

# Análise e Métodos Numéricos em EDPs com Múltiplas Escalas

Parte I: Modelagem de placas

– o encontro entre o contínuo e o discreto –

Alexandre L. Madureira  
[www.lncc.br/~alm](http://www.lncc.br/~alm)

Laboratório Nacional de Computação Científica – LNCC  
Petrópolis - RJ

ENAMA II  
João Pessoa, 5/11/2008

# Plano da palestra

- 1 Modelo biharmônico
- 2 Modelo de Reissner–Mindlin
- 3 Aspectos numéricos
- 4 Conclusões

# Plano da palestra

- 1 Modelo biarmônico
  - A placa elástica e redução de dimensão
  - Resultados de convergência

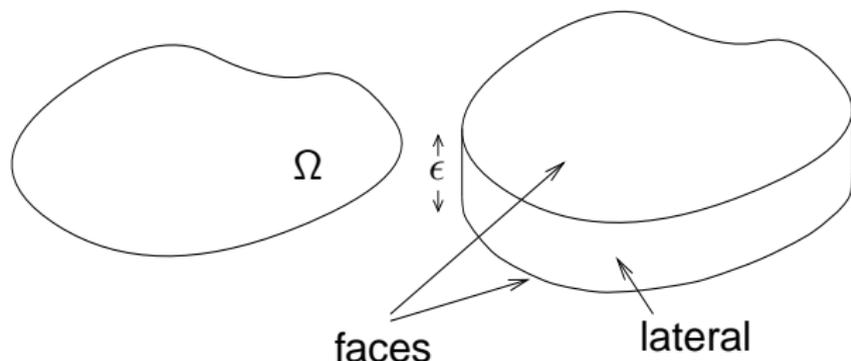
2 Modelo de Reissner–Mindlin

3 Aspectos numéricos

4 Conclusões

# Uma Placa Linearmente Elástica

Placa  $P^\epsilon = \Omega \times (-\epsilon, \epsilon)$  engastada e com carregamentos  $\underline{\underline{f}}^\epsilon$  e  $\underline{\underline{g}}^\epsilon$ :



O deslocamento  $\underline{\underline{u}}^\epsilon : P^\epsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tensão  $\underline{\underline{\sigma}}^\epsilon : P^\epsilon \rightarrow \mathbb{R}_{\text{sim}}^{3 \times 3}$ :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}^\epsilon &= \mathcal{C} \underline{\underline{e}}(\underline{\underline{u}}^\epsilon), & -\underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\sigma}}^\epsilon &= \underline{\underline{f}}^\epsilon & \text{em } P^\epsilon, \\ \underline{\underline{\sigma}}^\epsilon \underline{\underline{n}} &= \underline{\underline{g}}^\epsilon & \text{nas faces,} & & \underline{\underline{u}}^\epsilon = 0 & \text{na lateral,} \end{aligned}$$

onde

- $\underline{\underline{e}}(\underline{\underline{u}}^\epsilon) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}}^\epsilon + \underline{\underline{\nabla}}^T \underline{\underline{u}}^\epsilon)$
- $\underline{\underline{\mathcal{C}}}_\tau = 2\mu \underline{\underline{\tau}} + \lambda \text{tr}(\underline{\underline{\tau}}) \underline{\underline{\text{Id}}}$ , com  $\mu$  e  $\lambda$  const. de Lamé

## Redução de dimensão: 3D $\rightarrow$ 2D

- A equação biarmônica, ou Kirchhoff–Love derivada a partir de argumentos físicos, ficou tão conhecida que é chamada de *equação da placa*
- Este modelo não é o único, nem o melhor. Nas engenharias, o modelo de *Reissner–Mindlin* é utilizado. Tipicamente, sua derivação é também baseada em argumentos físicos.

A seguir descrevemos como estes podem ser derivados, a relação entre eles, e aspectos numéricos pertinentes.

- Notação:

$$\underline{\underline{u}} = \begin{pmatrix} \underline{u} \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma & \sigma \\ \sigma^T & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

- Ponto em  $P^\epsilon$  dado por  $\underline{\underline{x}}^\epsilon = (\underline{x}^\epsilon, x_3^\epsilon)$ , onde  $\underline{x}^\epsilon \in \Omega$
- Única força é  $f_3^\epsilon$  constante (placa sob ação do próprio peso)

## Redução de dimensão: 3D $\rightarrow$ 2D

- A equação biarmônica, ou Kirchhoff–Love derivada a partir de argumentos físicos, ficou tão conhecida que é chamada de *equação da placa*
- Este modelo não é o único, nem o melhor. Nas engenharias, o modelo de *Reissner–Mindlin* é utilizado. Tipicamente, sua derivação é também baseada em argumentos físicos.

A seguir descrevemos como estes podem ser derivados, a relação entre eles, e aspectos numéricos pertinentes.

