C. R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Série I, p. 85–90, 2001
Commémoration/*Commemoration*

Le centenaire de l'intégrale de Lebesgue

Jean-Michel BONY, Gustave CHOQUET, Gilles LEBEAU

Résumé. À l'initiative de la section de Mathématiques de l'Académie, les *Comptes rendus* souhaitent commémorer la publication de la première Note de Lebesgue sur la théorie de l'intégration. Nos confrères J.-M. Bony, G. Choquet et G. Lebeau ont bien voulu se charger des commentaires. Nous les en remercions très vivement.

Ph.G. Ciarlet et B. Malgrange

Voici à peine plus de cent ans qu'est né le couple « mesure, intégration » devenu très vite le socle inébranlable de l'Analyse mathématique. Si l'on ne devait retenir que les pages fondatrices de ces deux outils ce serait, pour la *mesure*, les pages 46 à 50 des *Leçons sur la théorie des fonctions* (1898) d'Émile Borel ; et pour l'*intégration* la Note de Henri Lebesgue reproduite ci-dessous.

Dans la partie de ses *Leçons* de 1898 intitulée « Les ensembles mesurables », Borel dit clairement que son but est d'attribuer une mesure à des sous-ensembles du segment $[0,1]$ plus généraux que des sous-intervalles, et engendrés à partir de ceux-ci par des opérations de réunion dénombrable ou de passage au complémentaire ; simultanément il demande que la mesure de ces sous-ensembles (nommés plus tard mesurables B par Lebesgue) vérifie la propriété d'additivité suivante bien connue aujourd'hui : si (X_n) est une famille finie ou dénombrable de tels ensembles disjoints deux à deux, leur réunion a pour mesure la somme de leurs mesures ; et d'autre part tout sous-intervalle a pour mesure sa longueur.

C'était bref et tout à fait nouveau, mais il y manquait la preuve d'existence et d'unicité d'une telle mesure. Certes, il affirmait en page 47 : « Le lemme fondamental démontré pages 41–43 (concernant le recouvrement de $[0,1]$ par une suite d'intervalles ouverts), nous assure que ces définitions ne seront jamais contradictoires entre elles ». Cette affirmation, renforcée par la note en bas de la page 47 sera commentée comme suit dans la page 14 de la Note VI de 1914 dans ses *Leçons* : « Mais j'ai omis toute démonstration car la rédaction me paraissait devoir être longue et fastidieuse. Cette justification résulte indirectement des travaux de Lebesgue ».

Le moment est donc venu de mettre sous les yeux des lecteurs la Note de Lebesgue dont nous célébrerons le centenaire le 29 avril 2001, une Note d'autant plus remarquable qu'il serait difficile de dire en moins de mots ce qu'est un ensemble mesurable et sa mesure, une fonction intégrable et son intégrale.

Reproduction des pages 1025 *à* 1027 *du tome* 132 (*janvier–juin* 1901)
des Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences
Séance du lundi 29 *avril* 1901

S0764-4442(00)01829-2/MIS

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une généralisation de l'intégrale définie.* Note de M. **H. Lebesgue**, présentée par M. Picard.

« Dans le cas des fonctions continues, il y a identité entre les notions d'intégrale et de fonction primitive. Riemann a défini l'intégrale de certaines fonctions discontinues, mais toutes les fonctions dérivées ne sont pas intégrables, au sens de Riemann. Le problème de la recherche des fonctions primitives n'est donc pas résolu par l'intégration, et l'on peut désirer une définition de l'intégrale comprenant comme cas particulier celle de Riemann et permettant de résoudre le problème des fonctions primitives (1).

» Pour définir l'intégrale d'une fonction continue croissante

$$y(x)\,(a \leqq x \leqq b),$$

on divise l'intervalle (a, b) en intervalles partiels et l'on fait la somme des quantités obtenues en multipliant la longueur de chaque intervalle partiel par l'une des valeurs de y quand x est dans cet intervalle. Si x est dans l'intervalle (a_i, a_{i+1}), y varie entre certaines limites m_i, m_{i+1}, et réciproquement si y est entre m_i et m_{i+1}, x est entre a_i et a_{i+1}. De sorte qu'au lieu de se donner la division de la variation de x, c'est-à-dire de se donner les nombres a_i, on aurait pu se donner la division de la variation de y, c'est-à-dire les nombres m_i. De là deux manières de généraliser la notion d'intégrale. On sait que la première (se donner les a_i) conduit à la définition donnée par Riemann et aux définitions des intégrales par excès et par défaut données par M. Darboux. Voyons la seconde.

