

Modelagem Multiescala em Materiais e Estruturas

Parte II: Homogeneização e aproximação de equações elíticas (1 D)

Alexandre L. Madureira

Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC)

Minicurso no XXVII CNMAC

Porto Alegre, setembro de 2004

Curso em conjunto com Fernando Rochinha

Homogeneização e aproximação de equações elíticas (1 D)

Plano das aulas (geral):

- Introdução: um modelo
- Solução homogeneizada
- Aproximação por Elementos Finitos Clássicos
- Elementos Finitos Multiescala
- Uma dificuldade extra
- Conclusões

Introdução: um modelo

Descrição: Nesta breve seção apresentamos o problema unidimensional que iremos considerar nesta parte do curso. É uma equação que tem coeficientes oscilatórios. Mostraremos como as soluções se comportam quando esses coeficientes variam cada vez mais bruscamente. Mostraremos também diversas possibilidades para aproximarmos estas soluções em problemas com uma ou mais dimensões.

Introdução: um modelo

Considere o problema parametrizado por $\varepsilon \leq 1$:

$$-\frac{d}{dx} \left(a(x/\varepsilon) \frac{du^\varepsilon}{dx}(x) \right) = f(x) \quad \text{em } (0, 1),$$
$$u^\varepsilon(0) = u^\varepsilon(1) = 0.$$

onde

- $a(\cdot)$ é suave e periódica com período 1. Logo $a(\cdot/\varepsilon)$ é periódica com período ε , pois $a((x + \varepsilon)/\varepsilon) = a(x/\varepsilon + 1) = a(x/\varepsilon)$
- existem dois números reais α, β tais que $\beta \geq a(x) \geq \alpha > 0$
- f é suave

Introdução: um modelo

Em 1D, temos solução analítica:

$$u^\varepsilon(x) = \int_0^x \frac{-1}{a(s/\varepsilon)} \left(\int_0^s f(t) dt + c_0 \right) ds,$$
$$c_0 = \frac{1}{\int_0^1 a(s/\varepsilon) ds} \int_0^1 \left(\frac{1}{a(s/\varepsilon)} \int_0^s f(t) dt \right) ds.$$

Nos nossos exemplos numéricos, consideraremos

$$f(x) = 1, \quad a(x) = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(1 + \sin(2\pi x)) + \alpha, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{5}{2}.$$

A seguir tomaremos $\varepsilon = 1/4$, $\varepsilon = 1/8$, e $\varepsilon = 1/16$.

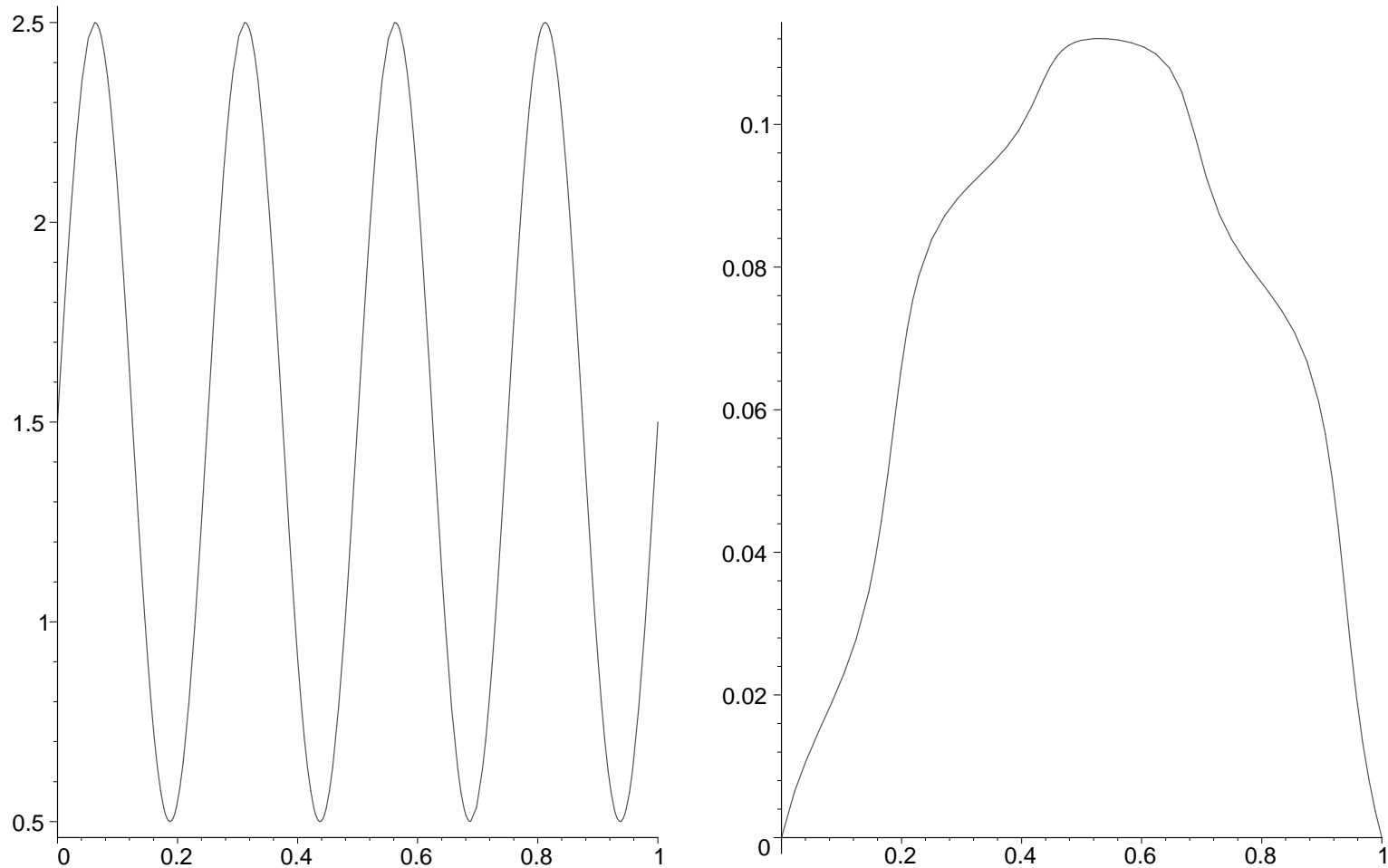


Fig. 1: Gráficos de $a(\cdot/\varepsilon)$ e da solução exata para $\varepsilon = 1/4$.

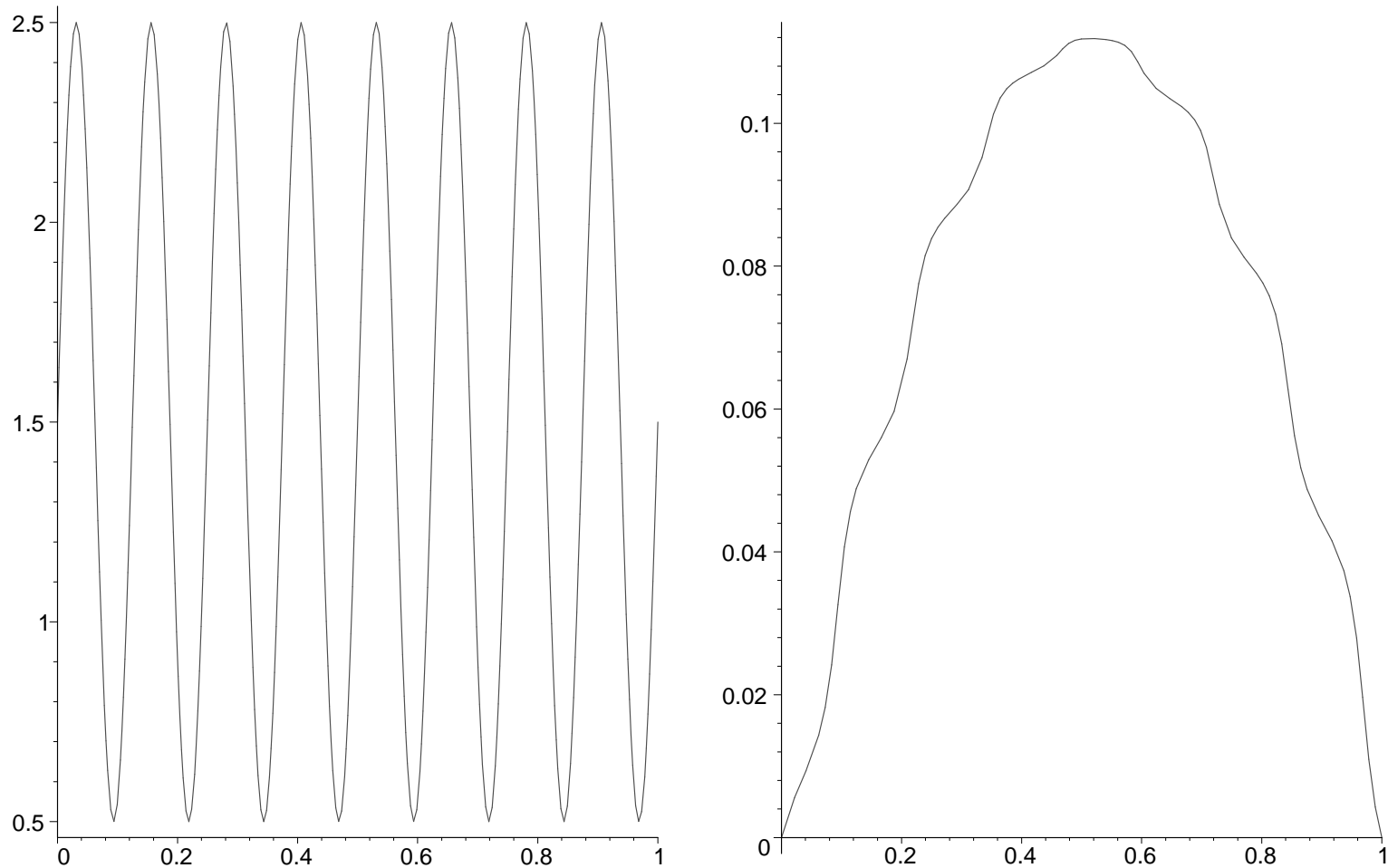


Fig. 2: Gráficos de $a(\cdot/\varepsilon)$ e da solução exata para $\varepsilon = 1/8$.

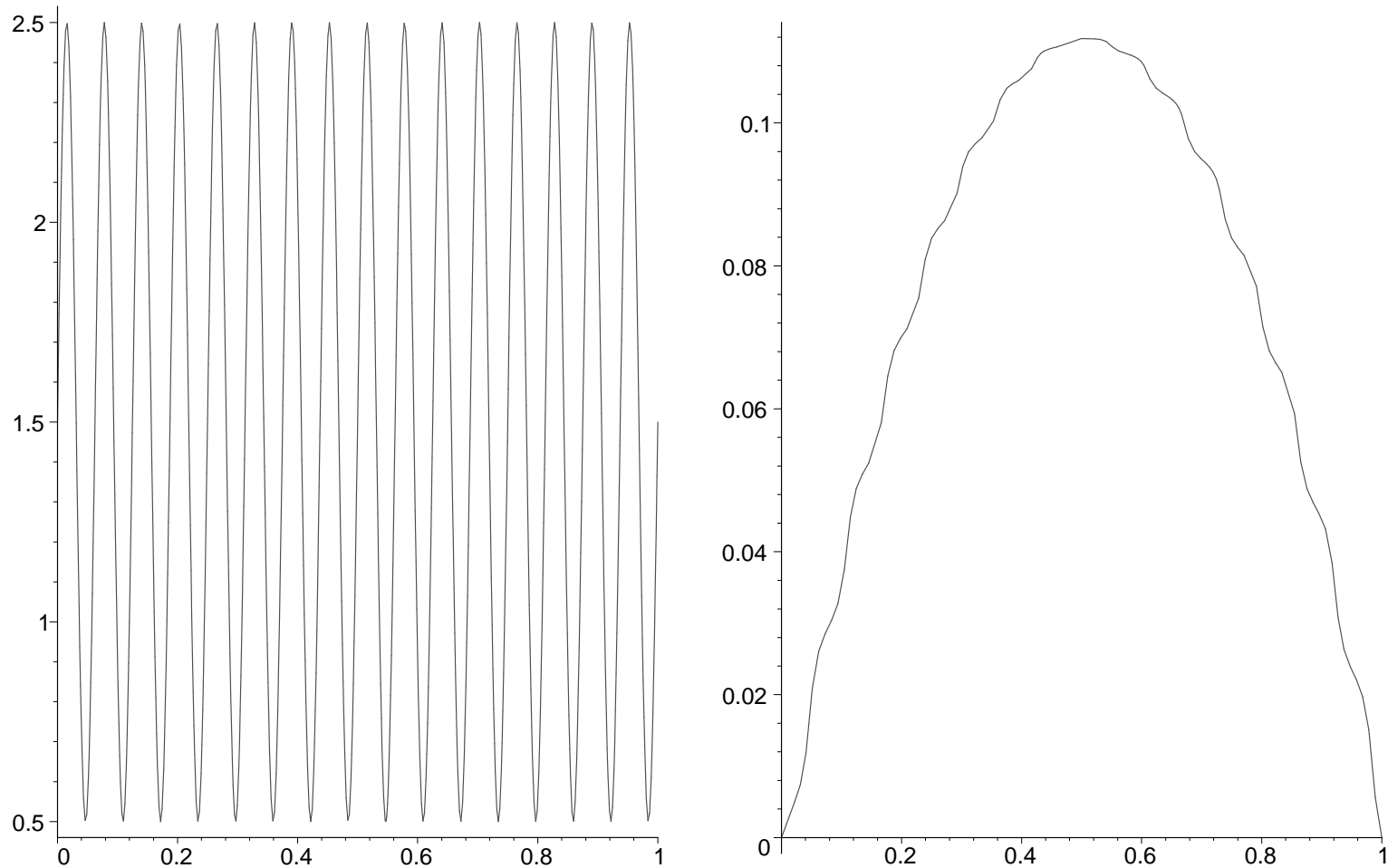


Fig. 3: Gráficos de $a(\cdot/\varepsilon)$ e da solução exata para $\varepsilon = 1/16$.

Introdução: um modelo

Algumas observações:

- É fácil notar nestes exemplos que quando $\varepsilon \rightarrow 0$, a função $a(\cdot/\varepsilon)$, e portanto u^ε , oscilam com maior frequência.
- Neste caso, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, a solução u^ε “parece convergir” para uma função limite: é a *solução homogeneizada*.
- Em dimensões maiores, apenas em casos particulares é possível obter soluções analíticas. Deve-se então buscar métodos que permitam o cálculo de soluções aproximadas.

