

Análise e Métodos Numéricos em EDPs com Múltiplas Escalas

Parte II: Modelagem em domínios com fronteiras rugosas

Alexandre L. Madureira
www.lncc.br/~alm

Laboratório Nacional de Computação Científica – LNCC
Petrópolis - RJ

ENAMA II
João Pessoa, 6/11/2008

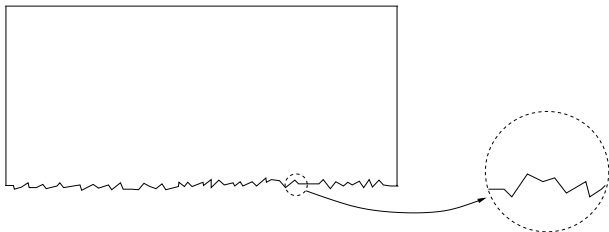
Plano da palestra

- 1 Descrição do Problema e Aplicações
- 2 Caso Especial: rugosidades periódicas
- 3 Elemento Finito Multiescalas
- 4 Conclusões gerais

Plano da palestra

- 1 Descrição do Problema e Aplicações
 - O Problema
 - Aplicações
- 2 Caso Especial: rugosidades periódicas
- 3 Elemento Finito Multiescalas
- 4 Conclusões gerais

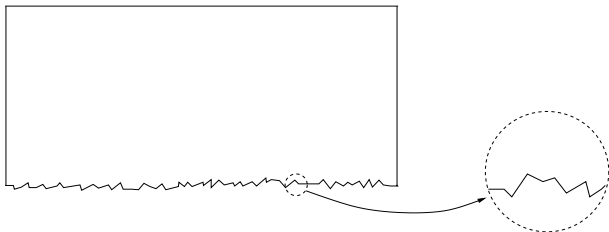
Considere o domínio Ω^ϵ :



e o problema

$$\begin{aligned} -\Delta u^\epsilon &= f \quad \text{em } \Omega^\epsilon, \\ u^\epsilon &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega^\epsilon, \end{aligned}$$

Considere o domínio Ω^ϵ :



e o problema

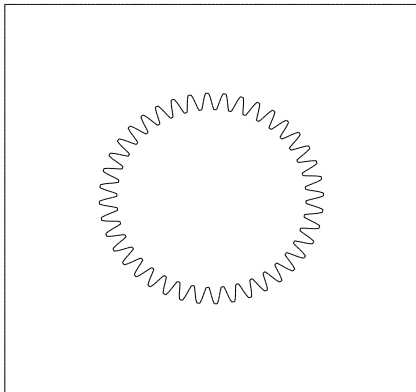
$$\begin{aligned} -\Delta u^\epsilon &= f \quad \text{em } \Omega^\epsilon, \\ u^\epsilon &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega^\epsilon, \end{aligned}$$

Por que este problema é difícil?

- Geometria complicada torna a discretização difícil e cara.

Considere o seguinte domínio com fronteira interna rugosa:

ROUGH DOMAIN

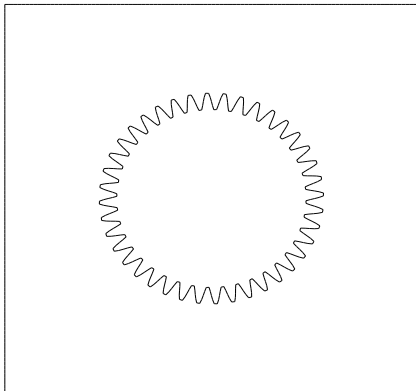


Por que este problema é difícil?

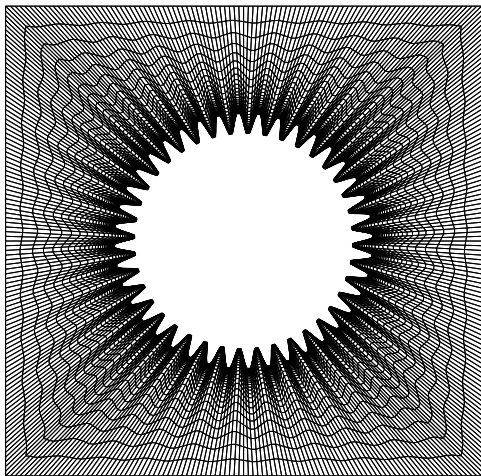
- Geometria complicada torna a discretização difícil e cara.