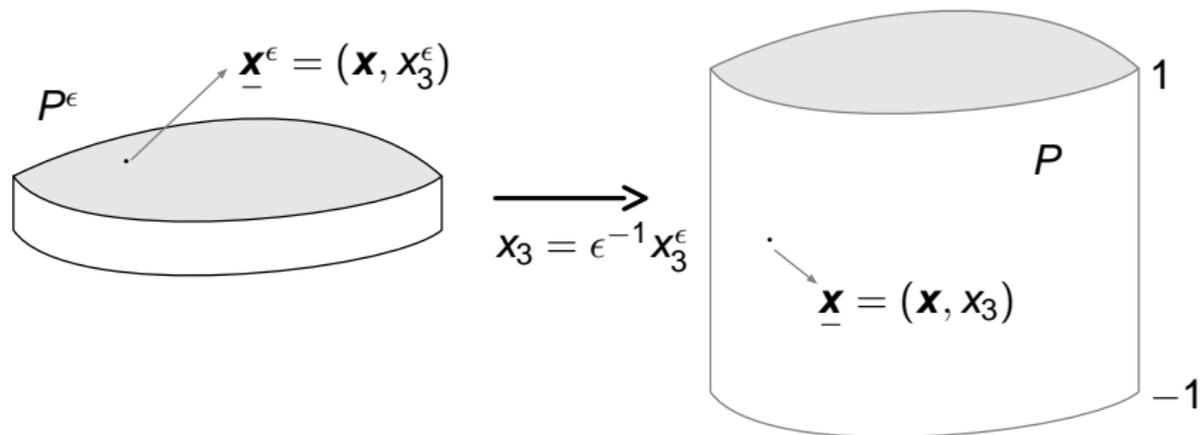
- Notação:

$$\underline{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & \sigma \\ \boldsymbol{\sigma}^T & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

- Ponto em  $P^\epsilon$  dado por  $\underline{\mathbf{x}}^\epsilon = (\mathbf{x}^\epsilon, x_3^\epsilon)$ , onde  $\mathbf{x}^\epsilon \in \Omega$
- Única força é  $f_3^\epsilon$  constante (placa sob ação do próprio peso)

## Limite assintótico de $\underline{u}^\epsilon$ ([Ciarlet, 97])

Convergência na placa  $P = \Omega \times (-1, 1)$ , com  $\underline{x} = (\mathbf{x}, x_3) = (\mathbf{x}^\epsilon, \epsilon^{-1} x_3^\epsilon)$ :

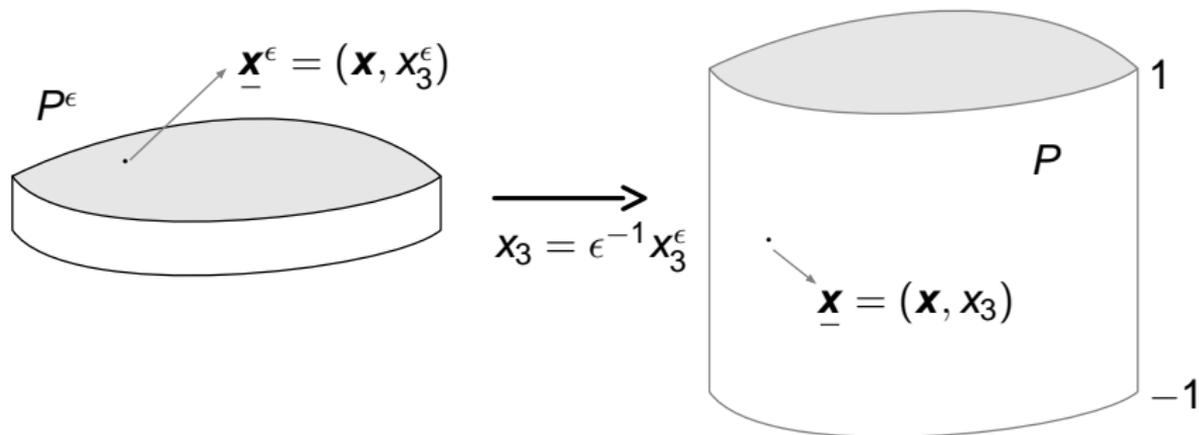


### Outros escalonamentos

- $\underline{u}(\epsilon)(\underline{x}) = (\mathbf{u}(\epsilon)(\underline{x}), u_3(\epsilon)(\underline{x})) = (\epsilon^{-1} \mathbf{u}^\epsilon(\underline{x}^\epsilon), u_3^\epsilon(\underline{x}^\epsilon))$
- $f_3^\epsilon = \epsilon^2 f_3$ , onde  $f_3$  é constante independente de  $\epsilon$

## Limite assintótico de $\underline{u}^\epsilon$ ([Ciarlet, 97])

Convergência na placa  $P = \Omega \times (-1, 1)$ , com  $\underline{x} = (\mathbf{x}, x_3) = (\mathbf{x}^\epsilon, \epsilon^{-1} x_3^\epsilon)$ :



### Outros escalonamentos

- $\underline{u}(\epsilon)(\underline{x}) = (\mathbf{u}(\epsilon)(\underline{x}), u_3(\epsilon)(\underline{x})) = (\epsilon^{-1} \mathbf{u}^\epsilon(\underline{x}^\epsilon), u_3^\epsilon(\underline{x}^\epsilon))$
- $f_3^\epsilon = \epsilon^2 f_3$ , onde  $f_3$  é constante independente de  $\epsilon$

# Problema escalonado

Baseado nas definições acima temos que

$$\int_P \underline{\underline{C}} \underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\underline{u}}(\epsilon)) : \underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\underline{v}}) d\underline{\underline{x}} = \int_P f_3 v_3 d\underline{\underline{x}} \quad \text{para todo } \underline{\underline{v}} \in \underline{\underline{V}}(P),$$

onde  $\underline{\underline{V}}(P) = \{ \underline{\underline{v}} \in H^1(P) : \underline{\underline{v}} = 0 \text{ na lateral} \}$  e

$$\underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\underline{v}}) = \begin{pmatrix} \underline{\underline{e}}(\underline{\underline{v}}) & \epsilon^{-1} \underline{\underline{e}}(\underline{\underline{v}}) \\ \epsilon^{-1} \underline{\underline{e}}^T(\underline{\underline{v}}) & \epsilon^{-2} \underline{\underline{e}}_{33}(\underline{\underline{v}}) \end{pmatrix}.$$

Vale ainda o resultado de convergência a seguir.