Introdução: um modelo

Idéias para obtenção de soluções aproximadas:

1. *Técnicas de homogeneização*: quando $\varepsilon \rightarrow 0$, a solução exata converge para a solução homogeneizada. Espera-se então que para valores de ε pequenos, a aproximação pela solução homogeneizada seja boa o suficiente.
2. *Discretização por elementos finitos clássicos*: esta escolha de método numérico é devido tanto à flexibilidade do método como também a facilidade em desenvolver uma análise de erro que ressalte eventuais dificuldades numéricas.

3. *Elementos finitos multiescala*: a idéia aqui é estender o método de elementos finitos clássicos a fim de melhorar sua performance em alguns problemas mais complicados. Como exemplo descreveremos um método em que funções que resolvem o problema *localmente* são utilizadas para gerar um espaço de elementos finitos, e automaticamente levam informações da pequena escala para a grande escala, num processo de *homogeneização numérica*.

Homogeneização e aproximação de equações elíticas (1 D)

- Introdução: um modelo
- Solução homogeneizada
- Aproximação por Elementos Finitos Clássicos
- Elementos Finitos Multiescala
- Uma dificuldade extra
- Conclusões

Solução homogeneizada

Descrição: Nesta parte, apresentamos a solução homogeneizada para o problema unidimensional com coeficientes oscilatórios.

Mostramos um resultado que garante que as soluções exatas convergem para a homogeneizada quando $\varepsilon \rightarrow 0$. A seguir, ilustramos este resultado de convergência com alguns exemplos numéricos.

Lembre-se que u^ε é solução de

$$-\frac{d}{dx} \left(a(x/\varepsilon) \frac{du^\varepsilon}{dx}(x) \right) = f(x) \quad \text{em } (0, 1),$$

$$u^\varepsilon(0) = u^\varepsilon(1) = 0.$$

É possível mostrar que u^ε converge para u^0 , onde

$$-\frac{1}{\mathcal{M}(1/a)} \frac{d^2}{dx^2} u^0 = f(x) \quad \text{em } (0, 1),$$

$$u^0(0) = u^0(1) = 0,$$

e $\mathcal{M}(1/a) = \int_0^1 \frac{1}{a(x)} dx$. Em uma dimensão, é fácil calcular u^0 analiticamente:

$$u^0(x) = \mathcal{M}(1/a) \left[- \int_0^x \int_0^\xi f(t) dt d\xi + x \int_0^1 \int_0^\xi f(t) dt d\xi \right].$$

A convergência ocorre usando norma do espaço $L^2(0, 1)$. Este espaço é composto por funções $v : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ “quadrado integráveis”, i.e.,

$$L^2(0, 1) = \{v : v \text{ é função real definida em } (0, 1) \text{ e } v^2 \text{ é integrável}\}.$$

Neste espaço definimos a norma

$$\|v\|_{L^2(0,1)} = \left(\int_0^1 [v(x)]^2 dx \right)^{1/2}.$$

Observação *Aqui, o adjetivo “integrável” quer dizer integrável no sentido de Lebesgue, uma idéia um pouco mais abrangente que a de integração no sentido de Riemann. Entretanto, é suficiente ter a intuição de funções integráveis como sendo Riemann integráveis.*

Solução homogeneizada

O seguinte resultado de convergência justifica o uso da solução homogeneizada [Moskow e Vogelius, 1997].

Teorema. *Seja $f \in L^2(0,1)$. Então existe uma constante c independente de ε e f tal que*

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{L^2(0,1)} \leq c\varepsilon \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Comparamos agora como a solução homogeneizada se comporta.

Consideraremos a seguir a sequência de exemplos, para $\varepsilon = 1/4$, $\varepsilon = 1/8$, e $\varepsilon = 1/16$.

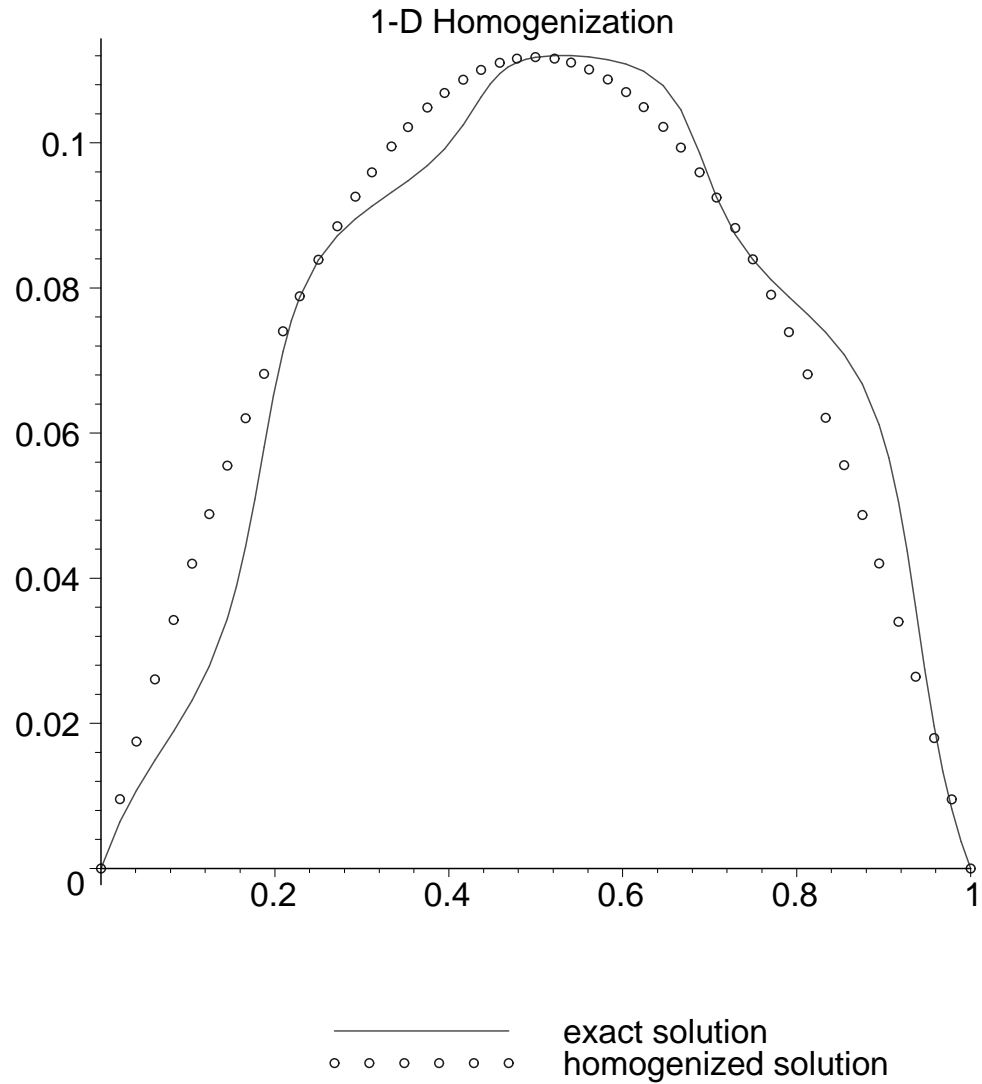


Fig. 4: Comparação entre as sols. exata e homogen. para $\varepsilon = 1/4$.

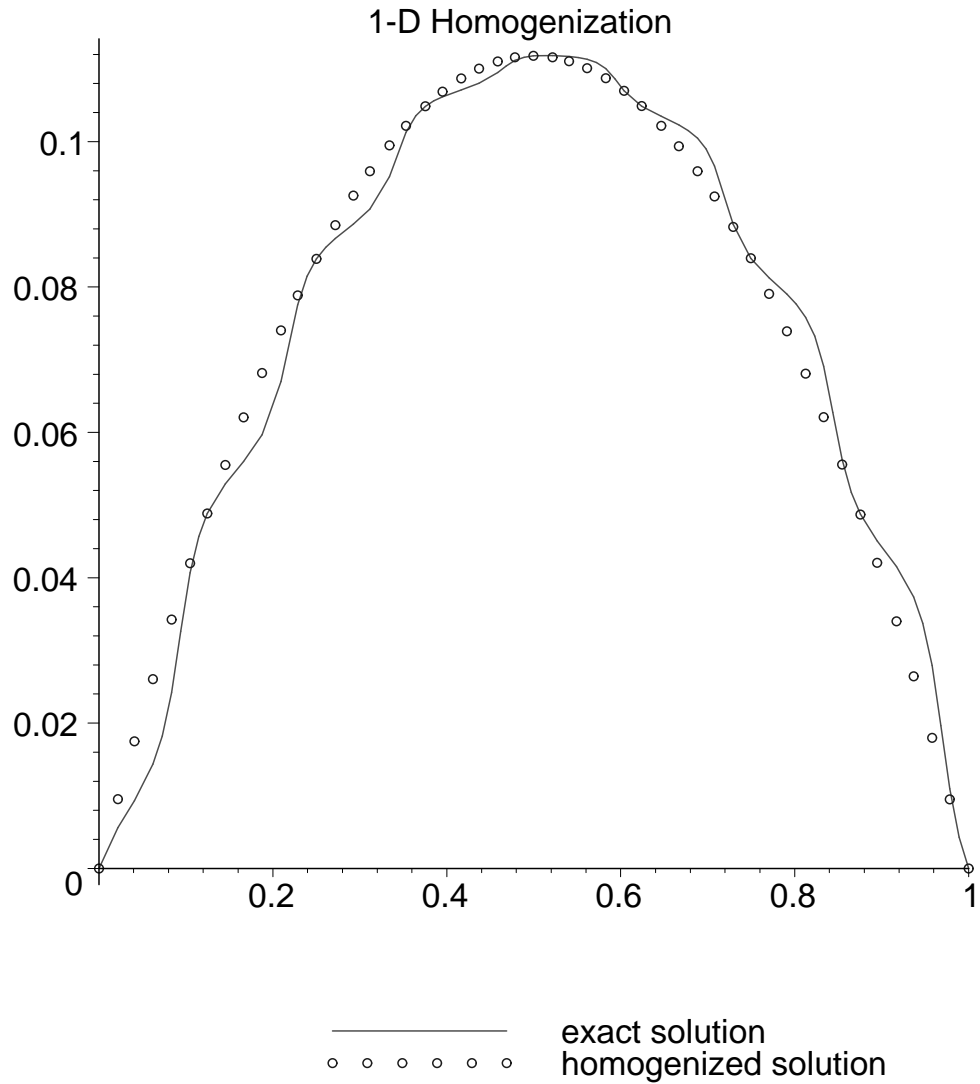


Fig. 5: Comparação entre as sols. exatas e homogen. para $\varepsilon = 1/8$.

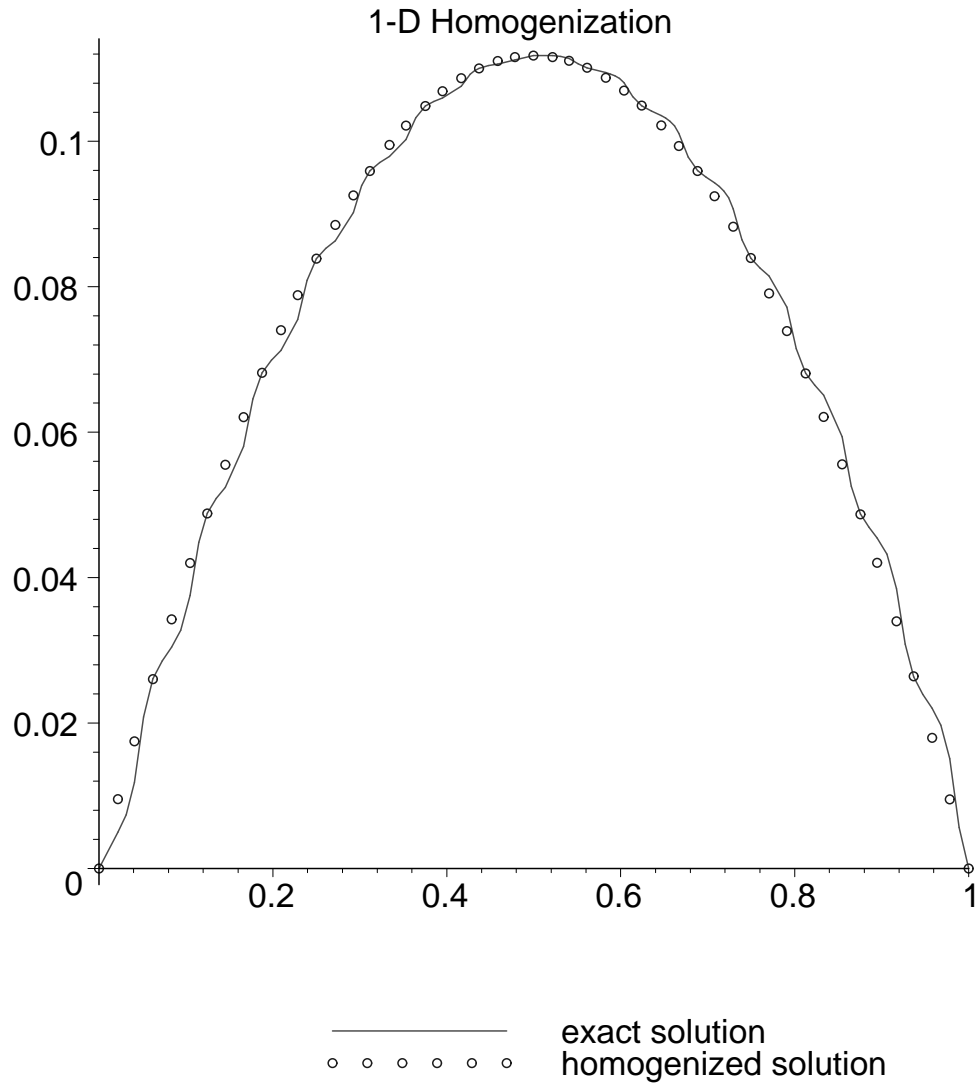


Fig. 6: Comparação entre as sols. exata e homogen. para $\varepsilon = 1/16$.

Solução homogeneizada

Pode-se notar que quando $\varepsilon \rightarrow 0$, a solução homogeneizada u^0 torna-se uma boa aproximação para a solução exata u^ε .