Considere o seguinte domínio com fronteira interna rugosa:

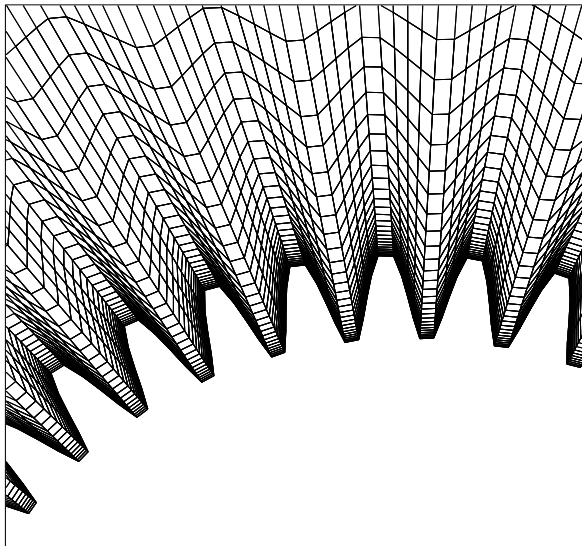
ROUGH DOMAIN



Malha de elementos finitos:



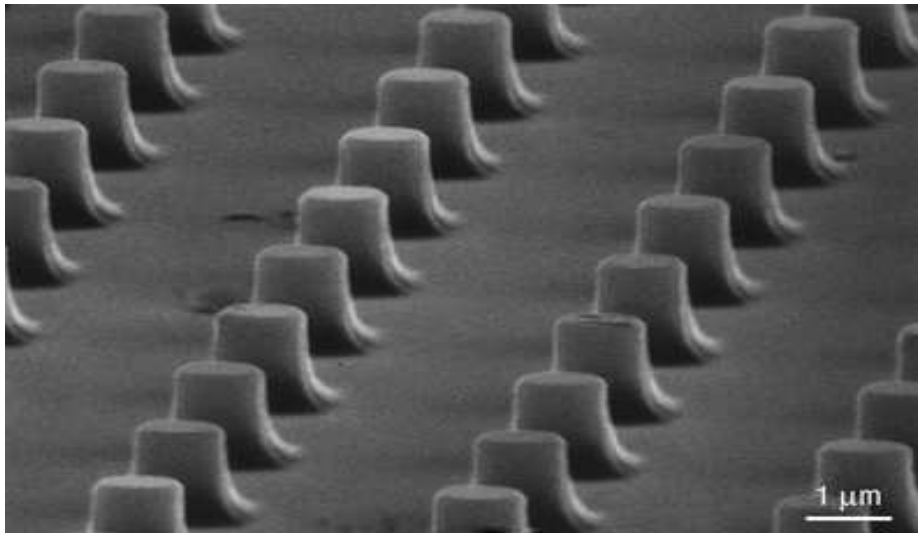
Zoom da malha:



E quanto a aplicações?

- Poder do Lotus: superfícies autolimpantes
- roupas de natação “pele de tubarão”
- bolas de golfe
- filmes sobre fuselagem de aviões para reduzir atrito
- reflexão de ondas eletromagnéticas por partículas metálicas dispostas sobre uma parede
- fontes pontuais de poluição dispostas sobre uma linha ou superfície