» Soit la fonction y comprise entre m et M. Donnons-nous

$$m = m_0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_{p-1} < \mathrm{M} = m_p;$$

$y = m$, quand x fait partie d'un ensemble E_0; $m_{i-1} < y \leqq m_i$ quand x fait partie d'un ensemble E_i.

» Nous définirons plus loin les mesures λ_0, λ_i de ces ensembles. Considérons l'une ou l'autre des deux sommes

$$m_0\lambda_0 + \Sigma m_i \lambda_i; \quad m_0\lambda_0 + \Sigma m_{i-1}\lambda_i;$$

si, quand l'écart maximum entre deux m_i consécutifs tend vers zéro, ces sommes tendent vers une même limite indépendante des m_i choisis, cette limite sera par définition l'intégrale des y qui sera dite *intégrable*.

---

(1) Ces deux conditions imposées *a priori* à toute généralisation de l'intégrale sont évidemment compatibles, car toute fonction dérivée intégrable, au sens de Riemann, a pour intégrale une de ses fonctions primitives.

» Considérons un ensemble de points de (a, b); on peut d'une infinité de manières enfermer ces points dans une infinité dénombrable d'intervalles; la limite inférieure de la somme des longueurs de ces intervalles est la mesure de l'ensemble. Un ensemble E est dit *mesurable* si sa mesure augmentée de celle de l'ensemble des points ne faisant pas partie de E donne la mesure de (a, b) (¹). Voici deux propriétés de ces ensembles : une infinité d'ensembles mesurables E_i étant donnée, l'ensemble des points qui font partie de l'un au moins d'entre eux est mesurable; si les E_i n'ont deux à deux aucun point commun, la mesure de l'ensemble obtenu est la somme des mesures E_i. L'ensemble des points communs à tous les E_i est mesurable.

» Il est naturel de considérer d'abord les fonctions telles que les ensembles qui figurent dans la définition de l'intégrale soient mesurables. On trouve que : *si une fonction limitée supérieurement en valeur absolue est telle que, quels que soient* A *et* B, *l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on a* $A < y \leqq B$ *est mesurable, elle est intégrable* par le procédé indiqué. Une telle fonction sera dite *sommable*. L'intégrale d'une fonction sommable est comprise entre l'intégrale par défaut et l'intégrale par excès. De sorte que, *si une fonction intégrable au sens de Riemann est sommable, l'intégrale est la même avec les deux définitions*. Or, *toute fonction intégrable au sens de Riemann est sommable,* car l'ensemble de ses points de discontinuité est de mesure nulle, et l'on peut démontrer que si, en faisant abstraction d'un ensemble de valeurs de x de mesure nulle, il reste un ensemble en chaque point duquel une fonction est continue, cette fonction est sommable. Cette propriété permet de former immédiatement des fonctions non intégrables au sens de Riemann et cependant sommables. Soient $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions continues, $\varphi(x)$ n'étant pas toujours nulle; une fonction qui ne diffère de $f(x)$ qu'aux points d'un ensemble de mesure nulle partout dense et qui en ces points est égale à $f(x) + \varphi(x)$ est sommable sans être intégrable au sens de Riemann. *Exemple :* La fonction égale à o si x irrationnel, égale à 1 si x rationnel. Le procédé de formation qui précède montre que l'ensemble des fonctions sommables a une puissance supérieure au continu. Voici deux propriétés des fonctions de cet ensemble.

» 1° *Si f et φ sont sommables, $f + \varphi$ et $f\varphi$ le sont* et l'intégrale de $f + \varphi$ est la somme des intégrales de f et de φ.

» 2° *Si une suite de fonctions sommables a une limite, c'est une fonction sommable.*

» L'ensemble des fonctions sommables contient évidemment $y = k$ et $y = x$; donc, d'après 1°, il contient tous les polynomes et comme, d'après

(¹) Si l'on ajoute à ces ensembles des ensembles de mesures nulles convenablement choisis, on a des ensembles mesurables au sens de M. Borel (*Leçons sur la théorie des fonctions*).

2°, il contient toutes ses limites, il contient donc toutes les fonctions continues, toutes les limites de fonctions continues, c'est-à-dire les fonctions de première classe (voir Baire, *Annali di Matematica*, 1899), il contient toutes celles de seconde classe, etc.

