Matemática para o exame da ANPEC [1]

Alexandre L. Madureira

Jemy A. Mandujano Valle

Email address: alm@lncc.br, alexandre.madureira@fgv.br

Email address: jhimyunac@gmail.com

[1] 20 de setembro de 2022

Resumo. Estas notas de aula são relativas ao curso de preparação promovido pela FGV para a parte de matemática do exame da ANPEC. Estas notas devem servir de apoio, e certamente não eliminam a necessidade de se usar os já clássicos, aprimorados e vários livros didáticos. Mencionamos alguns deles na biliografia.

Neste curso apresento alguns tópicos de álgebra linear, cálculo e análise que estão presentes no exame da ANPEC, e que são importantes para uma formação mais sólida de futuros pós-graduandos em economia. Espero apresentar algum rigor matemático aos alunos, e mostrar como este deve ser utilizado em conjunto com a intuição matemática, nunca esquecendo o objetivo que é aprimorar a arte de resolver questões.

Uma particularidade das notas é que, ao fim destas há soluções de questões das provas da ANPEC de matemática dos últimos anos. Isto não seria possível sem a ajuda de vários ex-alunos, que gentilmente concordaram em apresentar suas soluções em TEX. Acho que estas soluções serão úteis para a grande comunidade de alunos que se prepara para os exames da ANPEC. Meus agradecimentos mais sinceros a todos!

Eu tomei a liberdade de modificar minimamente a notação usada em algumas das questões, a fim de torná-la homogênea e coincidir com as notações usadas nestas notas. Editei também minimamente as questões submetidas pelos alunos, a fim de tornar suas (deles) soluções mais próximas do estilo, linguagem e notações usadas no restante das notas.

São usadas estas notas várias ideias e notações de outros livros, como [**5**, **17**, **25**] em álgebra linear. A bibliografia básica sugerida pela ANPEC é dada por [**5**, **7**, **30**], e a complementar é [**2**, **11**, **12**, **17**, **36**].

Sumário

Os tópicos destas notas seguem a orientação da própria ANPEC. São eles:

(1) Noção de Conjunto

Relação de pertinência. Relação de inclusão, operações de interseção, união, diferença. Produto cartesiano. Relações.

(2) Noções de Geometria Analítica

Coordenadas no plano e no espaço. Fórmulas de distância. Vetores livres no plano e no espaço. Produto escalar, produto vetorial, perpendicularidade. Equações da reta no plano e no espaço, equações de planos. Inequações lineares. Parábola e hipérbole.

(3) Funções

Funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras. Representação gráfica. Soma, diferença, produto, quociente e composição de funções.

(4) Álgebra Linear

Operações com matrizes. Matriz inversa, transposta e adjunta. Resolução de sistemas lineares. Determinantes. Regra de Cramer. Espaços vetoriais. Subespaços. Base e dimensão. Produto interno, ortogonalidade. Projeções. Transformações lineares. Núcleo e imagem. Matriz de uma transformação linear. Autovalores e autovetores. Polinômios característicos operadores diagonalizáveis. Operadores auto-adjuntos, operadores ortogonais. Formas bilineares.

(5) Funções de uma variável real -

Limites. Funções contínuas. Funções deriváveis. Reta tangente e reta normal. Regras de derivação: derivada da soma, do produto, do quociente, regra da cadeia, derivada da inversa. Elasticidade. Derivadas sucessivas. Funções trigonométricas. Função exponencial e logarítmica. Regra de L'Hôpital. Intervalos de concavidade e convexidade. Ponto de inflexão. Polinômio de Taylor.

(6) Integrais

Teorema fundamental do cálculo, primitivação por partes e por substituição. Áreas planas. Integrais impróprias.

(7) Sequências e séries

Convergência e divergência de seqüências e séries. Série geométrica, teste da comparação, da razão, da raiz, teste da integral. Séries alternadas.

(8) Matemática financeira

Juros simples. Juros compostos. Desconto e taxa de desconto. Séries de pagamento. Fluxo de caixa. Sistema de amortização.

(9) Funções de várias variáveis reais

Derivadas parciais. Diferencial total. Gradiente. Regra da cadeia. Funções implícitas. Teorema do envelope. Funções homogêneas. Teorema de Euler. Condições de 1ª e 2ª ordens para máximos e mínimos de funções de várias variáveis reais. Condições de 1ª e 2ª ordens para otimização condicionada com restrições de igualdade e desigualdade. Integrais duplas. Mudança de variáveis em integrais duplas.

(10) Equações diferenciais e em diferenças

Equações lineares de 1ª ordem e equações lineares de 2ª ordem com coeficientes constantes. Sistema de duas equações lineares de 1ª ordem homogêneo com coeficientes constantes.

Parte 1

Revisão

CAPíTULO 1

Conjuntos e Funções

[1]

Neste primeiro capítulo relembramos algumas definições básicas de conjuntos e de definições de funções.