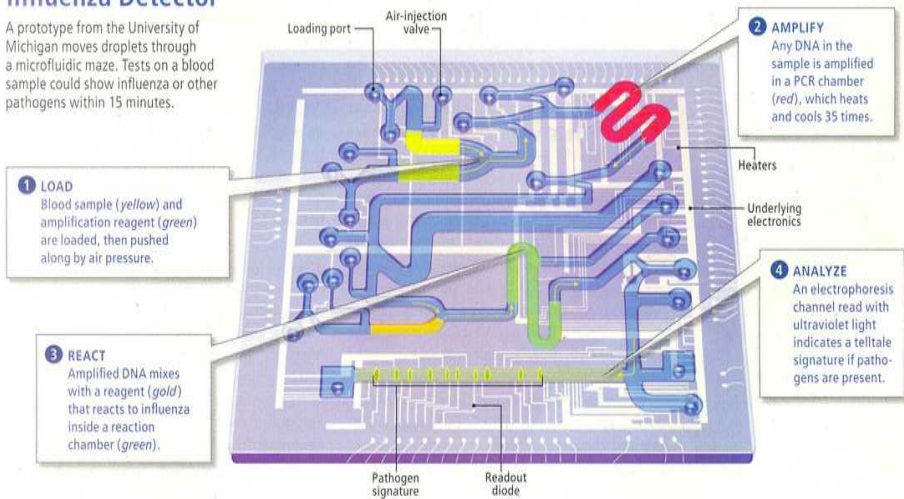


A designed rough surface — the similarity to a Fakir carpet is apparent

From *Self-cleaning surfaces — virtual realities*, Ralf Blossey, *Nature Materials* 2, 301 - 306 (2003)

Influenza Detector

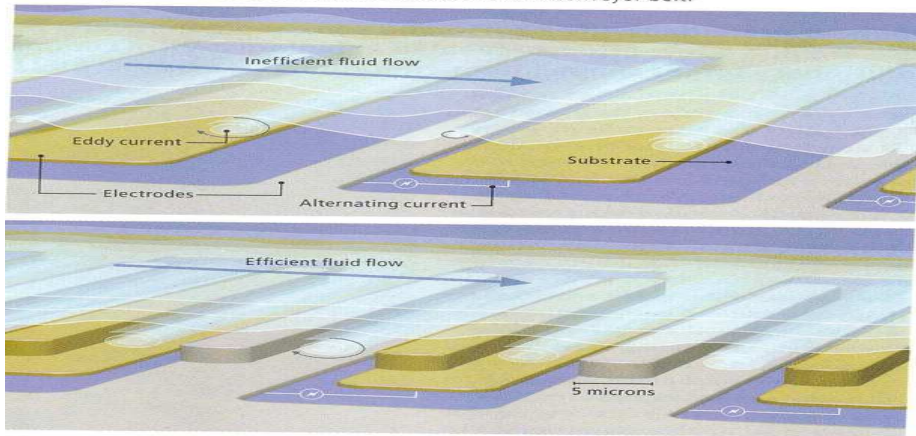
A prototype from the University of Michigan moves droplets through a microfluidic maze. Tests on a blood sample could show influenza or other pathogens within 15 minutes.



From *Big Lab on a Tiny Chip*, Charles Q. Choi, Scientific American, September 2007, 74 - 77

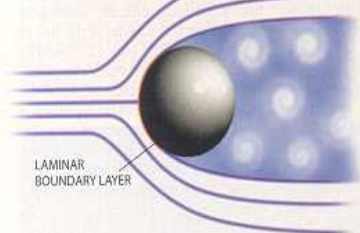
Microconveyor

Alternating current along a string of electrodes can pump liquids along a microfluidic channel. But turbulence between electrodes (*top*) makes the net progress slow. A novel pump design from M.I.T. (*bottom*) speeds flow by a factor of 10; shaping each electrode like a step creates eddies that act like rollers in a fluid conveyor belt.