Apesar de serem extremamente úteis em várias aplicações, as técnicas de homogeneização apresentam algumas limitações. Por exemplo, sua aplicabilidade está limitada a valores de ε pequenos, como fica aparente nos exemplos anteriores. Outras dificuldades surgem em casos mais gerais, por exemplo quando $a(\cdot)$ é não periódico.

- Introdução: um modelo
- Solução homogeneizada
- Aproximação por Elementos Finitos Clássicos

Formulação fraca

Discretização por Elementos Finitos

Análise de erro: o que dá errado?

- Elementos Finitos Multiescala
- Uma dificuldade extra
- Conclusões

Aproximação por Elementos Finitos Clássicos

Descrição: Dividimos esta seção em três partes. Primeiro introduzimos o conceito de formulação fraca, apresentamos o método de elementos finitos clássico e depois o aplicamos ao problema elítico com coeficientes oscilatórios. Vemos que quando são poucas as oscilações, a aproximação é boa. Entretanto, quando aumenta a frequência das oscilações ($\varepsilon \rightarrow 0$), o método de elementos finitos clássico resulta em aproximações pouco satisfatórias.

Em seguida, analisamos o erro de aproximação e percebemos que de fato parâmetro ε interfere de forma negativa na estimativa de erro.

Formulação fraca

O primeiro passo para apresentar o método é reescrever

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} \left(a(x/\varepsilon) \frac{du^\varepsilon}{dx}(x) \right) &= f(x) \quad \text{em } (0, 1), \\ u^\varepsilon(0) &= u^\varepsilon(1) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

na sua *forma fraca*. Multiplicando (1) por uma função v suave e que se anule em $x = 0$ e $x = 1$ e integrando por partes, temos que

$$\int_0^1 \left(a(x/\varepsilon) \frac{du^\varepsilon}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) \right) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx.$$

Note que se u^ε é solução de (1), então a identidade acima vale para todo v suficientemente suave tal que $v(0) = v(1) = 0$.

Formulação fraca

É possível também inverter a ordem desse raciocínio, i.e., se

$u^\varepsilon(0) = u^\varepsilon(1) = 0$ é tal que

$$\int_0^1 \left(a(x/\varepsilon) \frac{du^\varepsilon}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) \right) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx. \quad (2)$$

para todo v suficientemente suave tal que $v(0) = v(1) = 0$, então

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} \left(a(x/\varepsilon) \frac{du^\varepsilon}{dx}(x) \right) &= f(x) \quad \text{em } (0, 1), \\ u^\varepsilon(0) &= u^\varepsilon(1) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Chamamos (2) de formulação fraca e (3) de formulação forte.

Buscaremos a solução da formulação fraca num espaço de funções que sejam contínuas, que tenham derivadas (no sentido fraco), e que se anulem em $x = 0$ e $x = 1$. Exigiremos que essas funções e suas derivadas sejam quadrado integráveis. Chamaremos esse espaço de

$$H_0^1(0, 1) = \{v \in C[0, 1] : v(0) = v(1) = 0; \quad v^2 \text{ e } (v')^2 \text{ são integráveis}\}$$

e introduzimos a norma

$$\|v\|_{H^1(0,1)} = \left(\int_0^1 \left\{ [v(x)]^2 + \left[\frac{dv}{dx}(x) \right]^2 \right\} dx \right)^{1/2}.$$

Como exemplo de funções que estão em $H_0^1(0, 1)$, temos as funções suaves por partes. Mostramos um exemplo a seguir.

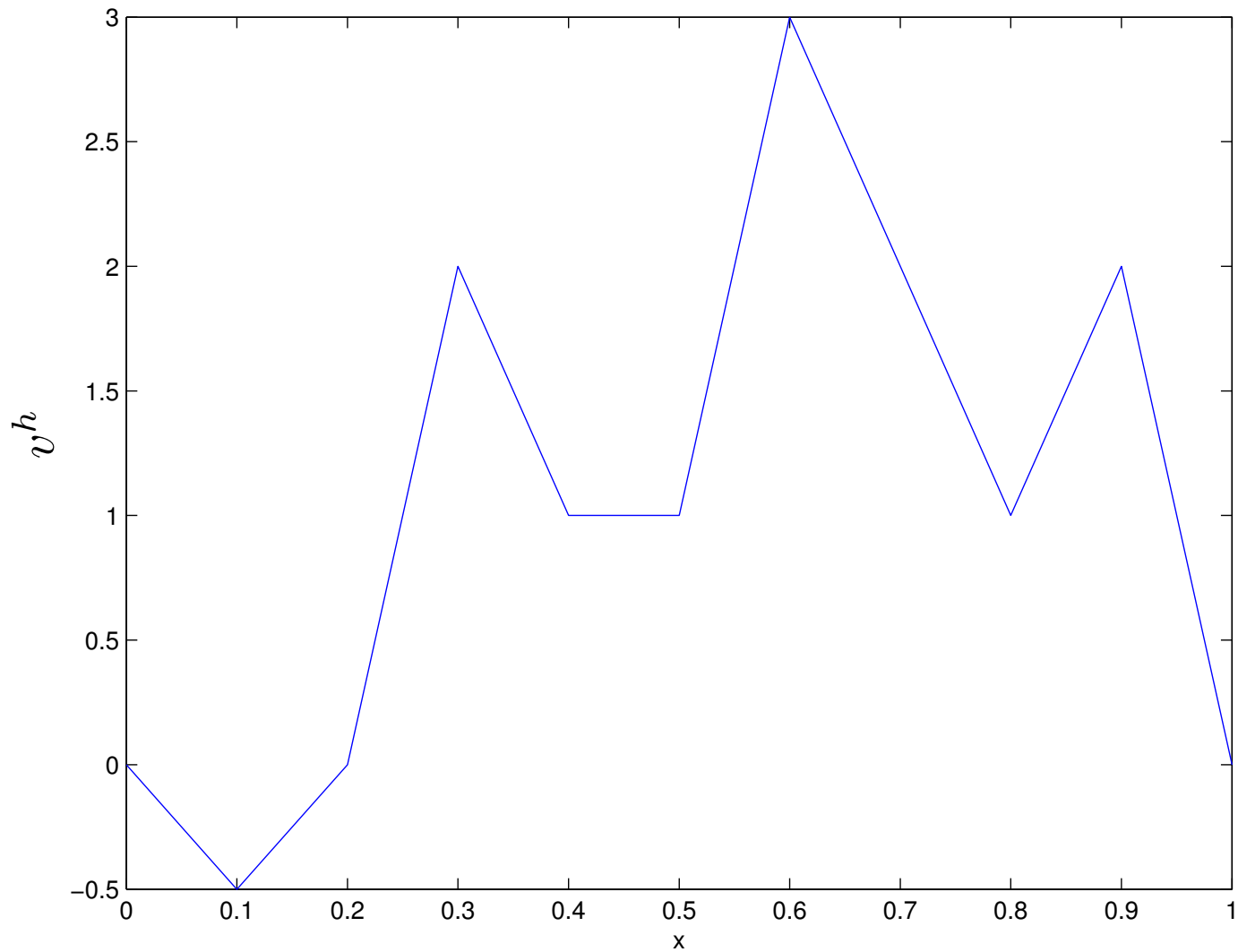


Fig. 7: Exemplo de função linear por partes

Formulação fraca

Note que a função da figura é contínua, se anula em $x = 0$ e $x = 1$, e além disso só deixa de ser suave num número finito de pontos.

O importante no momento é que é possível provar que existe uma função $u^\varepsilon \in H_0^1(0, 1)$ satisfazendo a formulação fraca. Além disso, no caso de f ser suave, esta solução também resolve a formulação forte, ou seja, essas duas formulações são equivalentes.

- Introdução: um modelo
- Solução homogeneizada
- Aproximação por Elementos Finitos Clássicos

Formulação fraca

Discretização por Elementos Finitos

Análise de erro: o que dá errado?

- Elementos Finitos Multiescala
- Uma dificuldade extra
- Conclusões

Discretização por Elementos Finitos

A idéia do método de elementos finitos é escolher um subespaço de $H_0^1(0, 1)$ e buscar funções que satisfaçam a formulação fraca dentro desse subespaço. Primeiro discretizamos o domínio $(0, 1)$ definindo os nós $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N+1} = 1$, onde $x_j = jh$, e $h = 1/(N + 1)$ é o parâmetro de malha. A seguir, definimos o espaço $V_0^h \subset H_0^1(0, 1)$, onde

$$V_0^h = \{v^h \in H_0^1(0, 1) : v^h \text{ é linear em } (x_{j-1}, x_j) \text{ for } j = 1, \dots, N+1\}.$$

Chamamos V_0^h de espaço de funções lineares por partes.

Uma função de V_0^h típica é representada abaixo.

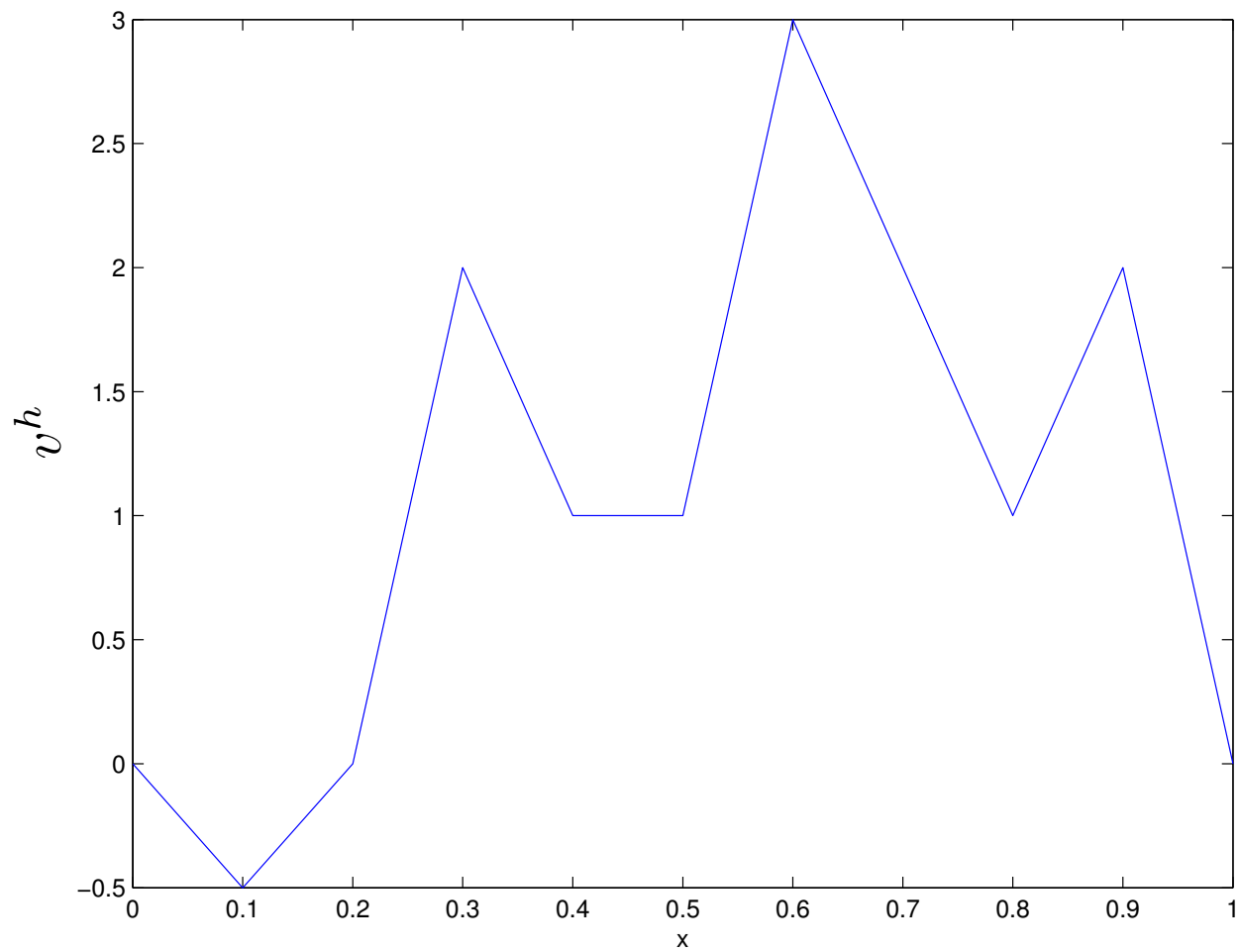


Fig. 8: Exemplo de função linear por partes

Discretização por Elementos Finitos

A aproximação por elementos finitos de u^ε é dada por $u^h \in V_0^h$ tal que

$$\int_0^1 \left(a(x/\varepsilon) \frac{du^h}{dx}(x) \frac{dv^h}{dx}(x) \right) dx = \int_0^1 f(x) v^h(x) dx$$

para todo $v^h \in V_0^h$.

Observação *Note que u^h também depende de ε , apesar desta dependência não estar explicitada na notação.*

Discretização por Elementos Finitos

Observe que uma função em V_0^h pode ser caracterizada de forma única pelos valores que assume nos nós $x_1, x_2, \text{etc.}$ Em vista disto, podemos introduzir uma *base* no espaço V_0^h . Seja $\phi_i \in V_0^h$ tal que

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

para $j = 1, \dots, N$. Uma função de base típica está representada na figura a seguir.