1.1. Definições básicas

Começamos por definir o conjunto vazio $\emptyset$ como sendo o conjunto que não contém nenhum elemento. Considere agora dois conjuntos quaisquer A e B.

- Dizemos que A está contido em B e escrevemos $A \subseteq B$ se todo elemento de A é elemento de B. Pode-se também escrever $B \supseteq A$ (lê-se B contém A) para indicar $A \subseteq B$.
- Se A não está contido em B escrevemos $A \not\subseteq B$.
- Dizemos que dois conjuntos A e B são iguais, e escrevemos $A = B$ se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.
- Se não forem iguais, dizemos que são diferentes e escrevemos $A \neq B$.
- Também escrevemos $A \subsetneq B$ se $A \subseteq B$ mas $A \neq B$. Dizemos neste caso que A está *propriamente* contido em B.

Para definir um conjunto, utilizamos alguma propriedade $P(x)$ que é verdadeira ou falsa para todo elemento $a \in U$ (onde U é um conjunto “universo”. Denotamos tal conjunto por

$$\{x \in A : \ P(x)\}.$$

Quando o conjunto U é claro pelo contexto, podemos escrever simplesmente $\{x : P(x)\}$. Este conjunto é formado por *todos os elementos* x que estejam em U e tais

[1]Última Atualização: 20/04/2022

que a propiedade $P(x)$ seja verdadeira. Uma última forma de denotar os conjuntos é simplesmente descrever seus elementos entre as chaves.

Por exemplo, o conjunto dos números pares pode ser denotado por

$$\{x \in \mathbb{Z} : x \text{ é divisível por } 2\}.$$

Pode-se ainda usar a *definição construtiva* $\{2x : x \in \mathbb{Z}\}$, ou, sendo um pouco menos formal, enumerar todos os elementos do conjunto: $\{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$.

O próximo passo é definir as operações usuais. Por exemplo, se U contém A e B, então definimos a união

$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Definimos também:

- O conjunto interseção entre A e B é $A \cap B = \{x \in A : x \in B\}$. Dizemos que dois conjuntos A e B são *disjuntos* se $A \cap B = \emptyset$.
- O conjunto diferença A menos B é $A \backslash B = \{x \in A : x \notin B\}$. O conjunto resultante também denotado por $A - B$ e chamado de complemento de B em relação à A.
- Quando é claro quem é o conjunto A, denotamos $A \backslash B$ por $\mathcal{C}(B)$, e o chamamos de complemento de B.

Observação 1.1. É fácil generalizar os conceitos acima para uniões e interseções arbitrárias de conjuntos. Por exemplo, dado $n \in \mathbb{N}$ e conjuntos $A_1, \dots, A_n$, definimos

$$\cup_{i=1}^n A_i = \{x : x \in A_i \text{ para algum } i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Outra forma é definir $I = \{1, \dots, n\}$ e escrever

$$\cup_{i=1}^n A_i = \cup_{i \in I} A_i = \{x : \text{existe } i \in I \text{ tal que } x \in A_i\}.$$

É simples generalizar o conceito acima para conjuntos $A_1, A_2, \dots,$ bastando para tal considerar $I = \mathbb{N}$:

$$\cup_{i=1}^\infty A_i = \cup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{x : \text{existe } i \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \in A_i\}.$$

Em termos de operações entre conjuntos, é útil a regra de *De Morgam*, que diz que para conjuntos E_n, onde $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\mathcal{C}(\cup_{i\in\mathbb{N}} E_n) = \cap_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{C}(E_n), \qquad \mathcal{C}(\cap_{i\in\mathbb{N}} E_n) = \cup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{C}(E_n). \tag{1.1.1}$$

Outro conceito útil é o de *par ordenado*. Dados dois elementos, ou objetos a e b, formamos o par (a, b), e chamamos a e b de (primeiro e segundo) componentes de (a, b). Dizemos (definimos) que um par ordenado é *igual* a outro se os respectivos componentes forem iguais, i.e., $(a, b) = (a', b')$ se $a = a'$ e $b = b'$. O mais importante na verdade, é como pares ordenados são formados (por elementos de dois conjuntos) e quando são iguais (quando os componentes são iguais).

Definimos agora *produtos cartesianos*. Dados dois conjuntos A e B, definimos o conjunto $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ como sendo o composto pelos pares ordenados.

Observação 1.2. A extensão destes conceitos para *n-úplas* ordenadas e produtos cartesianos com n conjuntos é natural.

Definição 1.1.1. *Seja agora um conjunto não vazio X e $\mathcal{P}(X)$ o* conjunto das partes de X*, i.e., a coleção contendo todos os subconjuntos de X:*

$$\mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}.$$

Outra notação para o conjunto das partes é 2^X.