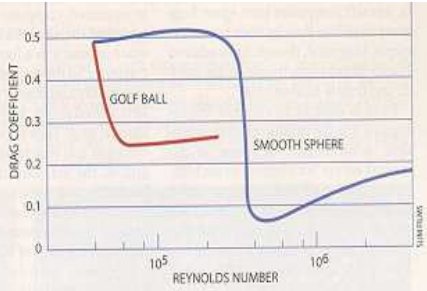
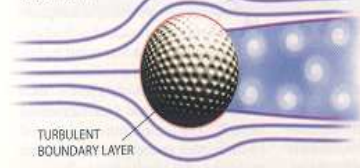


From *Big Lab on a Tiny Chip*, Charles Q. Choi, Scientific American, September 2007, 74 - 77

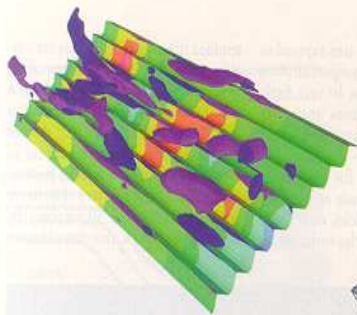
FLOW PAST A SMOOTH SPHERE



FLOW PAST A GOLF BALL



DRAG ON A GOLF BALL comes mainly from air-pressure forces. This drag arises when the pressure in front of the ball is significantly higher than that behind the ball. The only practical way of reducing this differential is to design the ball so that the main stream of air flowing by it is as close to the surface as possible. This situation is achieved by a golf ball's dimples, which augment the turbulence very close to the surface, bringing the high-speed airstream closer and increasing the pressure behind the ball. The effect is plotted in the chart, which shows that for Reynolds numbers achievable by hitting the ball with a club, the coefficient of drag is much lower for the dimpled ball.



HACHIEDIN CHOK, PAVITZ MOON AND JOHN KIM



SUMIYAMA



WOLFF-EMST REEF

Plano da palestra

1 Descrição do Problema e Aplicações

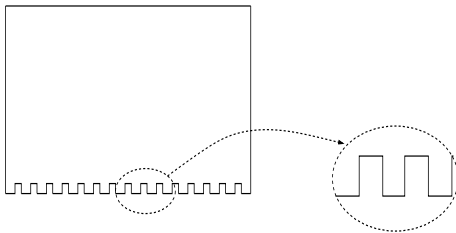
2 **Caso Especial: rugosidades periódicas**

- **Descrição**

3 Elemento Finito Multiescalas

4 Conclusões gerais

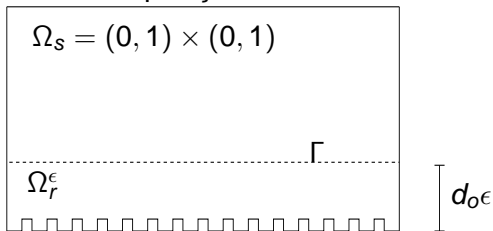
Considere o caso de rugosidades periódicas, como abaixo:



e o mesmo problema de antes:

$$\begin{aligned} -\Delta u^\epsilon &= f \quad \text{em } \Omega^\epsilon, \\ u^\epsilon &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega^\epsilon. \end{aligned}$$

Considere a seguinte decomposição do domínio Ω^ϵ :



A solução se comporta assintoticamente como

$$u^\epsilon(\mathbf{x}) \sim [y - \epsilon w(\epsilon^{-1}\mathbf{x}, \epsilon^{-1}y) + \epsilon(d_0 - C_{cela})] \frac{\partial u^0}{\partial y} \Big|_{\Gamma}(\mathbf{x}) + \dots \quad \text{em } \Omega_r^\epsilon$$

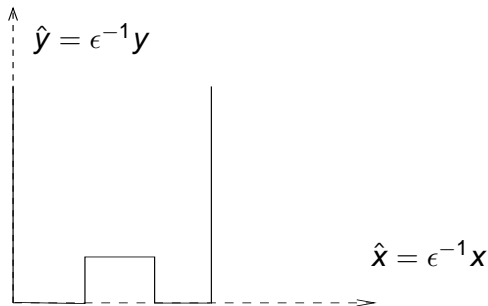
$$u^\epsilon(\mathbf{x}) \sim u^0(\mathbf{x}) - \epsilon w(\epsilon^{-1}\mathbf{x}, \epsilon^{-1}y) \frac{\partial u^0}{\partial y} \Big|_{\Gamma}(\mathbf{x}) + \epsilon u^1(\mathbf{x}) + \dots \quad \text{em } \Omega_s$$

→ O erro de truncamento é como o que se espera!