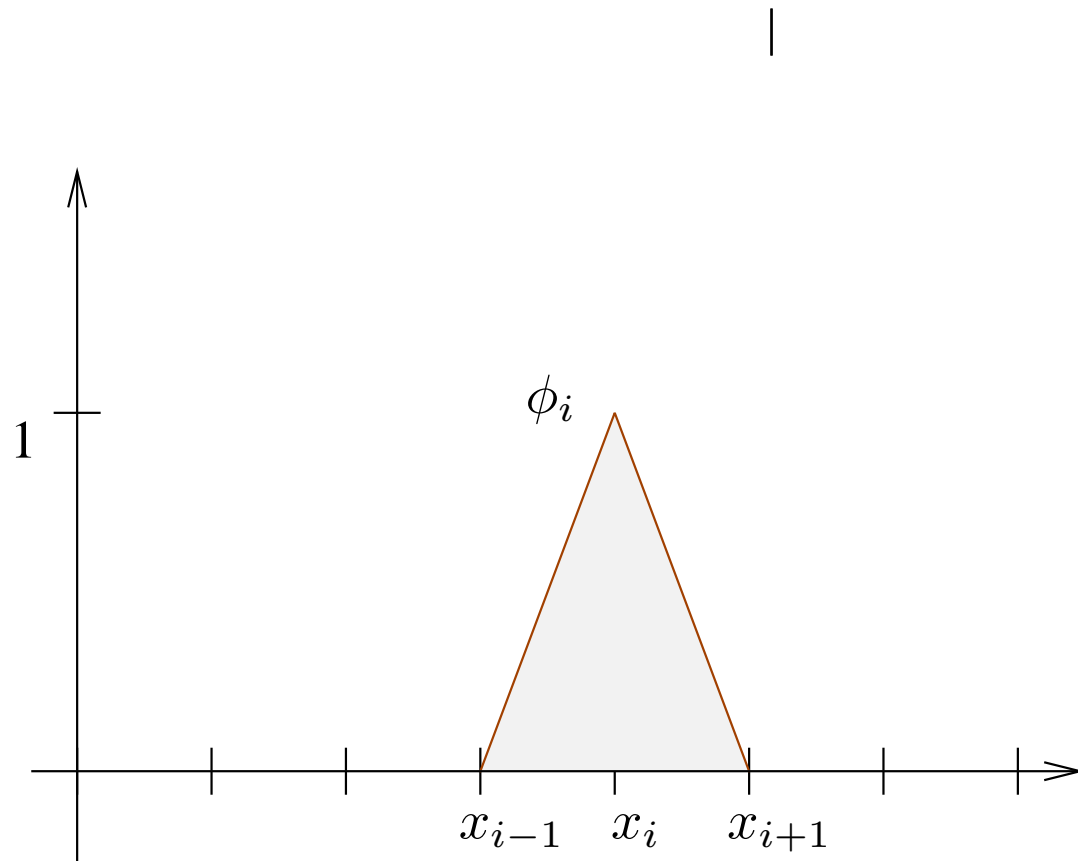


Fig. 9: Uma função da base do espaço de elementos finitos

Discretização por Elementos Finitos

Temos então $V_0^h = \text{span} \{\phi_1, \dots, \phi_N\}$.

Finalmente, se $u^h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i(x)$, então

$$\sum_{i=1}^N u_i \int_0^1 \left(a(x/\varepsilon) \frac{d\phi_i}{dx}(x) \frac{d\phi_j}{dx}(x) \right) dx = \int_0^1 f(x) \phi_j(x) dx$$

para $j = 1, \dots, N$.

Note que $u_j = u^h(x_j)$ é o valor de u^h no nó x_j .

Discretização por Elementos Finitos

O método de elementos finitos consiste então em achar

$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)^T \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{f},$$

onde a matriz $\mathbf{M} = (M_{i,j}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ e o vetor

$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_N)^T \in \mathbb{R}^N$ são dados por

$$M_{i,j} = \int_0^1 \left(a(x/\varepsilon) \frac{d\phi_i}{dx}(x) \frac{d\phi_j}{dx}(x) \right) dx, \quad f_j = \int_0^1 f(x) \phi_j(x) dx.$$

Discretização por Elementos Finitos

As aproximações numéricas apresentam resultados variados. Para $\varepsilon = 1/4$ e $h = 1/32$, o método de elementos finitos aproxima razoavelmente bem a solução exata, como mostra a figura 10.

Entretanto, a aproximação se deteriora quando ε se torna menor.

Veja os gráficos para $h = 1/32$, mas $\varepsilon = 1/8$ na figura 11, e $\varepsilon = 1/16$ na figura 12.

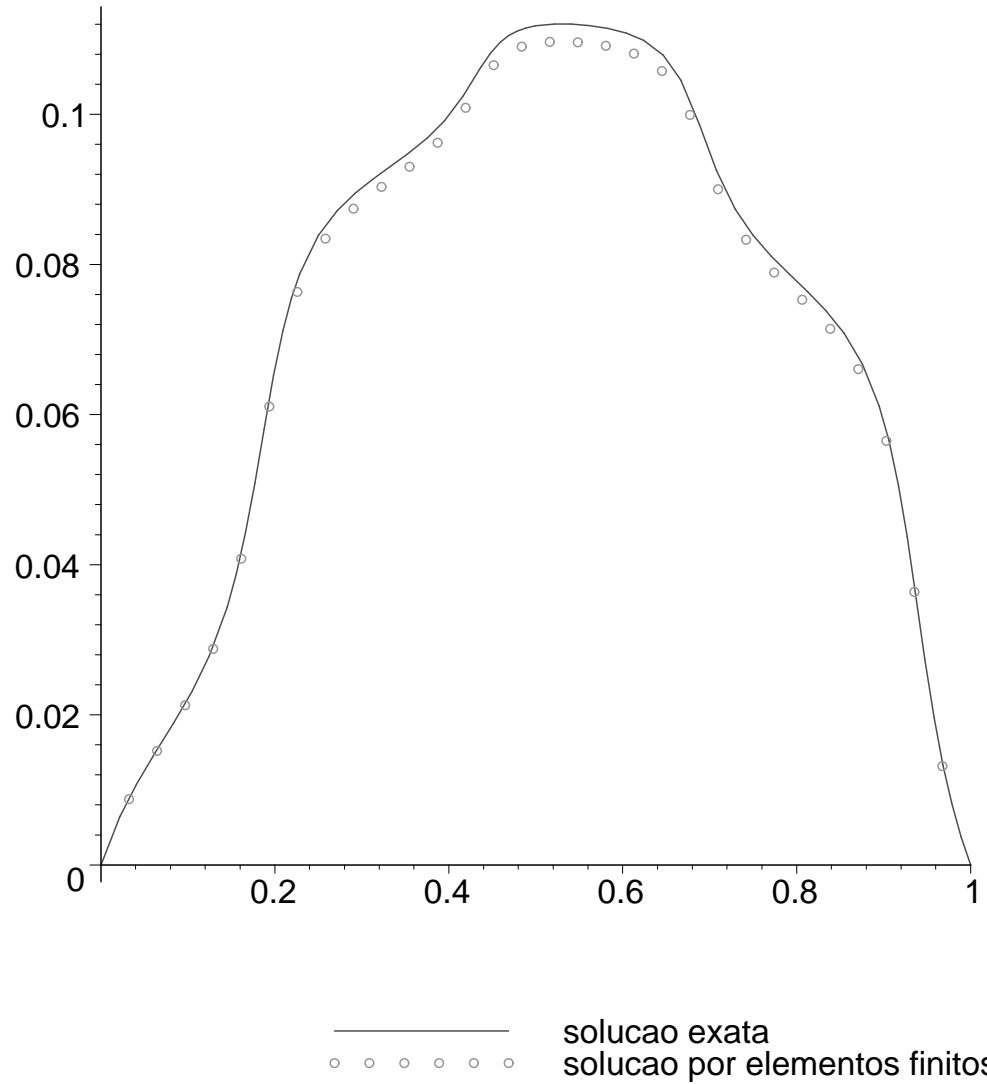


Fig. 10: u^ϵ e sua aproximação, com $\epsilon = 1/4$ e $h = 1/32$.

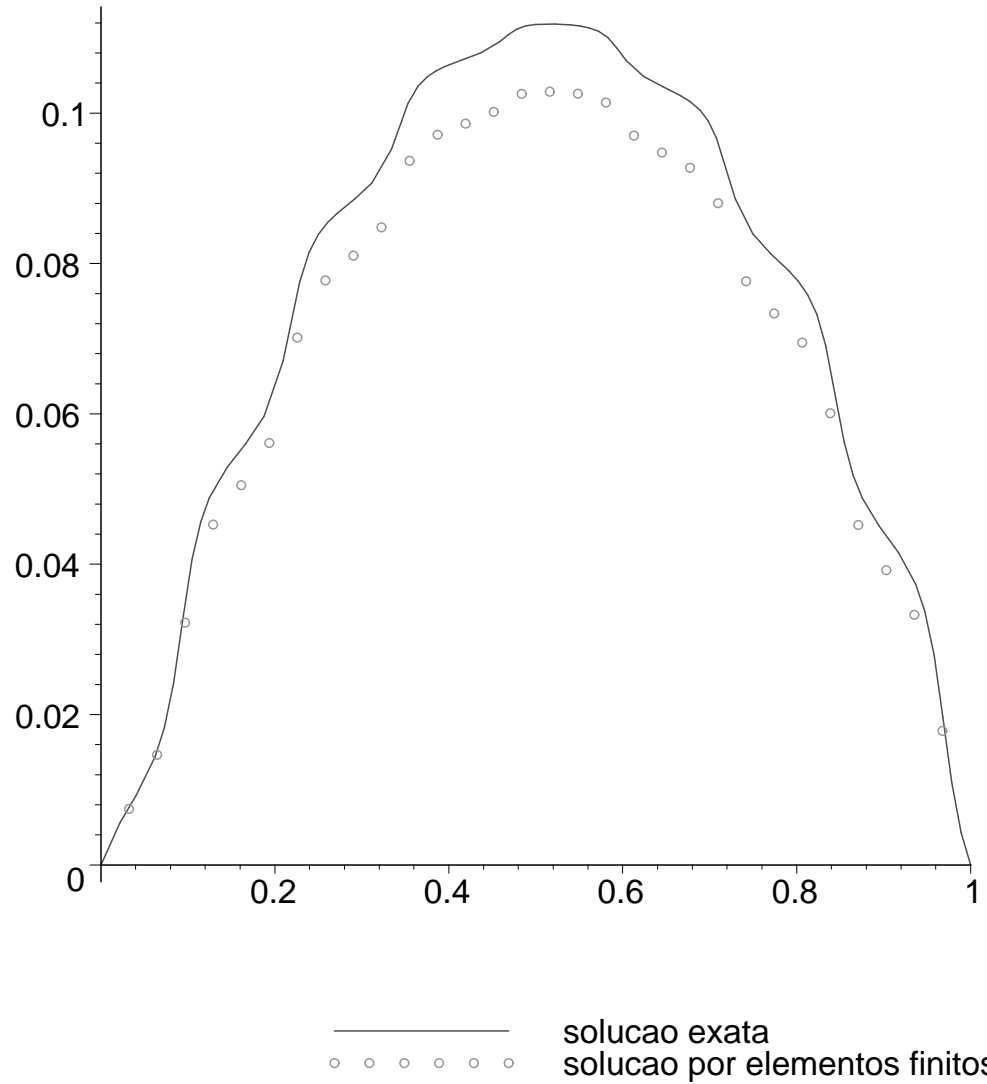


Fig. 11: u^ϵ e sua aproximação, com $\epsilon = 1/8$ e $h = 1/32$.

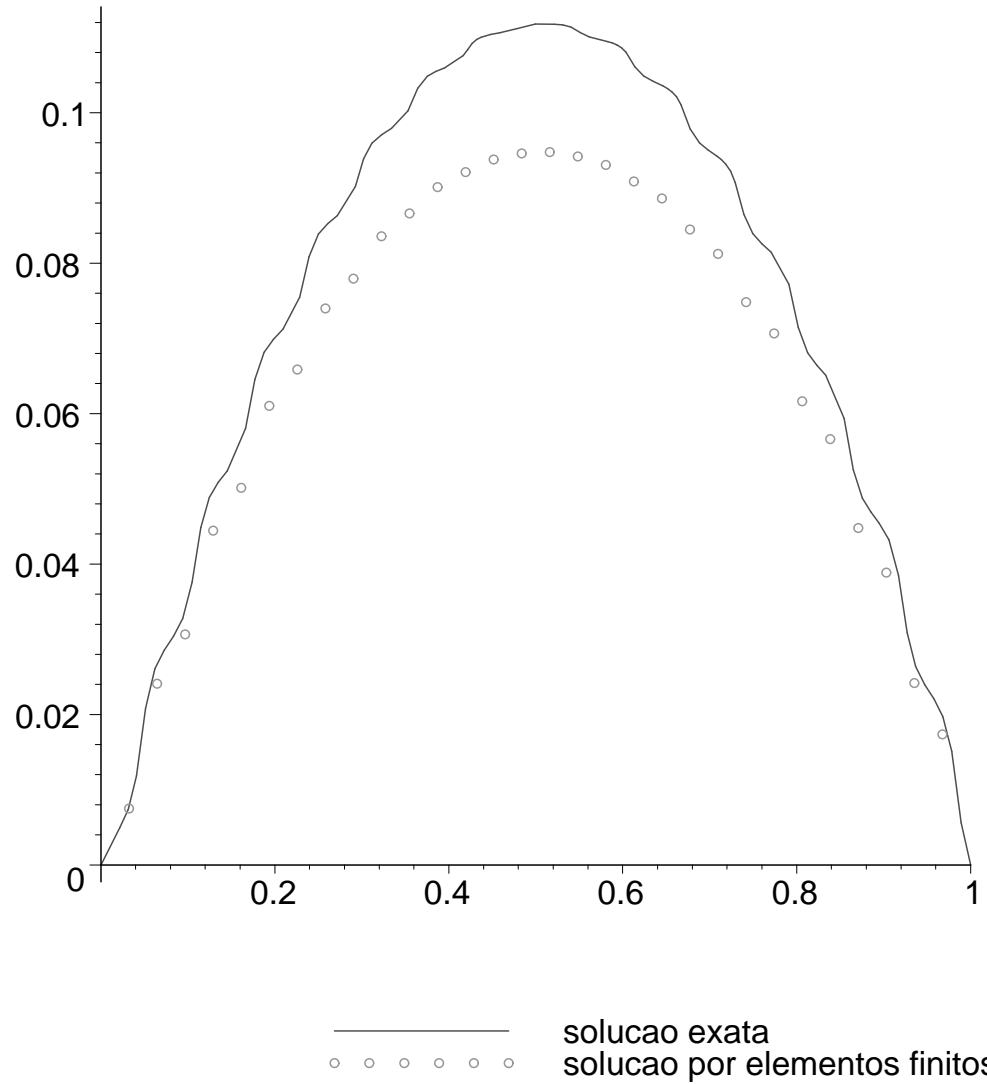


Fig. 12: u^ε e sua aproximação, com $\varepsilon = 1/16$ e $h = 1/32$.

Discretização por Elementos Finitos

A aproximação melhora se refinarmos a malha. Por exemplo, tomando o caso $\varepsilon = 1/8$, mas com $h = 1/64$, temos uma melhoria na aproximação, como mostra a figura 13.