» En particulier, *toute fonction dérivée, limitee supérieurement en valeur absolue*, étant de première classe, *est sommable* et l'on peut démontrer que *son intégrale, considérée comme fonction de sa limite supérieure, est une de ses fonctions primitives.*

» Voici maintenant une application géométrique : si $|f'|$, $|\varphi'|$, $|\psi'|$ sont limitées supérieurement, la courbe

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t)$$

a pour longueur l'intégrale de $\sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2}$. Si $\varphi = \psi = 0$, on a la variation totale de la fonction f à variation limitée. Dans le cas où f', φ', ψ' n'existent pas, on peut obtenir un théorème presque identique en remplaçant les dérivées par les nombres dérivés de Dini. »

Quelques commentaires

1. La rhétorique

Cette Note tient en moins de trois pages et pourrait même être plus courte si Lebesgue ne prenait grand soin de faire apparaître ses idées révolutionnaires comme naturelles et élémentaires. Il consacre treize lignes à l'intégration des fonctions continues monotones, non en raison de leur intérêt mathématique, mais parce que c'est le seul cas où son nouveau procédé d'intégration y coïncide avec celui de Riemann. La rhétorique est ensuite très serrée :
1. « de là deux manières de généraliser la notion d'intégrale . . . Voyons la seconde » ;
2. la définition de son procédé d'intégration, effectivement très simple à condition que la mesure des ensembles soit connue ;
3. la définition des ensembles mesurables et de leur mesure ;
4. « il est naturel de considérer d'abord les fonctions telles que les ensembles qui figurent dans la définition de l'intégrale soient mesurables ».

Au terme de cette démarche, d'apparence très naturelle, les notions de fonction sommable et d'intégrale d'une telle fonction sont acquises, et il ne reste plus qu'à en énoncer quelques propriétés frappantes.

2. L'intégration

Il s'agit de l'une des deux grandes idées novatrices de la Note. Pour une fonction bornée quelconque f, la subdivision de l'intervalle d'arrivée (m, M) revient à se donner une partition finie de l'intervalle (a, b) en ensembles dans lesquels f est presque constante. Si l'on sait définir la mesure de ces ensembles – ce sera la seule restriction à apporter à f – la définition de valeurs approchées de l'intégrale et l'existence de leur limite deviennent effectivement évidentes.

Cette nouvelle définition a de nombreux avantages si on la compare à celle de Riemann et deux d'entre eux sont soulignés par Lebesgue. D'une part, il est possible d'intégrer beaucoup plus de fonctions. D'autre part, ce que Lebesgue semble considérer comme le résultat essentiel de sa Note, le problème de la recherche des primitives des fonctions dérivées *bornées* est résolu. Si une fonction F est dérivable en tout point de (a, b), la fonction F', supposée bornée, n'est pas toujours intégrable au sens de Riemann, mais elle est toujours sommable et $\int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t$ ne diffère de F que d'une constante.

En fait, Lebesgue semble victime d'un blocage psychologique qui, pendant plusieurs années, lui fait limiter son intégrale aux fonctions bornées. Certes, en page 29 de sa thèse de 1902 : *Intégrale, longueur, aire*, il déclare : « Avec cette extension du sens des mots fonction sommable et intégrale, tous les énoncés donnés précédemment restent exacts [pour les fonctions non bornées] », mais dans une lettre à Borel de 1905, il dit encore, à propos des fonctions non bornées : « Il est si difficile d'attaquer ces maudites fonctions. »

Ce blocage est peut-être dû au fait que l'intégrale de Lebesgue ne suffit pas pour résoudre en général le problème de la recherche des fonctions primitives. La totalisation de Denjoy (1912) donnera une solution complète de ce problème, mais, si la première étape repose sur l'intégrale de Lebesgue, elle doit être suivie d'un procédé de sommation transfini.

Assez curieusement, le grand « théorème de Lebesgue » sur le passage à la limite de l'intégrale, qui figurera en bonne place dans sa thèse, n'est pas énoncé dans la Note.

Il faudra attendre les travaux de Fischer et de F. Riesz (1907) pour découvrir une supériorité considérable de l'intégrale de Lebesgue sur celle de Riemann : l'espace des fonctions sommables est complet. Les espaces L^p suivront bientôt. L'existence de cette chaîne d'espaces aux belles propriétés sera à l'origine du développement considérable de l'analyse fonctionnelle abstraite. Elle sera aussi le point de départ de la floraison des espaces fonctionnels (ne citons que les espaces de Sobolev $\mathrm{W}^{s,p}$ parmi ceux qui n'ont que deux indices) sur lesquels repose l'Analyse moderne.