Definimos

$$-\Delta u^0 = f \quad \text{em } \Omega_s, \quad u^0 = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega_s.$$

Os termos de correção $w(\hat{x}, \hat{y})$, e C_{cela} , são determinados na faixa semi-infinita e independente de ϵ



$\Delta w = 0$ na faixa

$w = \hat{y} - C_{cela}$ na parte de baixo da faixa

w periódica, and decai a zero (exponencialmente) com \hat{y}

Lei de parede

Finalmente, seja

$$\begin{aligned} -\Delta u^1 &= 0 \quad \text{em } \Omega_s, \\ u^1 &= (d_0 - C_{cela}) \frac{\partial u^0}{\partial y} \quad \text{sobre } \Gamma, \quad u^1 = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega_s \setminus \Gamma. \end{aligned}$$

Supondo $u^\epsilon \approx u^0 + \epsilon u^1$ em Ω_s , definimos a aproximação \bar{u}^ϵ por

$$\begin{aligned} -\Delta \bar{u}^\epsilon &= f \quad \text{em } \Omega_s, \\ \bar{u}^\epsilon + \epsilon(-d_0 + C_{cela}) \frac{\partial \bar{u}^\epsilon}{\partial n} &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \quad \bar{u}^\epsilon = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega_s \setminus \Gamma. \end{aligned}$$

Erro de modelagem:

$$\|u^\epsilon - \bar{u}^\epsilon\|_{H^1(\Omega_s)} \leq c\epsilon^{1/2}.$$

O modelo não captura camadas limites \implies baixa convergência!

Lei de parede

Finalmente, seja

$$\begin{aligned} -\Delta u^1 &= 0 \quad \text{em } \Omega_s, \\ u^1 &= (d_0 - C_{cela}) \frac{\partial u^0}{\partial y} \quad \text{sobre } \Gamma, \quad u^1 = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega_s \setminus \Gamma. \end{aligned}$$

Supondo $u^\epsilon \approx u^0 + \epsilon u^1$ em Ω_s , definimos a aproximação \bar{u}^ϵ por

$$\begin{aligned} -\Delta \bar{u}^\epsilon &= f \quad \text{em } \Omega_s, \\ \bar{u}^\epsilon + \epsilon(-d_0 + C_{cela}) \frac{\partial \bar{u}^\epsilon}{\partial n} &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \quad \bar{u}^\epsilon = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega_s \setminus \Gamma. \end{aligned}$$

Erro de modelagem:

$$\|u^\epsilon - \bar{u}^\epsilon\|_{H^1(\Omega_s)} \leq c\epsilon^{1/2}.$$

O modelo não captura camadas limites \implies baixa convergência!

Lei de parede

Finalmente, seja

$$\begin{aligned} -\Delta u^1 &= 0 \quad \text{em } \Omega_s, \\ u^1 &= (d_0 - C_{cela}) \frac{\partial u^0}{\partial y} \quad \text{sobre } \Gamma, \quad u^1 = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega_s \setminus \Gamma. \end{aligned}$$

Supondo $u^\epsilon \approx u^0 + \epsilon u^1$ em Ω_s , definimos a aproximação \bar{u}^ϵ por

$$\begin{aligned} -\Delta \bar{u}^\epsilon &= f \quad \text{em } \Omega_s, \\ \bar{u}^\epsilon + \epsilon(-d_0 + C_{cela}) \frac{\partial \bar{u}^\epsilon}{\partial n} &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \quad \bar{u}^\epsilon = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega_s \setminus \Gamma. \end{aligned}$$

Erro de modelagem:

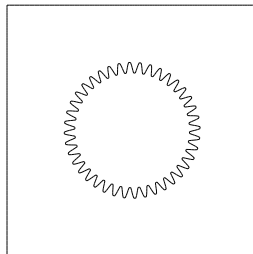
$$\|u^\epsilon - \bar{u}^\epsilon\|_{H^1(\Omega_s)} \leq c\epsilon^{1/2}.$$

O modelo não captura camadas limites \implies baixa convergência!