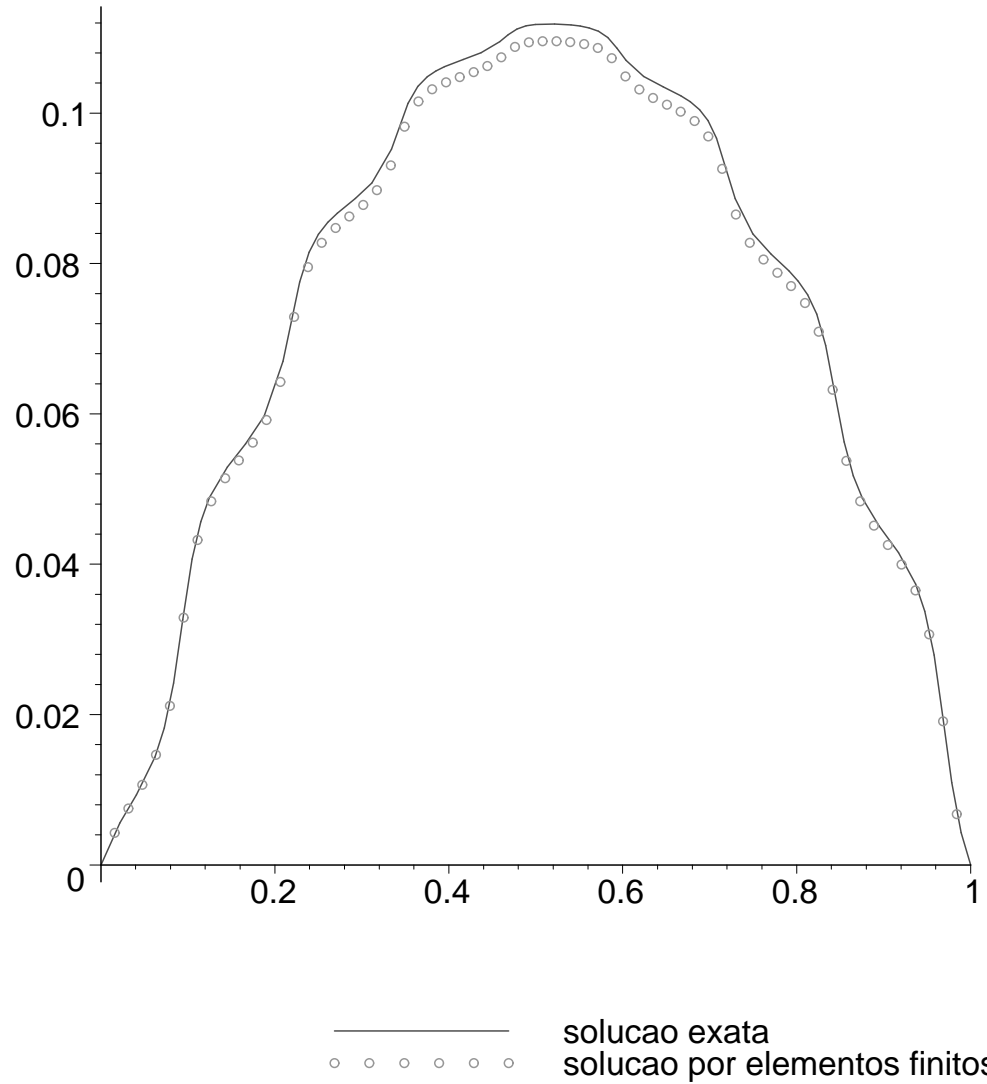


Fig. 13: u^ϵ e sua aproximação com $\epsilon = 1/8$ e $h = 1/64$.

Discretização por Elementos Finitos

O ponto que queremos ressaltar é que o método de elementos finitos converge, mas *a taxa de convergência depende de ε* . Isto pode ser um problema em dimensões maiores, quando o uso de malhas refinadas torna-se caro computacionalmente.

- Introdução: um modelo
- Solução homogeneizada
- Aproximação por Elementos Finitos Clássicos

Formulação fraca

Discretização por Elementos Finitos

Análise de erro: o que dá errado?

- Elementos Finitos Multiescala
- Uma dificuldade extra
- Conclusões

Análise de erro: o que dá errado?

A fim de entender melhor porque o método de elementos finitos clássico não funciona bem, desenvolvemos uma análise de erro para esse problema. Aqui, c denota uma constante universal, independente de ε , h e f .

Para facilitar a notação, definimos a forma bilinear

$$b(u, v) = \int_0^1 \left(a(x/\varepsilon) \frac{du}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) \right) dx.$$

Então, a solução exata $u^\varepsilon \in H_0^1(0, 1)$ e sua aproximação por elementos finitos $u^h \in V_0^h$ satisfazem

$$b(u^\varepsilon, v) = \int_0^1 f(x)v(x) dx \quad \text{para todo } v \in H_0^1(0, 1),$$

$$b(u^h, v^h) = \int_0^1 f(x)v^h(x) dx \quad \text{para todo } v^h \in V_0^h.$$

Logo, como $V_0^h \subset H_0^1(0, 1)$,

$$b(u^\varepsilon - u^h, v^h) = 0 \quad \text{para todo } v^h \in V_0^h.$$

Análise de erro: o que dá errado?

Precisamos dos resultados a seguir.

Lema (Continuidade da forma bilinear $b(\cdot, \cdot)$). *Se $a(x) \leq \beta$, então*

$$b(u, v) \leq \beta \|u\|_{H^1(0,1)} \|v\|_{H^1(0,1)} \quad \text{para todo } u, v \in H_0^1(0, 1).$$

Lema (Coercividade). *Se $a(x) \geq \alpha$, então existe uma constante c tal que*

$$b(v, v) \geq c \|v\|_{H^1(0,1)}^2 \quad \text{para todo } v \in H_0^1(0, 1).$$

Análise de erro: o que dá errado?

Lema (Continuidade da forma bilinear $b(\cdot, \cdot)$). Se $a(x) \leq \beta$, então $b(u, v) \leq \beta \|u\|_{H^1(0,1)} \|v\|_{H^1(0,1)}$ para todo $u, v \in H_0^1(0, 1)$.

Demonstração. Como $a(x) \leq \beta$, então

$$\begin{aligned} b(u, v) &= \int_0^1 \left(a(x/\varepsilon) \frac{du^\varepsilon}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) \right) dx \leq \beta \int_0^1 \left| \frac{du^\varepsilon}{dx}(x) \right| \left| \frac{dv}{dx}(x) \right| dx \\ &\leq \beta \int_0^1 \left(\left| \frac{du^\varepsilon}{dx}(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 \left| \frac{dv}{dx}(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \beta \|u\|_{H^1(0,1)} \|v\|_{H^1(0,1)}, \end{aligned}$$

para todo $u, v \in H_0^1(0, 1)$. □

Análise de erro: o que dá errado?

Lema (Coercividade). *Se $a(x) \geq \alpha$, então existe uma constante c tal que*

$$b(v, v) \geq c \|v\|_{H^1(0,1)}^2 \quad \text{para todo } v \in H_0^1(0, 1).$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} b(v, v) &= \int_0^1 a(x/\varepsilon) \left| \frac{dv}{dx}(x) \right|^2 dx \geq \alpha \int_0^1 \left| \frac{dv}{dx}(x) \right|^2 dx \\ &\geq c \int_0^1 \left[|v(x)|^2 + \left| \frac{dv}{dx}(x) \right|^2 \right] dx = c \|v\|_{H^1(0,1)}^2, \end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Poincaré. □

Análise de erro: o que dá errado?

Temos então

1. $b(u^\varepsilon - u^h, v^h) = 0$ para todo $v^h \in V_0^h$.
2. $b(u, v) \leq \beta \|u\|_{H^1(0,1)} \|v\|_{H^1(0,1)}$ para todo $u, v \in H_0^1(0, 1)$.
3. $b(v, v) \geq c \|v\|_{H^1(0,1)}^2$ para todo $v \in H_0^1(0, 1)$.

Logo, usando 3., 1., e 2., temos

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon - u^h\|_{H^1(0,1)}^2 &\leq c b(u^\varepsilon - u^h, u^\varepsilon - u^h) = c b(u^\varepsilon - u^h, u^\varepsilon - v^h) \\ &\leq c \|u^\varepsilon - u^h\|_{H^1(0,1)} \|u^\varepsilon - v^h\|_{H^1(0,1)} \quad \text{para todo } v^h \in V_0^h. \end{aligned}$$

Análise de erro: o que dá errado?

Mostramos assim o Lema de Cea.

Lema (Lema de Cea). *Sejam u^ε e u^h soluções exata e por elementos finitos. Então existe uma constante c tal que*

$$\|u^\varepsilon - u^h\|_{H^1(0,1)} \leq c \|u^\varepsilon - v^h\|_{H^1(0,1)} \quad \text{para todo } v^h \in V_0^h.$$

A seguir, usando estimativas clássicas de interpolação, temos que

$$\|u^\varepsilon - I^h u^\varepsilon\|_{H^1(0,1)} \leq ch |u^\varepsilon|_{H^2(0,1)},$$

onde $I^h u^\varepsilon = \sum_{j=1}^N u^\varepsilon(x_j) \phi_j$ é o interpolador de u^ε em V_0^h , e

$$|v|_{H^2(0,1)} = \left(\int_0^1 \left[\frac{d^2 v}{dx^2}(x) \right]^2 dx \right)^{1/2}.$$

Fazendo $v^h = I^h u^\varepsilon$ no Lema de Cea, concluimos que

$$\|u^\varepsilon - u^h\|_{H^1(0,1)} \leq ch |u^\varepsilon|_{H^2(0,1)}.$$

Obtemos finalmente o teorema a seguir usando a estimativa

$$|u^\varepsilon|_{H^2(0,1)} \leq \frac{c}{\varepsilon} \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Teorema. *Seja $f \in L^2(0, 1)$, e sejam u^ε e u^h soluções exata e por elementos finitos. Então existe uma constante c tal que*

$$\|u^\varepsilon - u^h\|_{H^1(0,1)} \leq c \frac{h}{\varepsilon} \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

- *o método converge quando $h \rightarrow 0$. De fato, para ε fixo, o erro vai a zero quando o tamanho da malha vai a zero. O problema é que a convergência em h não é uniforme em ε .*
- *Logo, para ε pequeno, a menos que a malha seja muito refinada ($h \ll \varepsilon$), a estimativa acima indica que o erro é grande.*
- *Concluimos que os elementos finitos clássicos são ruins para este tipo de problema, e explica os maus resultados anteriores.*

- Introdução: um modelo
- Solução homogeneizada
- Aproximação por Elementos Finitos Clássicos
- Elementos Finitos Multiescala

Introdução aos Elementos Finitos Multiescala

Análise de erro

Outros Comentários

- Uma dificuldade extra
- Conclusões

Elementos Finitos Multiescala

Descrição: Começamos explicando como *elementos finitos multiescala* podem ser gerados. Babuška (1983) propôs, e mais recentemente, Tom Hou e seus colaboradores (1997, 1999, 2003, 2004) estenderam uma forma de aproximação numérica para EDPs em duas dimensões com coeficientes oscilatórios. A idéia básica é mudar as funções de base do espaço de elementos finitos. Ao invés de usar funções lineares por partes, a técnica de *elementos finitos multiescala* usa funções que resolvem localmente (em cada elemento) a equação em questão.

Apresentamos aqui as idéias no caso unidimensional. Em quase todos os aspectos, incluindo a análise de erro, a extensão para duas dimensões é natural. Comentamos ao fim alguns pontos onde esta generalização não é trivial.

Introdução aos EFMs

Nós começamos a definir o método construindo as funções de base.

Seja ψ_i tal que

$$-\frac{d}{dx} \left(a(x/\varepsilon) \frac{d\psi_i}{dx}(x) \right) = 0 \quad \text{em } \cup_{j=1}^{N+1} (x_{j-1}, x_j),$$

$$\psi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

para $i = 1, \dots, N$.

Definimos o espaço de elementos finitos multiescala como sendo

$$V_0^{h,\varepsilon} = \text{span} \{ \psi_1, \dots, \psi_N \}.$$

Introdução aos EFMs

Uma função de base típica é apresentada a seguir para $\varepsilon = 1/4$ e $h = 1/32$. Note que a função se parece muito com a função de base do método de elementos finitos usual. Isto se explica pois neste caso o parâmetro de malha h é bem menor do que ε , e a função de base tradicional ainda funciona bem.

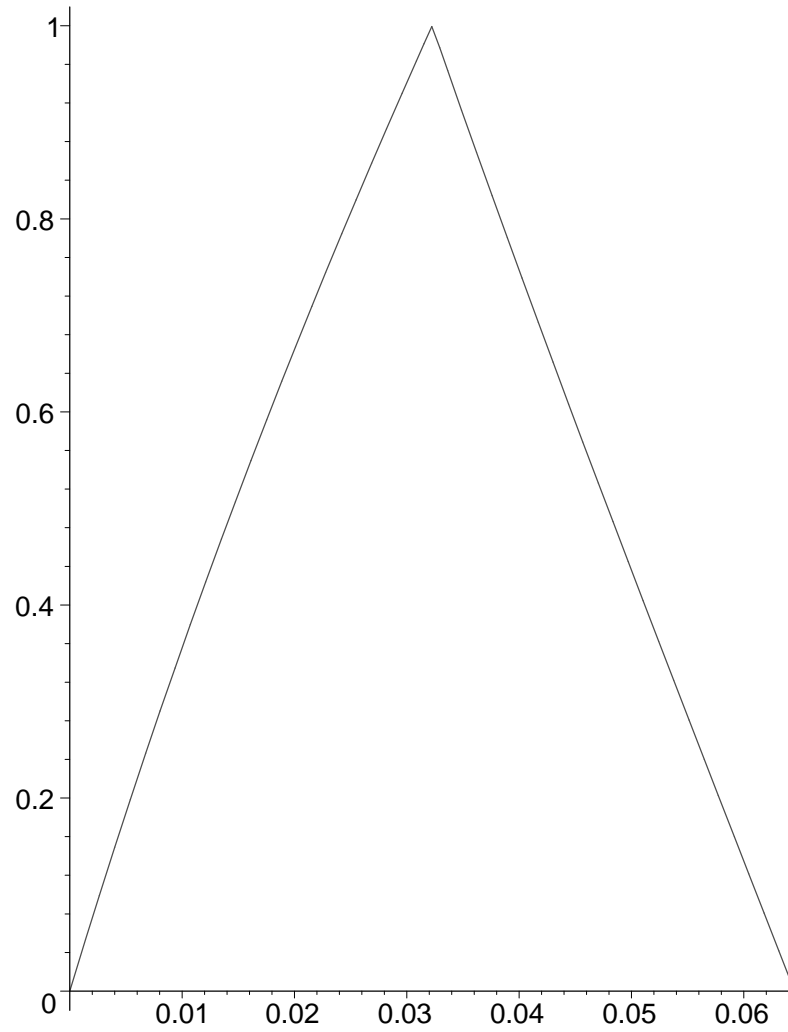


Fig. 14: Gráfico de ψ_1 com $\varepsilon = 1/4$ e $h = 1/32$.