## Problema escalonado

Baseado nas definições acima temos que

$$\int_P \underline{C} \underline{e}^\epsilon(\underline{u}(\epsilon)) : \underline{e}^\epsilon(\underline{v}) \, d\underline{x} = \int_P f_3 v_3 \, d\underline{x} \quad \text{para todo } \underline{v} \in \underline{V}(P),$$

onde  $\underline{V}(P) = \{ \underline{v} \in H^1(P) : \underline{v} = 0 \text{ na lateral} \}$  e

$$\underline{e}^\epsilon(\underline{v}) = \begin{pmatrix} \underline{e}(\underline{v}) & \epsilon^{-1} \underline{e}(\underline{v}) \\ \epsilon^{-1} \underline{e}^T(\underline{v}) & \epsilon^{-2} e_{33}(\underline{v}) \end{pmatrix}.$$

Vale ainda o resultado de convergência a seguir.

# Convergência do modelo biarmônico

## Teorema

As soluções  $\underline{\mathbf{u}}(\epsilon) \rightarrow \underline{\mathbf{u}}_{KL}$  (forte) em  $H^1(P)$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , onde

$$\underline{\mathbf{u}}_{KL}(\mathbf{x}, x_3) = \begin{pmatrix} -x_3 \nabla \zeta(\mathbf{x}) \\ \zeta(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

e  $\zeta \in H_0^2(\Omega)$  resolve

$$\frac{8\mu(\lambda + \mu)}{3(\lambda + 2\mu)} \Delta^2 \zeta = \int_{-1}^1 f_3(\mathbf{x}, x_3) dx_3 \quad \text{em } \Omega,$$
$$\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial n} = 0 \quad \text{em } \partial\Omega$$

## Demonstração

Dividiremos a demonstração em alguns passos.

1  $\underline{\mathbf{u}}(\epsilon) \rightharpoonup \underline{\mathbf{u}}$  em  $\underline{\mathbf{V}}(P)$ , e  $\underline{\mathbf{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)) \rightharpoonup \underline{\mathbf{e}}$  em  $L^2(P)$  [▶ Detalhes](#)

2  $\underline{\mathbf{u}} \in \underline{\mathbf{V}}_{KL}(P) = \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) - x_3 \nabla \zeta(\mathbf{x}) \\ \zeta(\mathbf{x}) \end{pmatrix} : \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \zeta \in H_0^2(\Omega) \right\}$

[▶ Detalhes](#)

3 *Mostrar que*

$$\underline{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}(\underline{\mathbf{u}}) & 0 \\ \tilde{\mathbf{e}} & -\frac{\lambda}{2\mu+\lambda} \text{tr}(\mathbf{e}(\underline{\mathbf{u}})) \end{pmatrix} \quad \text{▶ Detalhes}$$

4  $\underline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, x_3) = (-x_3 \nabla \zeta(\mathbf{x}), \zeta(\mathbf{x}))$ , e  $\zeta$  resolve o biharmônico [▶ Detalhes](#)

5 *Convergência forte de  $\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)$  em  $\underline{\mathbf{V}}(P)$*  [▶ Detalhes](#)

# Observações

- O desenvolvimento assintótico [Dauge e Gruais, 96]:

$$\underline{\mathbf{u}}(\epsilon) \sim \begin{pmatrix} -x_3 \nabla \zeta(\mathbf{x}) \\ \zeta(\mathbf{x}) \end{pmatrix} + \epsilon(\text{T.A.O.} + \text{Corretores})$$

também justifica o modelo biharmônico. Outros termos são T.A.O. = *Termos de Alta Ordem*, e corretores de fronteira. Estimativa de erro:

$$\|\underline{\mathbf{u}}(\epsilon) - \underline{\mathbf{u}}_{KL}\|_{H^1(P)} \leq c\epsilon^{1/2}.$$

- Em [Morgenstern, 59]: convergência do biharmônico usando o Teorema de Prager–Synge

# Plano da palestra

- 1 Modelo biarmônico
- 2 Modelo de Reissner–Mindlin
  - Redução de dimensão
  - Consistência
- 3 Aspectos numéricos
- 4 Conclusões

# Modelo de Reissner–Mindlin

## Derivação

Por princípio variacional, não assintótica [Alessandrini et al., 96]

*Segundo princípio de Hellinger–Reissner:*  $(\underline{\mathbf{u}}^\epsilon, \underline{\underline{\sigma}}^\epsilon)$  é único ponto crítico (sela) de

$$L'(\underline{\mathbf{v}}, \underline{\underline{\tau}}) = \frac{1}{2} \int_{P^\epsilon} \mathcal{C}^{-1} \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\tau}} d\mathbf{x}^\epsilon + \int_{P^\epsilon} \mathbf{div} \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\mathbf{v}} d\mathbf{x}^\epsilon + \int_{P^\epsilon} \underline{\mathbf{f}}^\epsilon \cdot \underline{\mathbf{v}} d\mathbf{x}^\epsilon$$

em  $\underline{\underline{L}}^2(P^\epsilon) \times \underline{\underline{S}}'_0(P^\epsilon)$ , onde

$$\underline{\underline{S}}'_0(P^\epsilon) = \{ \underline{\underline{\tau}} \in \underline{\underline{H}}(\mathbf{div}, P^\epsilon) : \underline{\underline{\tau}} \mathbf{n} = 0 \text{ sobre as faces} \}.$$

