(B).$$

então $(E_{jk})_{j,k=1}^{\infty} \in S_{\cup_{j=1}^{\infty} B_j}$, e

$$\mu^*(\cup_{j=1}^{\infty} B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_{jk}) \leq \epsilon + \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(B_j).$$

□

OBSERVAÇÃO. μ^* é chamada de *σ-subaditiva*. Note que ela estende μ mas que não é medida.

7.0.2. Passo 2. Um conjunto $E \subset X$R é μ^*-mensurável se

$$\mu^*(A) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(A \backslash E)$$

para todo $A \in \mathcal{P}(X)$. Seja A^* a coleção de conjuntos μ^*-mensuráveis.

TEOREMA 7.0.7 (Caratheódory). *$\mathbf{A}^*$ é σ-álgebra, $A \subset A^*$, e μ^* é medida em A^*, i.e., μ^* é σ-aditiva em A^*.*

DEMONSTRAÇÃO. (1) $\emptyset$, $X \in A^*$
(2) $\mathbf{A}^*$ é fechada por interseções ($\mathbf{A}^*$ é álgebra)
(3) μ^* é aditiva em A^*
(4) $\mathbf{A}^*$ é σ-álgebra e μ^* é σ-aditiva em A^*
(5) $\mathbf{A} \subset \mathbf{A}^*$

□

Note que o resultado acima garante a existência de uma σ-álgebra A^* e uma medida μ^* em A^* tal que $\mathbf{A} \subset \mathbf{A}^*$ e $\mu^*|_A = \mu$.

Note também que A^* é completa por construção, i.e., se $E \in A^*$ tem medida nula e $B \subset E$, então $E \in \mathbf{A}^*$. De fato,

$$\mu^*(A) = \mu^*(E) + \mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \backslash B)$$

pois $A \cap B \subset E$ e $A \backslash B \subset A$. Por outro lado, usando a σ-subaditividade temos que

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \backslash B)$$

Logo

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \backslash B)$$

e então B é μ^*-mensurável, i.e, $A \in \mathbf{A}^*$.

7.0.3. Passo 3. Mostramos agora que se μ é σ-aditiva, então a extensão é única.

Lema 7.0.8 (Hahn). Seja μ σ-finita em $\mathbf{A}$. Então existe uma única extensão de μ para uma medida em $\mathbf{A}^*$.

Observação. Neste caso a extensão μ^* é única.

Lembre-se que a álgebra de Borel $\mathbf{B}$ é a menor σ-álgebra gerada pelos abertos (a, b). Um conjunto em $\mathbf{B}$ é chamado de conjunto de Borel, ou boreliano.

Pelos resultados acima, podemos estender a medida l definida na álgebra $\mathbf{B}$ para uma única medida l^* definida na σ-álgebra $\mathbf{B}^*$.

Note que $B \subset B^*$, pois $\mathbf{B}^*$ também é σ-álgebra, e contém os abertos (e $\mathbf{B}$ é a menor de todas σ-álgebras). Chamamos $\mathbf{B}^*$ de álgebra de Lebesgue, l^* de medida de lebesgue, e os conjuntos em $\mathbf{B}^*$ de conjuntos de Lebesgue. Então $F \subsetneq \mathbf{B} \subsetneq \mathbf{B}^* \subsetneq \mathcal{P}(X)$. Pode-se mostrar ainda que $(\mathbf{B}^*, l^*)$ é o completamento de $(\mathbf{B}, l^*|_B)$.

Uma outra medida interessante é a de Borel-Stieltjes, gerada por uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótonas crescentes e contínua à direita, i.e.,

$$g(c) = \lim_{h \to 0^+} g(c + h),$$

para todo $c \in \mathbb{R}$. Definimos então

$$\mu_g((a, b]) = g(b) - g(a), \qquad \mu_g((-\infty, b]) = g(b) - \lim_{x \to -\infty} g(x),$$
$$\mu_g((a, \infty)) = \lim_{x \to \infty} g(x) - g(a), \qquad \mu_g((-\infty, \infty]) = \lim_{x \to \infty} g(x) - \lim_{x \to -\infty} g(x).$$

É possível estender μ_g como medida para a álgebra F. Finalmente estende-se μ_g de forma única para a σ-álgebra de Borel.

Bibliography

[1] R. G. Bartle, *The elements of integration*, Wiley, New York, 1966. MR0200398
[2] C. S. Kubrusly, *Measure theory*, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2007. MR2271567
[3] W. Rudin, *Real and complex analysis*, Third edition, McGraw-Hill, New York, 1987. MR0924157