Teste numérico

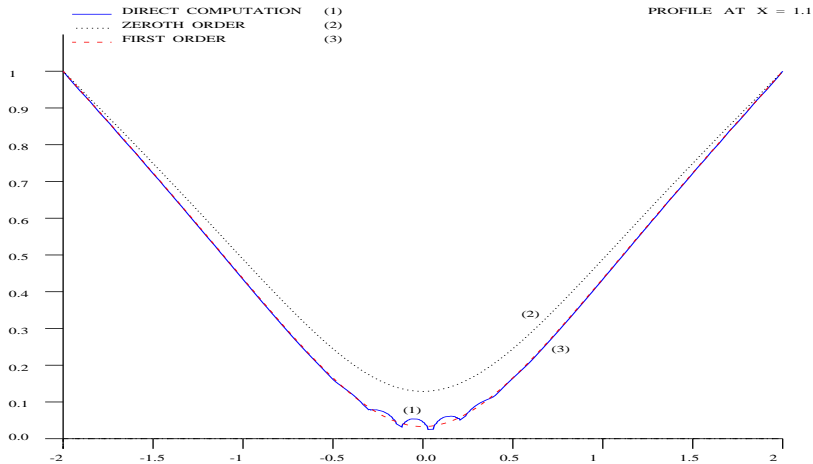
Considere o domínio

ROUGH DOMAIN



e o problema

$$\begin{aligned} -\Delta u^\epsilon &= 0 \quad \text{em } \Omega^\epsilon, \\ u^\epsilon &= 0 \quad \text{sobre a fronteira interna,} \\ u^\epsilon &= 1 \quad \text{sobre a fronteira externa,} \end{aligned}$$



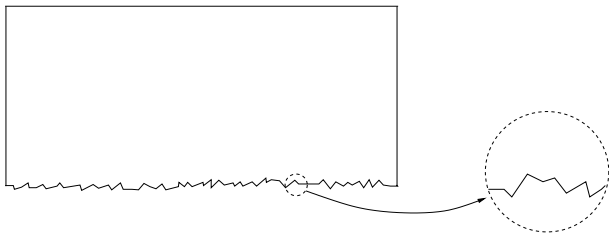
Conclusões

- No caso periódico, leis de parede capturam a baixo custo o comportamento macroscópico (sem oscilações) da solução
- Como em homogeneização de EDPs oscilatórias, é necessário resolver um problema de cela
- Modelos com leis de parede têm erro $\epsilon^{1/2}$ na norma H^1
- A baixa convergência é porque os modelos não capturam camadas limites
- Estimativas interiores ou em L^2 são melhores

Plano da palestra

- 1 Descrição do Problema e Aplicações
- 2 Caso Especial: rugosidades periódicas
- 3 Elemento Finito Multiescalas**
 - Descrição
 - Análise
- 4 Conclusões gerais

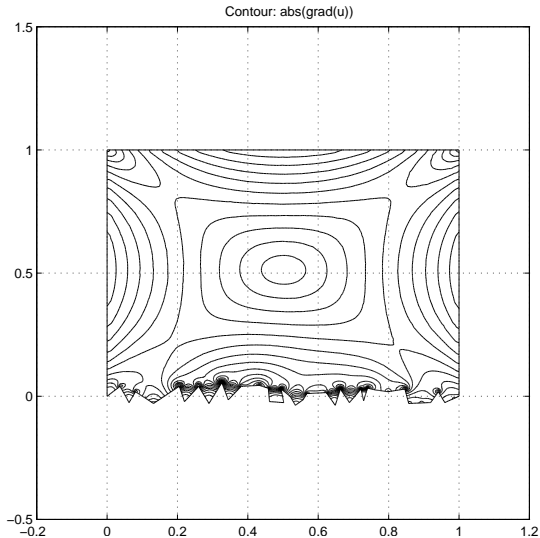
Considere novamente o domínio Ω^ϵ :



e o problema

$$\begin{aligned} -\Delta u^\epsilon &= f \quad \text{em } \Omega^\epsilon, \\ u^\epsilon &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega^\epsilon, \end{aligned}$$