# Modelagem

Busca-se pontos críticos de  $L'(\cdot, \cdot)$  em subespaços de  $\underline{L}^2(P^\epsilon) \times \underline{S}'_0(P^\epsilon)$ . Os subespaços escolhidos são polinomiais em  $x_3$ . Exemplo:

$$\underline{L}^2(P^\epsilon, 1) = \left\{ \underline{\mathbf{v}} \in \underline{L}^2(P^\epsilon) : \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} x_3 \mathbf{v}(\mathbf{x}) \\ v_3(\mathbf{x}) + x_3^2 w_3(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \right\},$$

$$\underline{S}'_0(P^\epsilon, 1) = \left\{ \underline{\boldsymbol{\tau}} \in \underline{S}'_0(P^\epsilon) : \underline{\boldsymbol{\tau}} = \begin{pmatrix} x_3 \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) & p_2(x_3) \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \\ - & p_3(x_3) \boldsymbol{\tau}_{33}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \right\},$$

com  $p_j$  polinômio de grau  $j$ .

## Observações

- A escolha dos graus acima é uma das possíveis
- Aumentando os graus os modelos tornam-se melhores, porém mais complicados
- Nem todas as escolhas de graus geram problemas bem postos

Para

$$\underline{u}(\underline{x}^\epsilon) = \begin{pmatrix} -\phi(\mathbf{x}^\epsilon)x_3^\epsilon \\ \omega(\mathbf{x}^\epsilon) + \omega^2(\mathbf{x}^\epsilon)p_2(x_3^\epsilon) \end{pmatrix},$$

onde  $p_2(z) = (3/2)(z^2 - \epsilon^2/5)$ . Então

$$-\frac{1}{3} \operatorname{div} \mathcal{C}^* \underline{e}(\phi) + \epsilon^{-2} \frac{5\lambda}{6} (\phi - \nabla \omega) = 0 \quad \text{em } \Omega,$$

$$\epsilon^{-2} \frac{5\lambda}{6} \operatorname{div}(\phi - \nabla \omega) = \epsilon^{-2} f_3^\epsilon \quad \text{em } \Omega,$$

$$\phi = 0 \quad \omega = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega,$$

onde  $\mathcal{C}^* \underline{e}(\mathbf{u}) = 2\mu \underline{e}(\mathbf{u}) + \frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda} \operatorname{tr}(\underline{e}(\mathbf{u})) \operatorname{Id}$ .

## consistência assintótica

Um modelo é *assintoticamente consistente* se converge para o biharmônico.

Para Reissner–Mindlin, basta

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi = \nabla \zeta, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \omega = \zeta,$$

Para checar estes limites, escrevemos

$$(\phi, \omega) = \arg \min_{(\mathbf{v}, v_3) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} J(\mathbf{v}, v_3)$$

onde a energia de Reissner–Mindlin é dada por

$$J(\mathbf{v}, v_3) = \frac{1}{3} \int_{\Omega} \mathbf{C}^* \underset{\approx}{\mathbf{e}}(\mathbf{v}) : \underset{\approx}{\mathbf{e}}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \epsilon^{-2} \frac{5\lambda}{6} \int_{\Omega} |\mathbf{v} - \nabla v_3|^2 \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} f_3 v_3 \, d\mathbf{x}.$$

Usamos o seguinte resultado.

## Lema

Sejam  $X$  e  $Z$  de Hilbert,  $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  bilinear simétrica limitada e não negativa,  $B : X \rightarrow Z$  e  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  lineares e limitados. Suponha

$$a(x, x) + \|Bx\|_Z^2 \geq c\|x\|_X^2 \quad \text{para todo } x \in X.$$

Então:

- 1 Para todo  $\epsilon > 0$  existe um único  $x^\epsilon \in X$  que minimiza

$$E^\epsilon(x) = \frac{1}{2}a(x, x) + \frac{\epsilon^{-2}}{2}\|Bx\|_Z^2 - F(x).$$

- 2 Existe um único  $x^0 \in \mathcal{N}(B)$  (núcleo de  $B$ ) que minimiza

$$E^0(x) = \frac{1}{2}a(x, x) - F(x).$$

- 3  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} x^\epsilon = x^0$  em  $X$ .

Aplicamos agora o resultado de convergência acima para a solução de Reissner–Mindlin definida por

$$(\phi, \omega) = \arg \min_{(\mathbf{v}, v_3) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} J(\mathbf{v}, v_3)$$

e

$$J(\mathbf{v}, v_3) = \frac{1}{3} \int_{\Omega} \mathcal{C}^* \underset{\approx}{\mathbf{e}}(\mathbf{v}) : \underset{\approx}{\mathbf{e}}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \epsilon^{-2} \frac{5\lambda}{6} \int_{\Omega} |\mathbf{v} - \nabla v_3|^2 \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} f_3 v_3 \, d\mathbf{x}.$$

Logo,  $(\phi, \omega) \rightarrow (\nabla \zeta, \zeta)$ , onde  $\zeta$  é a solução do biarmônico dada por

$$\zeta = \arg \min_{v_3 \in H_0^2(\Omega)} \frac{1}{3} \int_{\Omega} \mathcal{C}^* \underset{\approx}{\mathbf{e}}(\nabla v_3) : \underset{\approx}{\mathbf{e}}(\nabla v_3) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} f_3 v_3 \, d\mathbf{x}$$

e o modelo de Reissner–Mindlin é assintoticamente consistente.