Introdução aos EFMs

No caso oposto, quando ε é bem menor que h , temos que a função de base tem caráter oscilatório, como é mostrado a seguir, para $\varepsilon = 1/128$ e $h = 1/32$.

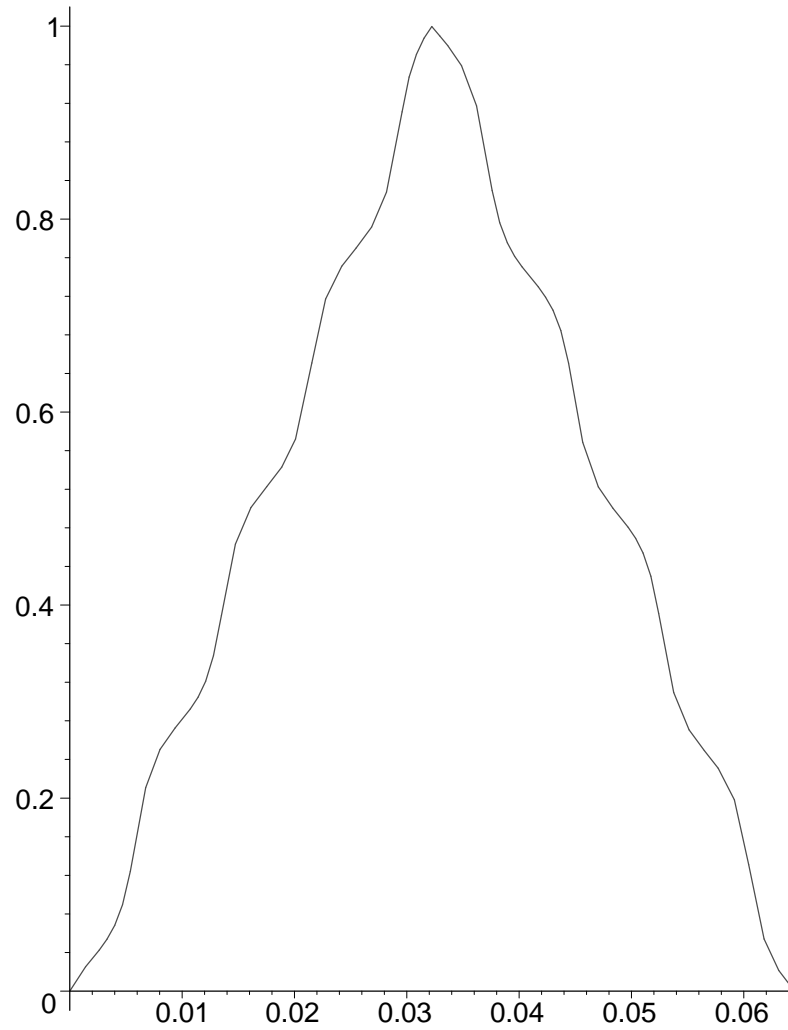


Fig. 15: Gráfico de ψ_1 com $\varepsilon = 1/128$ e $h = 1/32$.

Introdução aos EFMs

Usando o espaço acima definido, o método de elementos finitos multiescala busca $u^{h,\varepsilon} \in V_0^{h,\varepsilon}$ tal que

$$\int_0^1 \left(a(x/\varepsilon) \frac{du^{h,\varepsilon}}{dx}(x) \frac{dv^{h,\varepsilon}}{dx}(x) \right) dx = \int_0^1 f(x) v^{h,\varepsilon}(x) dx$$

para todo $v^{h,\varepsilon} \in V_0^{h,\varepsilon}$.

Introdução aos EFMs

Matricialmente, temos que se $u^{h,\varepsilon}(x) = \sum_{i=1}^N u_i^\varepsilon \psi_i(x)$, então

$\mathbf{u}^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, \dots, u_N^\varepsilon)^T \in \mathbb{R}^N$ é tal que

$$\mathbf{M}^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{f}^\varepsilon,$$

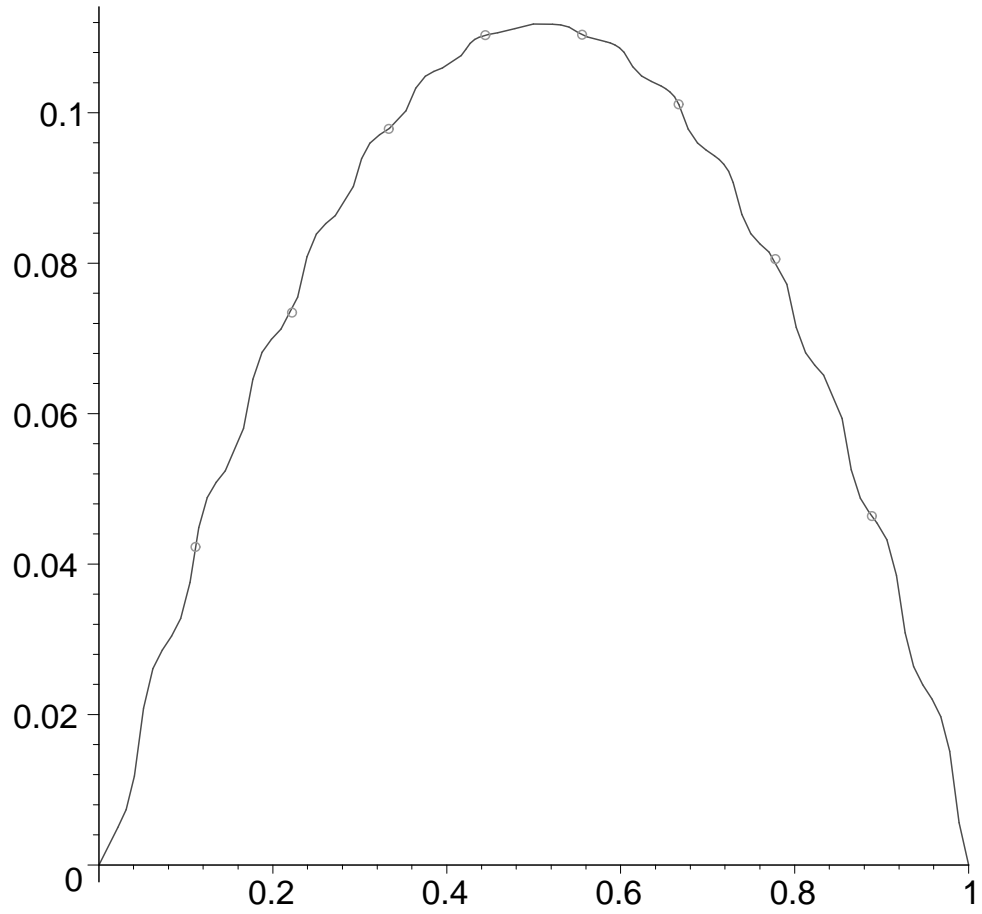
onde a matriz $\mathbf{M}^\varepsilon = (M_{i,j}^\varepsilon) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ e o vetor

$\mathbf{f}^\varepsilon = (f_1^\varepsilon, \dots, f_N^\varepsilon)^T \in \mathbb{R}^N$ são dados por

$$M_{i,j}^\varepsilon = \int_0^1 \left(a(x/\varepsilon) \frac{d\psi_i}{dx}(x) \frac{d\psi_j}{dx}(x) \right) dx, \quad f_j^\varepsilon = \int_0^1 f(x) \psi_j(x) dx.$$

Introdução aos EFMs

Testando então a aproximação para $\varepsilon = 1/16$ e $h = 1/10$, vemos na figura a seguir que a solução aproximada pelo método de elementos finitos multiescala interpola a solução exata nos nós. Isto não é uma coincidência, é apenas uma característica em uma dimensão de métodos de elementos finitos que utilizam funções que são soluções locais da própria EDP que estão aproximando. Em dimensões maiores essa propriedade é (infelizmente) perdida.



— exact solution
○ ○ ○ ○ ○ Multiscale finite element solution

Fig. 16: u^ε e sua aproximação, com $\varepsilon = 1/16$ e $h = 1/10$.

- Introdução: um modelo
- Solução homogeneizada
- Aproximação por Elementos Finitos Clássicos
- Elementos Finitos Multiescala

Introdução aos Elementos Finitos Multiescala

Análise de erro

Outros Comentários

- Uma dificuldade extra
- Conclusões

Análise de erro

A análise de erro baseia-se no Lema de Cea, como feito no caso de elementos finitos clássicos.

Lema (Lema de Cea). *Sejam u^ε e $u^{h,\varepsilon}$ soluções exata e por elementos finitos multiescala. Então existe uma constante c tal que*

$$\|u^\varepsilon - u^{h,\varepsilon}\|_{H^1(0,1)} \leq c \|u^\varepsilon - v^{h,\varepsilon}\|_{H^1(0,1)} \quad \text{para todo } v^{h,\varepsilon} \in V_0^{h,\varepsilon}.$$

Análise de erro

No método de elementos finitos clássico, encontramos uma função em V_0^h que “aproximava bem” u^ε e estimamos o erro de aproximação. No caso, a função em V_0^h era o interpolador de u^ε .

Utilizando o Lema de Cea obtivemos a estimativa final.

Similarmente, o desafio agora é achar uma aproximação para u^ε no espaço multiescala $V_0^{h,\varepsilon}$. A análise divide-se em dois casos distintos, dependendo se a malha é refinada o suficiente ou não, em relação ao parâmetro ε .

Análise de erro

Caso I: $h \ll \varepsilon$. Neste caso em que assumimos a malha suficientemente refinada, obtemos a seguinte resultado de convergência, que, a menos de constantes, é o mesmo que o do caso de elementos finitos clássico. Ou seja, para malhas refinadas, o *método multiescala funciona tão bem quanto o método tradicional.*

Teorema. *Sejam u^ε e $u^{h,\varepsilon}$ soluções exata e por elementos finitos multiescala. Então existe uma constante c independente de ε e f tal que*

$$\|u^\varepsilon - u^{h,\varepsilon}\|_{H^1(0,1)} \leq ch \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Análise de erro

O teorema acima segue facilmente do Lema de Cea e do seguinte resultado de interpolação.

Lema. *Seja u^ε solução exata, e seja $I^{h,\varepsilon}u^\varepsilon = \sum_{j=1}^N u^\varepsilon(x_j)\psi_j$ interpolador de u^ε em $V_0^{h,\varepsilon}$. Então existe uma constante c tal que*

$$\|u^\varepsilon - I^{h,\varepsilon}u^\varepsilon\|_{H^1(0,1)} \leq ch \|f\|_{L^2(0,1)}^2.$$

A constante c é independente de ε e f .

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}
& \alpha |u^\varepsilon - I^{h,\varepsilon} u^\varepsilon|_{H^1(x_{j-1}, x_j)}^2 \\
& \leq \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{d}{dx} (u^\varepsilon - I^{h,\varepsilon} u^\varepsilon) a(x/\varepsilon) \frac{d}{dx} (u^\varepsilon - I^{h,\varepsilon} u^\varepsilon) dx \\
& = - \int_{x_{j-1}}^{x_j} (u^\varepsilon - I^{h,\varepsilon} u^\varepsilon) \frac{d}{dx} \left[a(x/\varepsilon) \frac{d}{dx} (u^\varepsilon - I^{h,\varepsilon} u^\varepsilon) \right] dx \\
& = - \int_{x_{j-1}}^{x_j} (u^\varepsilon - I^{h,\varepsilon} u^\varepsilon) \frac{d}{dx} \left[a(x/\varepsilon) \frac{d}{dx} u^\varepsilon \right] dx = \int_{x_{j-1}}^{x_j} (u^\varepsilon - I^{h,\varepsilon} u^\varepsilon) f dx \\
& \leq \|u^\varepsilon - I^{h,\varepsilon} u^\varepsilon\|_{L^2(x_{j-1}, x_j)} \|f\|_{L^2(x_{j-1}, x_j)} \\
& \leq ch |u^\varepsilon - I^{h,\varepsilon} u^\varepsilon|_{H^1(x_{j-1}, x_j)} \|f\|_{L^2(x_{j-1}, x_j)},
\end{aligned}$$

pois a desigualdade de Poincaré nos dá que

$$\|v\|_{L^2(x_{j-1}, x_j)} \leq ch |v|_{H^1(x_{j-1}, x_j)} \text{ para todo } v \in H_0^1(x_{j-1}, x_j).$$

Temos então

$$|u^\varepsilon - I^{h,\varepsilon}u^\varepsilon|_{H^1(x_{j-1},x_j)} \leq ch\|f\|_{L^2(x_{j-1},x_j)}. \quad (4)$$

Para encontrar uma estimativa global, basta somar a desigualdade acima em todos os elementos:

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon - I^{h,\varepsilon}u^\varepsilon\|_{H^1(0,1)}^2 &\leq c|u^\varepsilon - I^{h,\varepsilon}u^\varepsilon|_{H^1(0,1)}^2 \\ &= c \sum_{j=1}^N |u^\varepsilon - I^{h,\varepsilon}u^\varepsilon|_{H^1(x_{j-1},x_j)}^2 \leq ch^2 \sum_{j=1}^N \|f\|_{L^2(x_{j-1},x_j)}^2 \\ &= ch^2 \|f\|_{L^2(0,1)}^2, \end{aligned}$$

onde usamos a estimativa de interpolação (4). Tirando raízes dos dois lados da equação acima obtemos o resultado. \square

Análise de erro

Caso II: $\varepsilon \ll h$. Mesmo quando ε é pequeno em relação à malha, e o método de elementos finitos lineares não funciona a contento, os elementos finitos multiescala aproximam bem a solução exata.

Abaixo apresentamos uma estimativa de erro.

Teorema. *Sejam u^ε e $u^{h,\varepsilon}$ soluções exata e por elementos finitos multiescala. Então existe uma constante c independente de ε e f tal que*

$$\|u^\varepsilon - u^{h,\varepsilon}\|_{H^1(0,1)} \leq C(\varepsilon h^{-1/2} + h) \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Análise de erro

Para estimar o erro de aproximação do presente método, temos que encontrar uma função em $V_0^{h,\varepsilon}$ que aproxime u^ε para então aplicar o Lema de Cea. Nosso candidato é u_I , interpolador da solução homogeneizada u^0 em $V_0^{h,\varepsilon}$. Note que no **Caso I** (quando $h \ll \varepsilon$), tomamos como candidato o interpolador de u^ε , diferentemente do que fazemos agora.