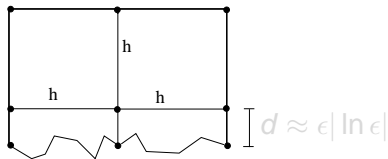
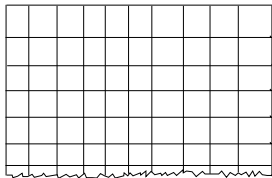
Abaixo, para $f \equiv 1$, as curvas de nível da norma do gradiente:



Descrevemos a seguir um método de elementos finitos multiescalas para aproximar esta solução [M., 08].

Nos elementos finitos multiescalas, as funções de base são soluções locais dos operadores, e levam “informações” locais para a solução global.

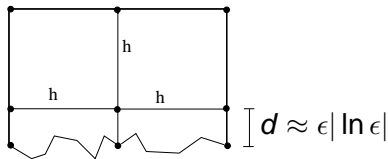
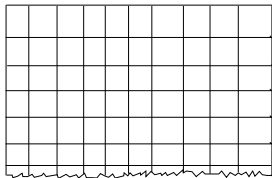
Considere a seguinte malha para Ω^ϵ , e um “patch” de elementos perto das rugosidades:



Descrevemos a seguir um método de elementos finitos multiescalas para aproximar esta solução [M., 08].

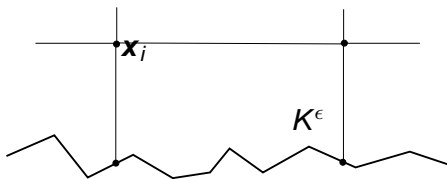
Nos elementos finitos multiescalas, as funções de base são soluções locais dos operadores, e levam “informações” locais para a solução global.

Considere a seguinte malha para Ω^ϵ , e um “patch” de elementos perto das rugosidades:



Considere as seguintes funções de base $\lambda_i \in H_0^1(\Omega^\epsilon)$:

- $\lambda_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$ nos nós \mathbf{x}_j .
- λ_i linear sobre as arestas
- λ_i bilinear nos elementos que *não* interceptam o fundo rugoso



Impor

$$-\Delta \lambda_i = 0 \quad \text{em } K^\epsilon,$$

$$\lambda_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij} \quad \text{para todos os nós } \mathbf{x}_j, \quad \lambda_i \text{ linear sobre } \partial K^\epsilon \cap \Omega^\epsilon,$$

$$\lambda_i = 0 \quad \text{sobre } \partial \Omega^\epsilon.$$

Usando tais funções definimos $V_h^\epsilon = \text{span}\{\lambda_i\} \subset H_0^1(\Omega^\epsilon)$.

A solução multiescala $u_h^\epsilon \in V_h^\epsilon$ é a projeção de Galerkin de u^ϵ em V_h^ϵ :

$$\int_{\Omega^\epsilon} \nabla u_h^\epsilon(\mathbf{x}) \nabla v_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega^\epsilon} f(\mathbf{x}) v_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \text{para todo } v_h \in V_h^\epsilon.$$

Características Principais:

- Método conforme
- Problemas locais dependem de ϵ
- Uso de computação paralela para achar funções de base
- Tamanho do sistema final independente de ϵ
- A formulação não se restringe a rugosidades periódicas
- A análise restrita a casos periódicos

Usando tais funções definimos $V_h^\epsilon = \text{span}\{\lambda_i\} \subset H_0^1(\Omega^\epsilon)$.