# Plano da palestra

- 1 Modelo biarmônico
- 2 Modelo de Reissner–Mindlin
- 3 Aspectos numéricos**
  - O trancamento numérico
  - Discretizações para Reissner–Mindlin
- 4 Conclusões

# Considerações gerais

O biharmônico e o Reissner–Mindlin apresentam dificuldades numéricas distintas porém interligadas.

- O biharmônico exige regularidade extra, e discretizações “clássicas” usam aproximações com derivadas contínuas (não trivial). Alternativas: métodos não conformes, mistos, descontínuos.
- Reissner–Mindlin é de segunda ordem, e a forma bilinear é contínua e coerciva. Logo a solução por elementos finitos converge se  $h \rightarrow 0$ , e é a melhor do subespaço na norma da energia.
- O problema é que a convergência não é uniforme em relação a  $\epsilon$ .

## Trancamento numérico

Dada uma triangularização de  $\Omega$ , e  $\Phi_h \subset \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  e  $W_h \subset H_0^1(\Omega)$  espaços das funções contínuas e lineares por partes, e

$$(\phi_h, \omega_h) = \arg \min_{(\mathbf{v}, v_3) \in \Phi_h \times W_h} J(\mathbf{v}, v_3)$$

a solução de Galerkin que minimiza

$$J(\mathbf{v}, v_3) = \frac{1}{3} \int_{\Omega} \mathbf{C}^* \underset{\approx}{\mathbf{e}}(\mathbf{v}) : \underset{\approx}{\mathbf{e}}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \epsilon^{-2} \frac{5\lambda}{6} \int_{\Omega} |\mathbf{v} - \nabla v_3|^2 \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} f_3 v_3 \, d\mathbf{x}.$$

### Teorema

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\phi_h, \omega_h) = (\nabla \omega_h^0, \omega_h^0) \in \Phi_h \times W_h, \text{ e } \omega_h^0 = 0.$$

### Demonstração

- 1  $\omega_h^0 \in W_h$ , então  $\nabla \omega_h^0$  é constante por partes, contínua e se anula em  $\partial\Omega$ . Logo  $\nabla \omega_h^0 = 0$
- 2  $\omega_h^0$  constante por partes, contínua e se anula em  $\partial\Omega$ . Logo  $\omega_h^0 = 0$

## Trancamento numérico

A solução numérica “limite” é  $\phi_h^0 = 0, \omega_h^0 = 0$ . Para  $0 < \epsilon \ll h$ ,  $(\phi_h, \omega_h)$  é “quase” zero, distante da solução exata. A este fenômeno dá-se o nome de *trancamento* ou *locking numérico*.

## Estratégia para evitar trancamento

Define-se um operador  $\mathbf{P}_h : \Phi_h \rightarrow \nabla W_h$ , e minimiza-se

$$\frac{1}{3} \int_{\Omega} C^* \underset{\approx}{\mathbf{e}}(\mathbf{v}) : \underset{\approx}{\mathbf{e}}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \epsilon^{-2} \frac{5\lambda}{6} \int_{\Omega} |\mathbf{P}_h \mathbf{v} - \nabla v_3|^2 \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} f_3 v_3 \, d\mathbf{x}.$$

Quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , a restrição torna-se  $\mathbf{P}_h \phi_h^0 = \nabla \omega_h^0$ . A introdução de  $\mathbf{P}_h$  possibilita definições de esquemas numéricos sem trancamento.

## Outra estratégia para evitar trancamento

Definir o cisalhamento  $\zeta = \epsilon^{-2}(\nabla \omega - \phi)$  e escrever  $(\phi, \omega, \zeta)$  na *forma mista*, como único ponto crítico (sela) em  $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$  de

$$L(\mathbf{v}, v_3, \gamma) = \frac{1}{3} \int_{\Omega} \mathcal{C}^* \underset{\approx}{\mathbf{e}}(\mathbf{v}) : \underset{\approx}{\mathbf{e}}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \frac{5\lambda}{6} \int_{\Omega} \gamma \cdot (\nabla v_3 - \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \\ - \epsilon^2 \frac{5\lambda}{12} \int_{\Omega} |\gamma|^2 \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} f_3 v_3 \, d\mathbf{x}$$

### Observações

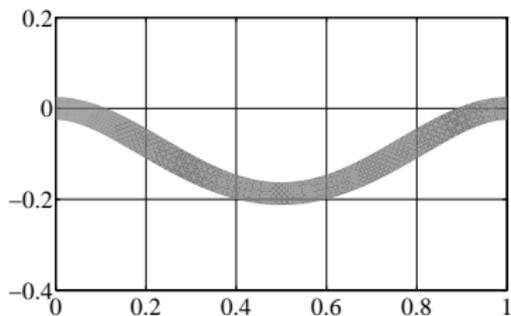
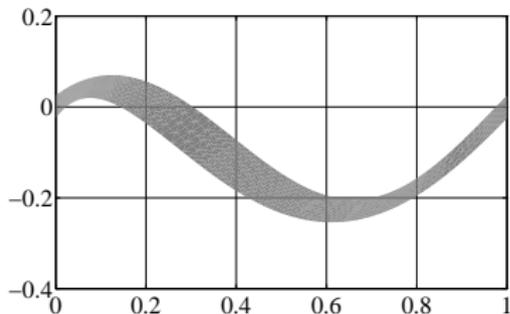
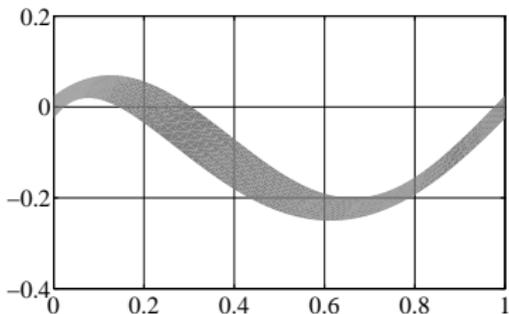
- Esta formulação elimina o comportamento singular em  $\epsilon = 0$  ao preço de não ser mais um problema de mínimo
- Discretizações mistas são “normalmente” livres de trancamento, mas nem todas as aproximações são estáveis
- Em Galerkin, “qualquer” escolha de espaços é estável, mas o problema de trancamento está presente

