

INTRODUÇÃO À ANÁLISE – FGV
LISTA IV

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **01 de outubro de 2020**

Exercício 1. Mostre que num corpo, o 0 não possui inversa multiplitiva.

Exercício 2. Prove que num corpo existe um único elemento neutro da adição, um único elemento neutro da multiplicação, todo $x \neq 0$ possui um único inverso aditivo e um um único inverso multiplicativo.

Exercício 3. Mostre que num corpo K com ordem P ,

- (1) se $a, b \in -P$ então $a + b \in -P$
- (2) se $a \in -P$ e $c \in P$, então $a \cdot c \in -P$
- (3) se $c \in P$, então $c^{-1} \in P$

Exercício 4. Mostre que se $x > y > 0$ num corpo K , então $x^{-1} < y^{-1}$. E que se $x^2 + y^2 = 0$, então $x = y = 0$.

Exercício 5. Defina em $\mathbb{Q}(t)$ o conjunto

$$P = \{p(t) \in \mathbb{Q}(t) : \text{o coeficiente do termo de maior grau de } p(t) \text{ é positivo}\}.$$

Mostre que P define de fato uma ordem em $\mathbb{Q}(t)$.

Exercício 6. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ e as funções $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sejam tais que os conjuntos $f(A)$ e $g(A)$ sejam limitados superiormente. Defina a função $f + g : A \rightarrow \mathbb{R}$ por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Mostre que $\sup(f + g)(A) \leq \sup f(A) + \sup g(A)$. Dê um exemplo em que a desigualdade é estrita.