Para entender porque o método multiescala funciona bem quando $\varepsilon \ll h$, é preciso usar uma boa aproximação assintótica para u^ε .

Usamos então os primeiros termos da expansão assintótica de u^ε .

Análise de erro

De fato, seja u^0 a solução homogeneizada e H solução de

$$-\frac{d}{dy} \left(a(y) \frac{dH}{dy}(y) \right) = \frac{da}{dy}(y) \quad \text{em } (0, 1),$$

$$H \text{ periódica com período } 1, \quad \int_0^1 H(y) dy = 0.$$

Além disso, seja

$$u^1(x) = -H(x/\varepsilon) \frac{du^0}{dx}(x),$$

e θ tal que

$$-\frac{d}{dx} \left(a(x/\varepsilon) \frac{d\theta}{dx}(x) \right) = 0 \quad \text{em } (0, 1),$$

$$\theta(0) = u^1(0), \quad \theta(1) = u^1(1).$$

Análise de erro

Temos então o seguinte resultado [Moskow e Vogelius, 1997].

Teorema. *Assuma que $f \in L^2(0,1)$, e seja u^ε solução exata.*

Sejam u^0 , u^1 e θ como definidos anteriormente. Então existe uma constante c independente de f e de ε tal que

$$\|u^\varepsilon - u^0 - \varepsilon u^1 + \varepsilon \theta\|_{H^1(0,1)} \leq C\varepsilon \|u^0\|_{H^2(0,1)}.$$

Hou et al. [Hou, Wu, Cai, 1999] notaram que a expansão acima vale tanto para a solução exata como para os elementos da base de elementos finitos multiescala.

Logo, para $i = 1, \dots, N$ a função ψ_i pode ser aproximada por

$$\psi_i^0 + \varepsilon\psi_i^1 - \varepsilon\theta_i,$$

onde

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi_i^0 = 0 \quad \text{em } \cup_{j=1}^{N+1} (x_{j-1}, x_j), \quad \psi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

e $\psi_i^1 = H(x/\varepsilon)d\psi_i^0/dx$. Finalmente

$$-\frac{d}{dx} \left(a(x/\varepsilon) \frac{d\theta_i}{dx}(x) \right) = 0 \quad \text{em } \cup_{j=1}^{N+1} (x_{j-1}, x_j), \quad \theta_i(x_j) = \psi_i^1(x_j).$$

Observação. Note que no caso unidimensional, ψ_i^0 nada mais é que a função de base linear por partes ϕ_i .

Análise de erro

Seja u_I interpolador da solução homogeneizada u^0 em $V_0^{h,\varepsilon}$.

Como acima, u_I pode ser aproximado por $u_I^0 + \varepsilon u_I^1 - \varepsilon \theta_I$, onde

$u_I^0 = \sum_{i=1}^N u^0(x_i) \psi_i^0$, e $u_I^1 = H(x/\varepsilon) du_I^0/dx$. Além disso,

$$-\frac{d}{dx} \left(a(x/\varepsilon) \frac{d\theta_I}{dx}(x) \right) = 0 \quad \text{em } \cup_{j=1}^{N+1} (x_{j-1}, x_j), \quad \theta_I(x_j) = u_I^1(x_j).$$

Temos então que

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon - u_I\|_{H^1(0,1)} &\leq \|u^\varepsilon - u^0 - \varepsilon u^1 + \varepsilon \theta\|_{H^1(0,1)} + \|u^0 - u_I^0\|_{H^1(0,1)} \\ &\quad + \varepsilon \|u^1 - u_I^1\|_{H^1(0,1)} + \varepsilon \|\theta\|_{H^1(0,1)} + \varepsilon \|\theta_I\|_{H^1(0,1)} \\ &\quad + \|u_I - u_I^0 - \varepsilon u_I^1 + \varepsilon \theta_I\|_{H^1(0,1)} \end{aligned}$$

Análise de erro

A desigualdade

$$\|u^\varepsilon - u^0 - u^1 + \varepsilon\theta\|_{H^1(0,1)} \leq c\varepsilon\|u^0\|_{H^2(0,1)}$$

é apresentada no Teorema 1. Já

$$\|u_I - u_I^0 - u_I^1 + \varepsilon\theta_I\|_{H^1(0,1)} \leq c\varepsilon\|u^0\|_{H^2(0,1)}$$

baseia-se no Teorema 1 e em $\|u_I^0\|_{H^2(x_{j-1},x_j)} \leq c\|u^0\|_{H^2(x_{j-1},x_j)}$.

Usando que u_I^0 é a interpolação de u^0 por funções lineares por partes, obtemos

$$\|u^0 - u_I^0\|_{H^1(0,1)} \leq ch\|u^0\|_{H^2(0,1)}.$$

A seguir, usamos

$$\begin{aligned}
\|u^1 - u_I^1\|_{H^1(x_{j-1}, x_j)} &= \left\| H(\cdot/\varepsilon) \frac{d(u^0 - u_I^0)}{dx} \right\|_{H^1(x_{j-1}, x_j)} \\
&\leq \varepsilon^{-1} \left\| \frac{dH}{dx} \right\|_{L^\infty(0,1)} \|u^0 - u_I^0\|_{H^1(x_{j-1}, x_j)} \\
&\quad + \|H\|_{L^\infty(0,1)} \|u^0 - u_I^0\|_{H^2(x_{j-1}, x_j)} \\
&\leq c\varepsilon^{-1} \|u^0 - u_I^0\|_{H^1(x_{j-1}, x_j)} + c\|u^0\|_{H^2(x_{j-1}, x_j)}.
\end{aligned}$$

Somando o quadrado da desigualdade acima entre $j = 1$ e

$j = N + 1$ temos

$$\|u^1 - u_I^1\|_{H^1(0,1)} \leq c(\varepsilon^{-1}h + 1)\|u^0\|_{H^2(0,1)}.$$

Finalmente temos

$$\begin{aligned}\|\theta\|_{H^1(0,1)} &\leq c(|u^1(0)| + |u^1(1)|) \\ &\leq c\|H\|_{L^\infty(0,1)} \left(\left| \frac{du^0}{dx}(0) \right| + \left| \frac{du^0}{dx}(1) \right| \right) \leq c\|u^0\|_{H^2(0,1)},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\|\theta_I\|_{H^1(x_{j-1},x_j)}^2 &\leq \frac{c}{h} (|u_I^1(x_{j-1})| + |u_I^1(x_j)|)^2 \\ &\leq \frac{c}{h} \|H\|_{L^\infty(0,1)}^2 \left(\left| \frac{du_I^0}{dx}(x_{j-1}) \right| + \left| \frac{du_I^0}{dx}(x_j) \right| \right)^2 \leq \frac{c}{h} \|u^0\|_{H^2(x_{j-1},x_j)}^2.\end{aligned}$$

Somando a desigualdade acima entre $j = 1$ e $j = N + 1$, temos

$$\|\theta_I\|_{H^1(0,1)} \leq ch^{-1/2} \|u^0\|_{H^2(0,1)}.$$

Usando as desigualdades acima, obtemos o seguinte resultado.

Teorema. *Sejam u^ε e $u^{h,\varepsilon}$ soluções exata e por elementos finitos multiescala. Então existe uma constante c independente de ε e f tal que*

$$\|u^\varepsilon - u^{h,\varepsilon}\|_{H^1(0,1)} \leq C(\varepsilon h^{-1/2} + h)\|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Observação. *O resultado acima é melhor que o demonstrado em [Hou, Wu, Cai, 1999], onde a taxa de convergência alegada é*

$$\|u^\varepsilon - u^{h,\varepsilon}\|_{H^1(0,1)} \leq C_1 h \|f\|_{L^2(0,1)} + C_2 (\varepsilon/h)^{1/2}.$$

A diferença aparece nas estimativas de θ e θ_I , que é diferente em uma ou duas dimensões.

- Introdução: um modelo
- Solução homogeneizada
- Aproximação por Elementos Finitos Clássicos
- Elementos Finitos Multiescala

Introdução aos Elementos Finitos Multiescala

Análise de erro

Outros Comentários

- Uma dificuldade extra
- Conclusões

Outros Comentários

- Uma importante diferença entre uma e duas dimensões na técnica de elementos multiescala é que no caso bidimensional não é claro que condições de contorno deve-se impor nas arestas na definição das funções de base ψ_i . Em uma dimensão este problema não existe, já que não existe aresta.
- Uma primeira idéia seria impor ψ_i linear nas arestas. Nos artigos de Hou e colaboradores surge a proposta que as funções de base deveriam satisfazer uma “restrição unidimensional” do operador diferencial que define a EDP, ao longo das arestas.

- Esta proposta é *ad hoc*, assim como a definição do que é uma restrição unidimensional de um operador bidimensional, mas parece funcionar bem numericamente. A demonstração de convergência em [Hou, Wu, Cai, 1999] foi feita assumindo que as funções de base são lineares nas arestas.
- Ainda mais recentemente, Sangalli (2003) aplicou a idéia de *Residual Free Bubbles* em EDPs com coeficientes oscilatórios com excelentes resultados. A idéia é também fazer com que o método numérico automaticamente leve em conta as oscilações presentes, e guarda forte similaridades com o presente método.

Homogeneização e aproximação de equações elíticas (1 D)

- Introdução: um modelo
- Solução homogeneizada
- Aproximação por Elementos Finitos Clássicos
- Elementos Finitos Multiescala
- Uma dificuldade extra
- Conclusões

Uma dificuldade extra

Um outro problema que pode surgir quando tratamos de modelagem de meio heterogêneos, é a perda de coercividade.

Lembre-se que assumimos a existência de um número α tal que $a(x) \geq \alpha > 0$. Se α é muito pequeno, o problema torna-se mais difícil de ser tratado. Consideramos aqui o exemplo dado por $\varepsilon = 1/8$, e

$$a(x) = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(1 + \sin(2\pi x)) + \alpha, \quad \alpha = 0.01, \quad \beta = \frac{5}{2}.$$

Na figura a seguir, mostramos o gráfico de $a(\cdot/\varepsilon)$ e u^ε .

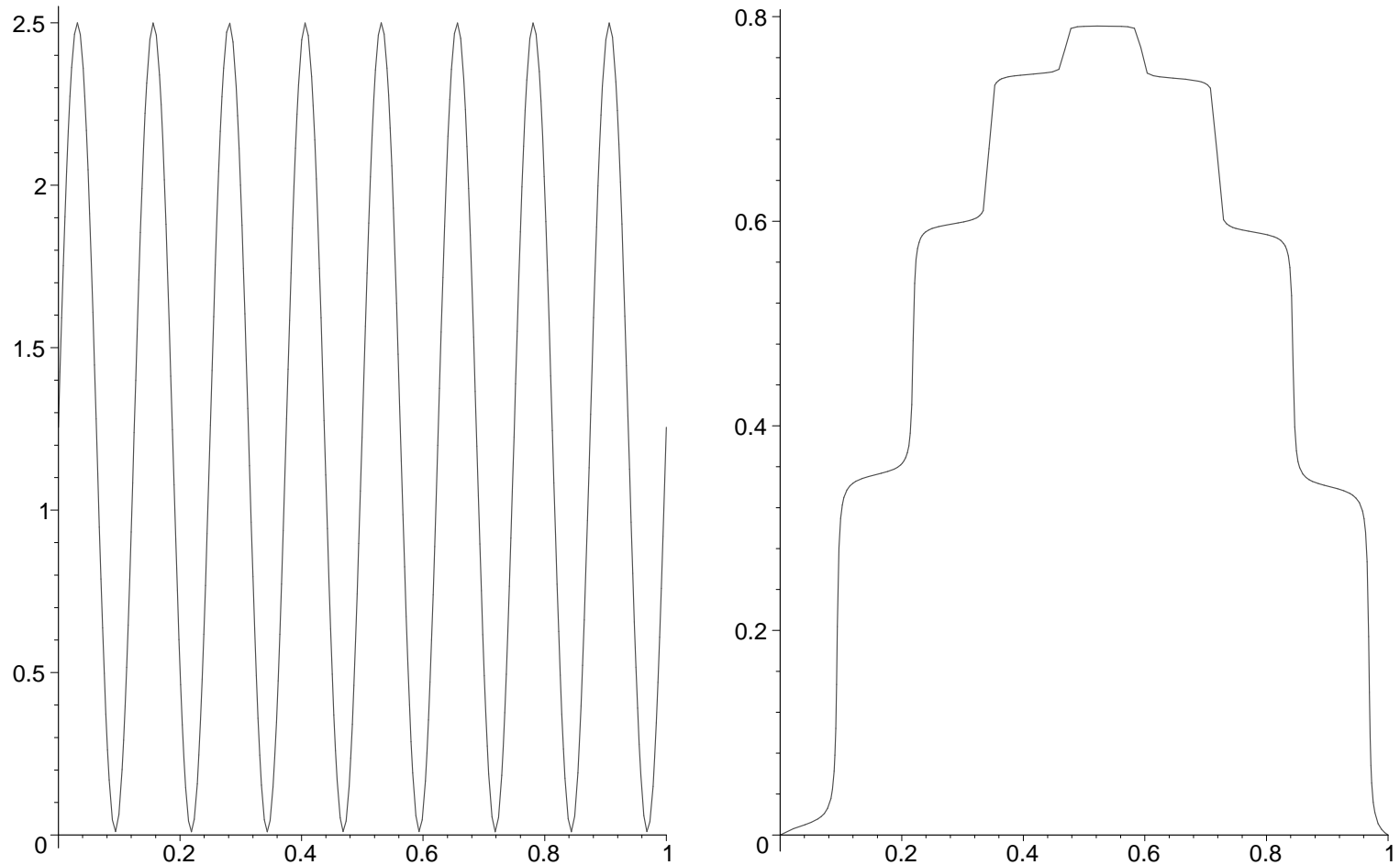


Fig. 17: Gráficos de $a(\cdot/\varepsilon)$ e da solução exata para $\varepsilon = 1/8$.

Uma dificuldade extra

Mesmo para ε pequeno a aproximação pela solução homogeneizada já não é satisfatória. Olhando-se a figura a seguir, percebe-se a deterioração da aproximação. Esta piora é prevista pelo seguinte resultado de convergência que leva a coercividade em consideração.