# Plano da palestra

- 1 Modelo biarmônico
- 2 Modelo de Reissner–Mindlin
- 3 Aspectos numéricos
- 4 Conclusões**

- Placa elástica é um dos “playgrounds” do analista numérico
- Obtivemos dois modelos, o biharmônico, e o de Reissner–Mindlin
- O biharmônico foi derivado via análise assintótica
- O de Reissner–Mindlin foi obtido via argumentações variacionais
- A discretização para Reissner–Mindlin é não-trivial devido ao trancamento numérico
- Esquemas envolvendo projeções e/ou formulações mistas evitam trancamento, mas são caras computacionalmente ou difíceis de implementar
- Mais recentemente, alternativas envolvendo métodos de *Galerkin descontínuo* têm sido explorados [Bösing, Mozolevski, M.,08]

**Obrigado!**



Deformação da seção média de uma placa sob tração. Soluções exata, por Reissner–Mindlin, e biharmônico

# Plano da palestra

## 5 Apêndice

$\underline{\mathbf{u}}(\epsilon) \rightharpoonup \underline{\mathbf{u}}$  em  $\underline{\mathbf{V}}(P)$ , e  $\underline{\mathbf{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)) \rightharpoonup \underline{\mathbf{e}}$  em  $L^2(P)$

### Demonstração

$\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)$  e  $\underline{\mathbf{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon))$  limitados em  $\underline{\mathbf{V}}(P)$  e  $L^2(P)$ , logo  $\underline{\mathbf{u}}(\epsilon) \rightharpoonup \underline{\mathbf{u}}$  em  $\underline{\mathbf{V}}(P)$ , e  $\underline{\mathbf{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)) \rightharpoonup \underline{\mathbf{e}}$  em  $L^2(P)$ .

◀ Voltar

$$\underline{\mathbf{u}} \in \underline{\mathbf{V}}_{KL}(P) = \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) - x_3 \nabla \zeta(\mathbf{x}) \\ \zeta(\mathbf{x}) \end{pmatrix} : \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \zeta \in H_0^2(\Omega) \right\}$$

## Demonstração

Como  $\underline{\mathbf{u}}(\epsilon) \rightarrow \underline{\mathbf{u}}$  em  $\underline{\mathbf{V}}(P)$ , então  $\mathbf{e}(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)) \rightarrow \mathbf{e}(\underline{\mathbf{u}})$  em  $L^2(P)$ . Como  $\mathbf{e}^\epsilon(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)) = \mathbf{e}(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon))$ , então  $\mathbf{e} = \mathbf{e}(\underline{\mathbf{u}})$ . Além disto, como  $\mathbf{e}^\epsilon(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon))$  é limitada, então por definição  $\|\mathbf{e}_{i,3}(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon))\|_{L^2(P)} \leq c\epsilon$  para  $i = 1, 2, 3$ . Logo  $\mathbf{e}_{i,3}(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)) \rightarrow 0$  em  $L^2(P)$  e portanto  $\mathbf{e}_{i3}(\underline{\mathbf{u}}) = 0$ .

Mas

$$\underline{\mathbf{V}}_{KL}(P) \stackrel{\text{def}}{=} \{(\mathbf{v}, v_3) \in \underline{\mathbf{V}}(P) : \partial_3 \mathbf{v} = -\nabla v_3, \partial_3 v_3 = 0\}$$

pois de  $\partial_3 v_3 = 0$ , e  $v_3 = 0$  na lateral, implica em  $v_3(\mathbf{x}) = \eta_3(\mathbf{x})$  para algum  $\eta_3 \in H_0^1(\Omega)$ . Além disto,  $\partial_3 \mathbf{v} = -\nabla \eta_3$  e então  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) - x_3 \nabla \eta_3(\mathbf{x})$  para algum  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ . Como  $\mathbf{v} \in \underline{\mathbf{V}}(P)$ , então  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  e  $\eta_3 \in H_0^2(\Omega)$ .

Mostrar que  $\underline{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{e}}}(\underline{\underline{\mathbf{u}}}) & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda}{2\mu+\lambda} \text{tr}(\underline{\underline{\mathbf{e}}}(\underline{\underline{\mathbf{u}}})) \end{pmatrix}$

## Demonstração

Para  $\underline{\underline{\mathbf{v}}} \in \underline{\underline{\mathbf{V}}}(P)$ ,

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \int_P f_3 v_3 d\underline{\underline{\mathbf{x}}} &= \int_P 2\mu\epsilon^2 \underline{\underline{\mathbf{e}}}^\epsilon(\underline{\underline{\mathbf{u}}}(\epsilon)) : \underline{\underline{\mathbf{e}}}(\underline{\underline{\mathbf{v}}}) + 4\mu\epsilon \mathbf{e}^\epsilon(\underline{\underline{\mathbf{u}}}(\epsilon)) \cdot \mathbf{e}(\underline{\underline{\mathbf{v}}}) \\ &+ 2\mu\mathbf{e}_{33}^\epsilon(\underline{\underline{\mathbf{u}}}(\epsilon))\mathbf{e}_{33}(\underline{\underline{\mathbf{v}}}) + \lambda \text{tr}(\underline{\underline{\mathbf{e}}}^\epsilon(\underline{\underline{\mathbf{u}}}(\epsilon)))[\epsilon^2 \text{tr}(\underline{\underline{\mathbf{e}}}^\epsilon(\underline{\underline{\mathbf{v}}})) + \mathbf{e}_{33}(\underline{\underline{\mathbf{v}}})] d\underline{\underline{\mathbf{x}}}. \end{aligned}$$