Enfin, pour le procédé d'intégration de Lebesgue, ni la relation d'ordre, ni la topologie de (a, b) ne jouent le moindre rôle. Seule importe l'additivité dénombrable de la mesure. Les définitions, résultats principaux et démonstrations pourront en être reproduits sans grande modification au fur et à mesure des extensions de la notion de mesure que nous examinerons ci-dessous.

3. La mesure

La seconde idée révolutionnaire de Lebesgue est la définition de ce qu'il appelle ici *mesure* d'un ensemble, qu'il rebaptisera *mesure extérieure* dans sa thèse, et l'introduction des ensembles *mesurables*. Six lignes lui suffisent et, pour en apprécier toute l'importance, il est bon de comparer avec le passage des *Leçons* de Borel que nous avons évoqué dans l'introduction. Si Borel avait entrepris et achevé la rédaction « longue et fastidieuse » de ses idées, il aurait dû procéder à une récurrence transfinie pour arriver à définir les ensembles que nous nommons *boréliens*, pour définir leur mesure, pour démontrer l'additivité dénombrable.

La définition de Lebesgue des ensembles mesurables, qui peut être réécrite en disant que leur mesure intérieure est égale à leur mesure extérieure, attribue directement une mesure à une classe d'ensembles qui contient les boréliens et qui est stable par les opérations dénombrables. En outre, comme le précise la note en bas de page, tout ensemble mesurable peut être rendu borélien en lui ajoutant (ou retranchant) un ensemble de mesure nulle. Les travaux de Souslin montreront que les ensembles mesurables contiennent en outre les projections des ensembles boréliens.

La notion de mesure fera l'objet de nombreuses extensions : les intégrales multiples, par Lebesgue lui-même (1910) ; les mesures de Radon (1913), étendant des travaux de Stieltjes et F. Riesz ; l'intégrale de Daniell (1918) ; les mesures abstraites de Carathéodory (1918). Cette dernière extension s'affranchit des arguments topologiques avec lesquels Lebesgue lui-même et ses successeurs démontraient l'additivité dénombrable de la mesure. Elle a permis le développement spectaculaire de la théorie des probabilités avec la mesure de Wiener (1922) et surtout l'axiomatisation de cette théorie due à Kolmogoroff (1933) : la probabilité elle-même – et non plus seulement les lois de probabilité – y est définie comme une mesure sur un espace abstrait, capable par exemple de paramétrer toutes les évolutions possibles d'un système.

Dans le prolongement de ce mouvement d'enrichissement de la notion de mesure, et donc comme héritage plus lointain de l'œuvre de Lebesgue, on doit encore citer la théorie des distributions de L. Schwartz (1945) et les capacités abstraites de Choquet (1959).

4. Quelques points d'histoire

Henri Lebesgue est né le 28 juin 1875 à Beauvais (Oise), élève de l'École normale supérieure (1894–1897), docteur ès sciences (1902), membre de l'Académie des sciences (1922), il est décédé à Paris le 26 juillet 1941.

Tous les documents concernant la genèse de l'intégrale de Lebesgue sont contenus dans les cinq volumes des œuvres scientifiques de Lebesgue publiés par la revue de Genève *L'enseignement mathématique*, complétés par les *Lettres de Lebesgue à Borel* datées de mai 1901 à décembre 1914, publiées par Pierre Dugac et Bernard Bru dans les *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*.

Les plus importants pour nous de ces documents sont les notices nécrologiques dues à Paul Montel et Arnaud Denjoy, les quatre notes aux *Comptes rendus* de Lebesgue des années 1899 et 1900, et les paragraphes 19 à 21 du grand mémoire de Lebesgue (1918) : *Remarques sur les théories de la mesure et de l'intégration*.

Les témoignages de Montel, Denjoy et Lebesgue lui-même, ainsi que la Note de 1899 : *Sur quelques surfaces non réglées applicables sur le plan*, concordent pour faire remonter au temps (1894–1897) où Lebesgue était jeune normalien, sa recherche d'un outil pour étudier les surfaces applicables sur le plan bien que ne contenant aucun segment de droite.