Teorema. *Seja $f \in L^2(0, 1)$, e seja u^ε solução exata e u^0 solução homogeneizada. Então existe uma constante c independente de ε , f , α tal que*

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{L^2(0,1)} \leq c \frac{\varepsilon}{\alpha} \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

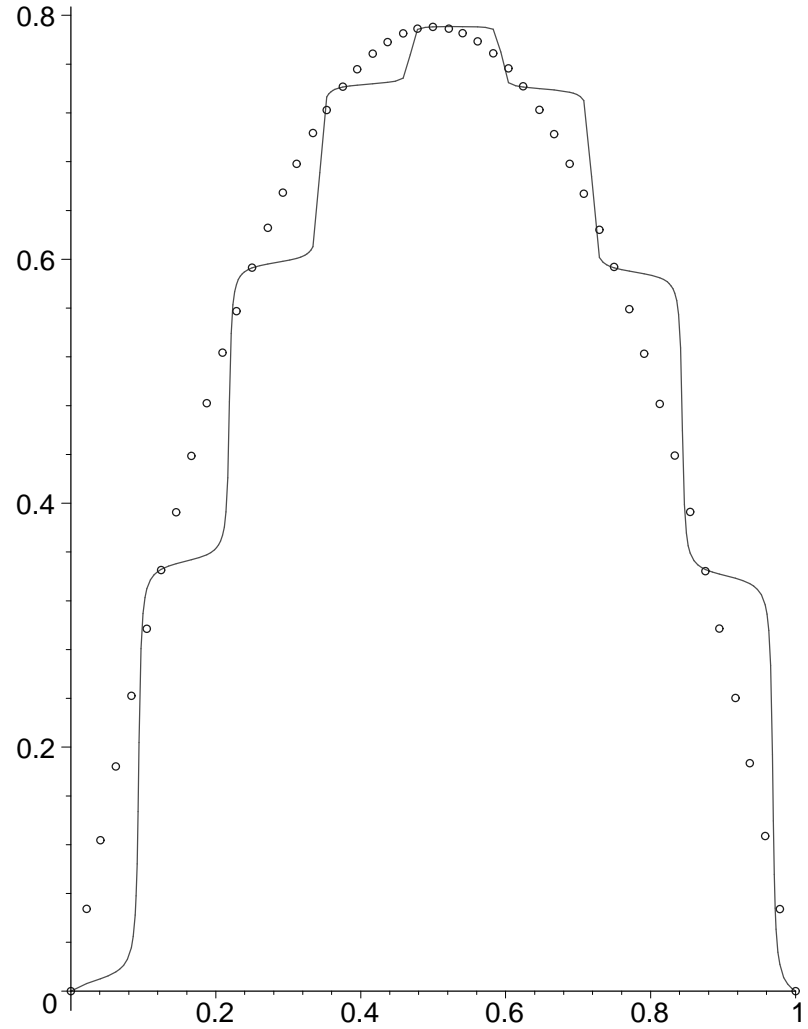


Fig. 18: Comparação entre as soluções exatas e homogeneizadas para $\varepsilon = 1/8$.

Uma dificuldade extra

Esta deterioração é ainda mais aparente se utilizarmos elementos finitos lineares, como mostra a figura a seguir.

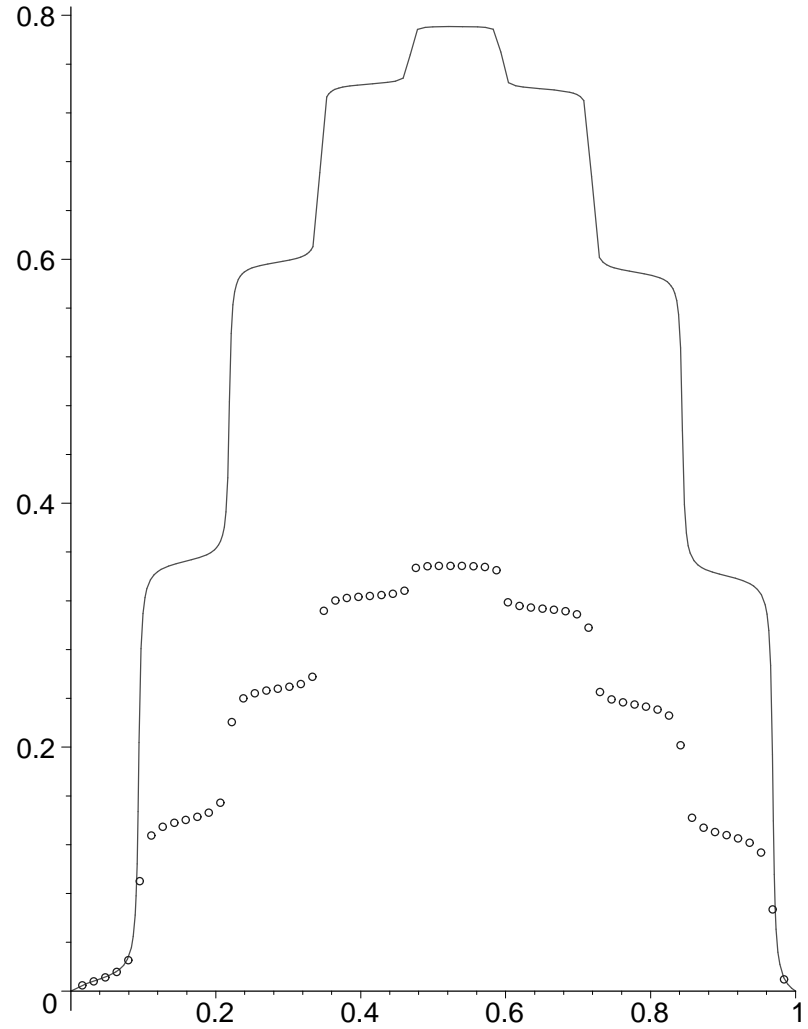


Fig. 19: Gráficos de u^ε e de sua aproximação por elementos finitos, com $\varepsilon = 1/8$ e $h = 1/64$.

Uma dificuldade extra

Note que, desta vez, a origem da dificuldade não é a magnitude de ε , mas sim a de α . De fato, mesmo para ε relativamente grande, a aproximação por elementos finitos falha. Na figura a seguir apresentamos um exemplo numérico para $\varepsilon = 1/2$ e $h = 1/64$.

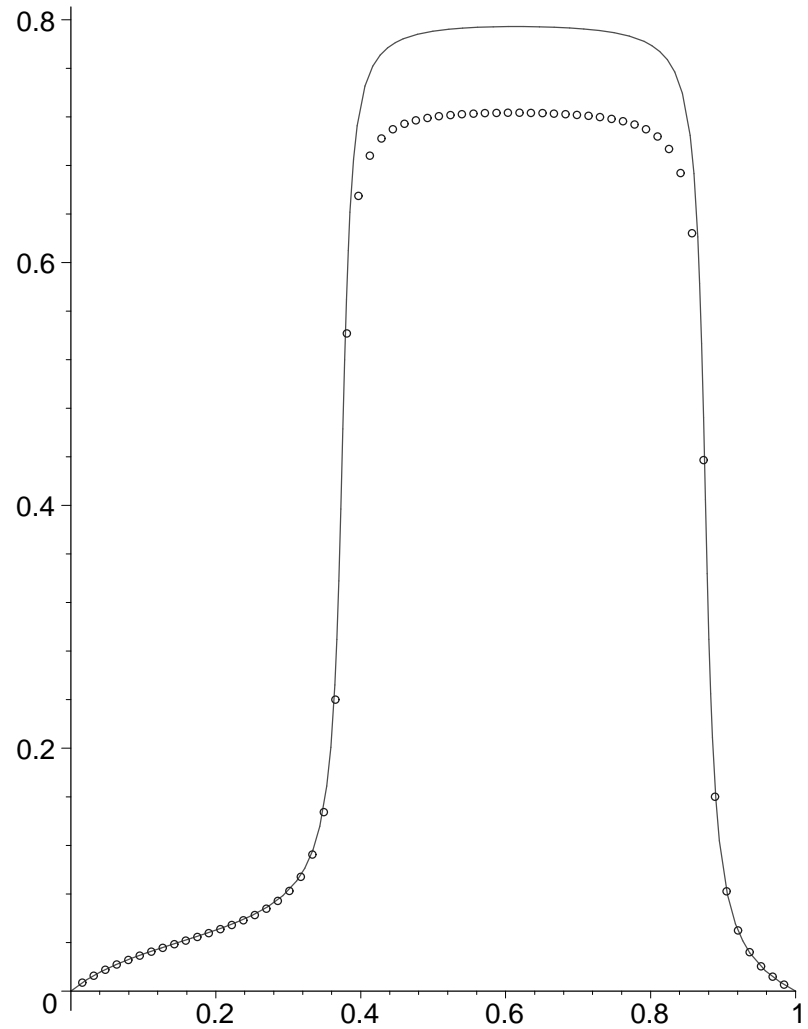


Fig. 20: Gráficos de u^ε e de sua aproximação por elementos finitos, com $\varepsilon = 1/2$ e $h = 1/64$.

Uma dificuldade extra

Mais uma vez esta piora era indicada por estimativas de erro. Um Teorema de convergência mostra que o erro é proporcional a α^{-3} .

Teorema. *Seja $f \in L^2(0,1)$, e sejam u^ε e u^h soluções exata e por elementos finitos. Então existe uma constante c independente de ε , f , α , tal que*

$$\|u^\varepsilon - u^h\|_{H^1(0,1)} \leq c \frac{1}{\alpha^3} \frac{h}{\varepsilon} \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Uma dificuldade extra

Finalmente, por manter a característica de interpolar a solução exata em uma dimensão, o método de elementos finitos multiescala não se degrada mesmo com α pequeno, como pode ser visto na figura a seguir.

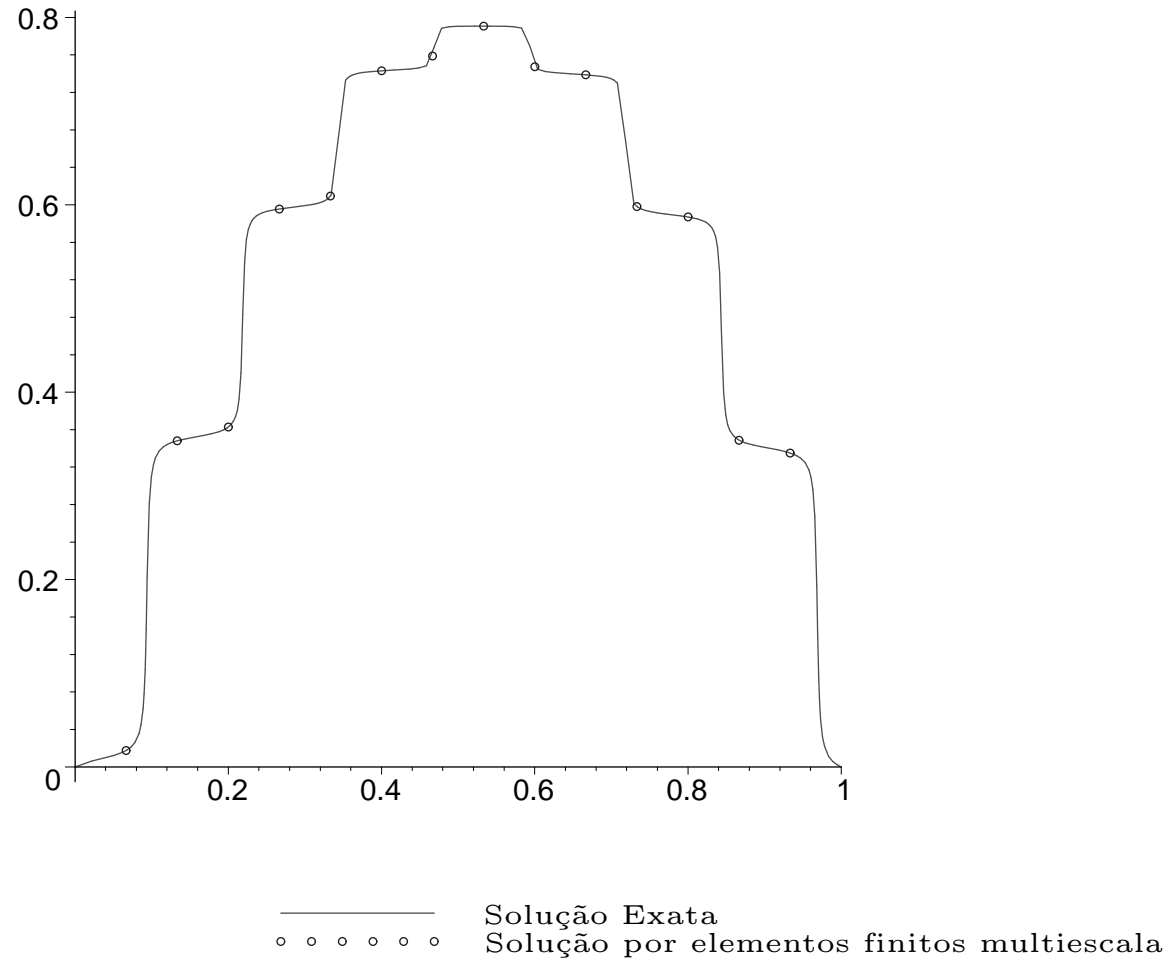


Fig. 21: Gráficos de u^ε e de sua aproximação por elementos finitos multiescala, com $\varepsilon = 1/8$ e $h = 1/16$.

Homogeneização e aproximação de equações elíticas (1 D)

- Introdução: um modelo
- Solução homogeneizada
- Aproximação por Elementos Finitos Clássicos
- Elementos Finitos Multiescala
- Uma dificuldade extra
- Conclusões

Conclusões

- Analisamos como aproximar soluções de equações diferenciais que têm coeficientes oscilatórios.
- Vimos que além da técnica usual de homogeneização, elementos finitos multiescala são uma boa opção numérica. Vimos também que os elementos finitos clássicos não aproximam bem a solução exata, e vimos o motivo.

- O problema com os elementos finitos clássicos está na escolha dos espaços de funções. Isto é superado com os elementos finitos multiescala, onde as funções “incorporam” as pequenas escalas presentes no problema.
- A análise de erro do método multiescala é sofisticada (principalmente em 2D). A grande (única) diferença para o caso de elementos finitos lineares está na estimativa de interpolação.
- As diferenças em uma e duas dimensões não são muitas. Em 2D, aparece o fenômeno de ressonância, quando $h \sim \varepsilon$. Isto é curado pelo Tom Hou et al. com “oversampling”.

- Mais recentemente, Tom Hou (2004) apresenta a idéia de usar método de Petrov–Galerkin. Esta idéia já está presente em [Franca, Madureira, Tobiska, Valentin, 2004], para um outro operador.
- Esta é uma ativa e promissora área de pesquisa. Tem vários aspectos a serem investigados tanto do ponto de vista de matemática como de aplicações.

FIM

Obrigado!