Para  $\epsilon \rightarrow 0$ , temos  $\mathbf{e}_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu+\lambda} \text{tr}(\underline{\underline{\mathbf{e}}}(\underline{\underline{\mathbf{u}}}))$ . Com  $v_3 = 0$  e dividindo por  $\epsilon$ ,

$$\begin{aligned} \epsilon \int_P f_3 v_3 d\underline{\underline{\mathbf{x}}} &= \int_P 2\mu\epsilon \underline{\underline{\mathbf{e}}}^\epsilon(\underline{\underline{\mathbf{u}}}(\epsilon)) : \underline{\underline{\mathbf{e}}}(\underline{\underline{\mathbf{v}}}) + 4\mu \mathbf{e}^\epsilon(\underline{\underline{\mathbf{u}}}(\epsilon)) \cdot \partial_3 \underline{\underline{\mathbf{v}}} \\ &+ \lambda\epsilon \text{tr}(\underline{\underline{\mathbf{e}}}^\epsilon(\underline{\underline{\mathbf{u}}}(\epsilon))) \text{tr}(\underline{\underline{\mathbf{e}}}^\epsilon(\underline{\underline{\mathbf{v}}})) d\underline{\underline{\mathbf{x}}}. \end{aligned}$$

Tomando  $\epsilon \rightarrow 0$  temos  $\mathbf{e} = 0$ .

$\underline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, x_3) = (-x_3 \nabla \zeta(\mathbf{x}), \zeta(\mathbf{x}))$ , e  $\zeta$  resolve o biharmônico

## Demonstração

Para definir o problema para  $\underline{\mathbf{u}}$ , note que para todo  $\underline{\mathbf{v}} \in \underline{\mathbf{V}}_{KL}(P)$

$$\int_P 2\mu \underline{\mathbf{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)) : \underline{\mathbf{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{v}}) + \lambda \operatorname{tr}(\underline{\mathbf{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon))) \operatorname{tr}(\underline{\mathbf{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{v}})) \, d\mathbf{x} = \int_P f_3 v_3 \, d\mathbf{x}.$$

Tomando  $\epsilon \rightarrow 0$  obtemos para todo  $\underline{\mathbf{v}} \in \underline{\mathbf{V}}_{KL}(P)$

$$\int_P 2\mu \underline{\mathbf{e}}(\underline{\mathbf{u}}) : \underline{\mathbf{e}}(\underline{\mathbf{v}}) + \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda} \operatorname{tr}(\underline{\mathbf{e}}(\underline{\mathbf{u}})) \operatorname{tr}(\underline{\mathbf{e}}(\underline{\mathbf{v}})) \, d\mathbf{x} = \int_P f_3 v_3 \, d\mathbf{x}. \quad (1)$$

Mas  $\underline{\mathbf{V}}_{KL}(P)$  é fechado em  $\underline{\mathbf{V}}(P)$ , e (1) é coerciva, portanto  $\underline{\mathbf{u}}$  está bem definido. Concluimos que toda família  $\underline{\mathbf{u}}(\epsilon) \rightarrow \underline{\mathbf{u}}$ , e não somente subsequências.

Mas  $\underline{\mathbf{u}} \in \underline{\mathbf{V}}_{KL}$ , então  $\underline{\mathbf{u}} = (\xi(\mathbf{x}) - x_3 \nabla \zeta(\mathbf{x}), \zeta(\mathbf{x}))$ . Se  $\underline{\mathbf{v}} = (\eta(\mathbf{x}), 0)$  em (1), então  $\xi = 0$ . Escolhendo  $\underline{\mathbf{v}} = (-x_3 \nabla \eta(\mathbf{x}), \eta(\mathbf{x}))$  em (1) obtemos o biharmônico.

## Convergência forte de $\underline{\underline{u}}(\epsilon)$ em $\underline{\underline{V}}(P)$

### Demonstração

Mostraremos que  $\underline{\underline{e}}(\underline{\underline{u}}(\epsilon))$  converge forte para  $\underline{\underline{e}}(\underline{\underline{u}})$  em  $L^2(P)$ , e pela desigualdade de Korn,  $\underline{\underline{u}}(\epsilon)$  converge forte em  $\underline{\underline{V}}(P)$ .