A solução multiescala $u_h^\epsilon \in V_h^\epsilon$ é a projeção de Galerkin de u^ϵ em V_h^ϵ :

$$\int_{\Omega^\epsilon} \nabla u_h^\epsilon(\mathbf{x}) \nabla v_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega^\epsilon} f(\mathbf{x}) v_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \text{para todo } v_h \in V_h^\epsilon.$$

Características Principais:

- Método conforme
- Problemas locais dependem de ϵ
- Uso de computação paralela para achar funções de base
- Tamanho do sistema final independente de ϵ
- A formulação não se restringe a rugosidades periódicas
- A análise restrita a casos periódicos

Análise numérica

Suponha rugosidades **periódicas**, ϵ divide h e $h > |\epsilon \ln \epsilon|$.

A análise se baseia no Lema de Céa:

$$\|u^\epsilon - u_h^\epsilon\|_{H^1(\Omega^\epsilon)} \leq c \inf_{v_h^\epsilon \in V_h^\epsilon} \|u^\epsilon - v_h^\epsilon\|_{H^1(\Omega^\epsilon)}.$$

Teorema

Seja u^ϵ a solução original, e $u_h^\epsilon \in V_h^\epsilon$ a solução aproximada multiescalas. Então

$$\|u^\epsilon - u_h^\epsilon\|_{H^1(\Omega^\epsilon)} \leq ch + c\epsilon h^{-1/2}.$$

Demonstração

- 1 Achar expansão assintótica de u^ϵ
- 2 Achar expansão assintótica de λ_i
- 3 Estimar o erro entre u^ϵ e um certo interpolante em V_h^ϵ

Análise numérica

Suponha rugosidades **periódicas**, ϵ divide h e $h > |\epsilon \ln \epsilon|$.

A análise se baseia no Lema de Céa:

$$\|u^\epsilon - u_h^\epsilon\|_{H^1(\Omega^\epsilon)} \leq c \inf_{v_h^\epsilon \in V_h^\epsilon} \|u^\epsilon - v_h^\epsilon\|_{H^1(\Omega^\epsilon)}.$$

Teorema

Seja u^ϵ a solução original, e $u_h^\epsilon \in V_h^\epsilon$ a solução aproximada multiescalas. Então

$$\|u^\epsilon - u_h^\epsilon\|_{H^1(\Omega^\epsilon)} \leq ch + c\epsilon h^{-1/2}.$$

Demonstração

- 1 Achar expansão assintótica de u^ϵ
- 2 Achar expansão assintótica de λ_i
- 3 Estimar o erro entre u^ϵ e um certo interpolante em V_h^ϵ

Conclusões

- Para o caso geral, não necessariamente periódico, escrevemos um método de elementos finitos multiescalas
- A idéia é resolver problemas locais. Paralelização é trivial
- O método é caro pois problemas locais dependem de ϵ , mas é *muito* mais barato que discretizar todo o domínio
- Se as rugosidades forem periódicas, então é mais barato usar leis de parede tradicionais
- A análise de erro só vale para o caso periódico, e tem erro $h + \epsilon h^{-1/2}$ na norma H^1
- O termo $h^{-1/2}$ é relacionado com *erro de ressonância*, presente em métodos multiescalas para EDPs com coeficientes oscilatórios. Dois remédios: “oversampling” e métodos de Petrov-Galerkin

Plano da palestra

- 1 Descrição do Problema e Aplicações
- 2 Caso Especial: rugosidades periódicas
- 3 Elemento Finito Multiescalas
- 4 Conclusões gerais**

Conclusões gerais

- EDPs em domínios com fronteiras rugosas são de interesse e difíceis de serem aproximadas
- Para rugosidades periódicas, leis de parede permitem a troca do domínio rugoso por um suave, desde que se troquem as condições de contorno
- No caso geral, elementos finitos multiescalas permitem a resolução numérica de forma direta e com custo razoável

Obrigado!



An almost ball-shaped water droplet on a non-wettable plant leaf

From *Self-cleaning surfaces — virtual realities*, Ralf Blossey, *Nature Materials* 2, 301 - 306 (2003)