Primeiramente note que como  $\|e_{i,3}(\underline{\underline{u}}(\epsilon))\|_{L^2(P)} \rightarrow 0$ , e  $e_{i,3}(\underline{\underline{u}}) = 0$ , a convergência de  $e_{i,3}(\underline{\underline{u}}(\epsilon))$  é forte. Note a seguir que

$$\begin{aligned} \int_P \mathcal{C}[\underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\underline{u}}(\epsilon)) - \underline{\underline{e}}] : [\underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\underline{u}}(\epsilon)) - \underline{\underline{e}}] d\underline{\underline{x}} &= \int_P f_3 u_3(\epsilon) d\underline{\underline{x}} \\ &+ \int_P \mathcal{C}[\underline{\underline{e}} - 2\underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\underline{u}}(\epsilon))] : \underline{\underline{e}} d\underline{\underline{x}} \rightarrow \int_P f_3 u_3 d\underline{\underline{x}} - \int_P \mathcal{C} \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{e}} d\underline{\underline{x}} \\ &= \int_P f_3 u_3 d\underline{\underline{x}} - \int_P 2\mu(\underline{\underline{e}} : \underline{\underline{e}}) + \frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu} [\text{tr}(\underline{\underline{e}})]^2 d\underline{\underline{x}} = 0. \end{aligned}$$

Então  $\underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\underline{u}}(\epsilon)) \rightarrow \underline{\underline{e}}$ , e então  $\underline{\underline{e}}(\underline{\underline{u}}(\epsilon)) = \underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\underline{u}}(\epsilon)) \rightarrow \underline{\underline{e}} = \underline{\underline{e}}(\underline{\underline{u}})$ .

## Demonstração

As existências e unicidades de mínimos segue-se de Lax–Milgram em

$$(x_1, x_2) \mapsto a(x_1, x_2) + \epsilon^{-2}(Bx_1, Bx_2)_Z$$

A seguir,  $\|x^\epsilon\|^2 \leq c[a(x^\epsilon, x^\epsilon) + \epsilon^{-2}\|Bx^\epsilon\|_Z^2] = cF(x^\epsilon) \leq c\|F\|_{X^*}\|x^\epsilon\|_X$ . Logo  $\|x^\epsilon\|_X$  e  $\epsilon^{-1}\|Bx^\epsilon\|_Z$  limitados uniform. Logo  $Bx^\epsilon \rightarrow 0$ , e existe subsequência de  $(x^\epsilon) \rightarrow \bar{x}$ . Note que  $B\bar{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Bx^\epsilon = 0$ . Da mesma forma,  $\epsilon^{-1}Bx^\epsilon \rightarrow p$ . Tomando o limite em  $a(x^\epsilon, x) = F(x)$ ,  $x \in \mathcal{N}(B)$ ,

$$a(\bar{x}, x) = F(x) \quad \text{para todo } x \in \mathcal{N}(B),$$

e  $\bar{x} = x^0$ . Então toda  $(x^\epsilon) \rightarrow x^0$ . Para convergência forte,

$$\begin{aligned} \|x^\epsilon - x_0\|_X^2 &\leq a(x^\epsilon - x_0, x^\epsilon - x_0) + \epsilon^{-2}\|B(x^\epsilon - x_0)\|_Z^2 = a(x^\epsilon, x^\epsilon) \\ &\quad + a(x_0, x_0 - 2x^\epsilon) + \epsilon^{-2}\|Bx^\epsilon\|_Z^2 = F(x^\epsilon) + a(x_0, x_0 - 2x^\epsilon) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Nesta linha de pensamento, temos que  $(\phi, \omega, \zeta)$  ponto crítico de  $L(\cdot, \cdot, \cdot)$  resolve em  $\Omega$

$$-\frac{1}{3} \mathbf{div} C^* \underset{\approx}{\mathbf{e}}(\phi) - \zeta = 0,$$

$$-\mathbf{div} \zeta = f_3,$$

$$\frac{5\lambda}{6} (\nabla \omega - \phi) - \epsilon^2 \zeta = 0,$$

com as condições de contorno  $\phi = 0, \omega = 0$  sobre  $\partial\Omega$ . Pela decomposição de Helmholtz, existem únicos  $r \in H_0^1(\Omega)$  e  $p \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$  tais que  $\zeta = \nabla r + \mathbf{curl} p$ , onde  $\mathbf{curl} p = (\partial p / \partial y, -\partial p / \partial x)$ . O sistema torna-se então

$$-\Delta r = f_3,$$

$$-\frac{1}{3} \mathbf{div} C^* \underset{\approx}{\mathbf{e}}(\phi) - \mathbf{curl} p = \nabla r,$$

$$-(\phi - \nabla \omega) - \epsilon^2 \frac{6}{5\lambda} \mathbf{curl} p = \epsilon^2 \nabla r.$$

Na forma fraca,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \nabla r \cdot \nabla \nu \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} f_3 \nu \, d\mathbf{x} \\ \frac{1}{3} \int_{\Omega} \mathbf{div} C^* \underset{\approx}{\mathbf{e}}(\phi) : \underset{\approx}{\mathbf{e}}(\psi) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mathbf{curl} p \cdot \psi \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \nabla r \cdot \psi \, d\mathbf{x} \\ \int_{\Omega} -\phi \cdot \mathbf{curl} q \, d\mathbf{x} - \epsilon^2 \frac{6}{5\lambda} \int_{\Omega} \mathbf{curl} p \cdot \mathbf{curl} q \, d\mathbf{x} &= 0 \\ \int_{\Omega} \nabla \omega \cdot \nabla s \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \phi \cdot \nabla s \, d\mathbf{x} + \epsilon^2 \int_{\Omega} \nabla r \cdot \nabla s \, d\mathbf{x}\end{aligned}$$

para todos  $\nu \in H_0^1(\Omega)$ ,  $\psi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ ,  $q \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ ,  $s \in H_0^1(\Omega)$ .

A discretização do sistema acima torna-se agora mais acessível. De fato, a primeira equação é a de Poisson. Calculado  $r$ , as duas equações seguintes representam um sistema de Stokes perturbado para  $(-\phi_2, \phi_1)$ . Finalmente temos uma outra equação de Poisson para  $\omega$ . Para todos os problemas acima existem eficientes formulações numéricas com elementos finitos.