Por exemplo, se $X = \{1, 2, 3\}$, então

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\}.$$

Outros exemplos são

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}, \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}.$$

1.2. Funções

Da definição de relação vem o importante conceito de função. Na "prática", dados dois conjuntos A e B, uma função é uma regra que associa a cada elemento $x \in A$, um elemento $f(x) \in B$. Chamamos o conjunto A de *domínio* da função f e o denotamos por $D(f)$. Chamamos o conjunto B de *contradomínio* da função f. Escrevemos $f : A \to B$, ou ainda

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Se $E \subseteq A$, chamamos de *imagem de E* ao conjunto

$$f(E) = \{f(x) : x \in E\}.$$

Similarmente, dado um conjunto H, chamamos de *imagem inversa de H* o conjunto

$$f^{-1}(H) = \{x : f(x) \in H\}.$$

Se $f(A) = B$ dizemos que f é *sobrejetiva* (ou simplesmente *sobre*). Dizemos que f é *injetiva* (ou *um a um* ou 1-1) quando, dados a, $a' \in D(f)$, se $f(a) = f(a')$ então $a = a'$. Numa forma mais compacta, escrevemos que para todo a, $a' \in D(f)$ temos

$$f(a) = f(a') \implies a = a'.$$

Se f é injetiva e sobre, a chamamos de *bijetiva* (ou de *biunívoca*) ou de uma *bijeção.*

Dado $f : A \to B$ e um subconjunto $A' \subseteq A$, podemos definir a *função restrição* $g = f|_{A'}$ onde $g : A' \to B$ é dada por $g(a') = f(a')$ para todo $a' \in A'$. Da forma análoga, dizemos que $h : A'' \to B$ é uma *extensão* de f se $A \subseteq A''$ e $h(a) = f(a)$ para todo $a \in A$.

Existem várias operações com funções, entre elas a composição. Sejam A, B e C conjuntos, e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções. Então podemos definir uma função $h : A \to C$ dada pela *composição* de f e g, i.e., $h(x) \stackrel{\text{def}}{=} g(f(x))$, onde $x \in A$. Neste caso usamos a notação $h = g \circ f$, e dizemos que h é a composta da f com a g.

Dizemos que $g : B \to A$ é *função inversa* de f se

$$g(f(x)) = x \quad \text{para todo } x \in A, \qquad f(g(y)) = y \quad \text{para todo } y \in B.$$

Quando esta existir, denotamos a inversa de f por f^{-1}.

A seguir nos concentramos sobre a importante questão da *existência de uma função inversa*. Considerando $f : A \to B$, note que se f não for sobrejetiva, não existirá uma inversa f^{-1}. De fato, se existe $b \in B$ tal que $f(a) \neq b$ para todo $a \in A$, então $f(g(b)) \neq b$ para qualquer função $g : B \to A$. De forma análoga, se f não for injetiva, i.e., se existirem $a \neq a'$ em A tais que $f(a) = f(a') = b \in B$, entao não é possível definir $g(b)$ tal que $g(f(a)) = a$ e $g(f(a')) = a'$. Estes argumentos mostram que sobrejetividade e injetividade são condições *necessárias* para a existência de inversa. Na verdade, estas condições são também equivalentes, como nos mostra o lema abaixo.

Lema 1.2.1. Sejam A e B conjuntos e considere a função $f : A \to B$. Então f é invertível se e somente se é sobrejetiva e injetiva.

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponha que f seja invertível, e denote $g = f^{-1} : B \to A$. Sejam $a, a' \in A$ tais que $f(a) = f(a')$. Então $a = g(f(a)) = g(f(a')) = a'$. Logo f é injetiva.

Seja agora $b \in B$, e seja $a = g(b)$. Então $f(a) = f(g(b)) = b$, e portanto f é sobre.

($\Longleftarrow$) Suponha agora f uma bijeção, i.e., sobrejetiva e injetiva. Logo, dado $b \in B$, existe um único $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Defina então $g(b) = a$. Note que $f(g(b)) = f(a) = b$ e $g(f(a)) = g(b) = a$. Como b é arbitrário, definimos a função $g : B \to A$. $\square$

Exemplo 1.1. Seja $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + 1$. Então f não tem inversa pois, apesar de ser injetiva, não é sobrejetiva. Mas como $f\big((0, 1)\big) = (1, 2)$, então se definirmos

$$\begin{aligned} f : (0,1) &\to (1,2) \\ x &\mapsto x^2, \end{aligned}$$

então teremos f sobrejetiva. Logo existe a inversa $f^{-1} : (1,2) \to (0,1)$.

Observação 1.3. Note que a definição de *imagem inversa* independe de existir ou não a função inversa. Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ não tem inversa. Entretanto $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Exemplo 1.2. Seja

$$\begin{aligned} f :&(0,4) \to \mathbb{R} \\ &x \mapsto \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Então o domínio é $(0,4)$ e a imagem é $(0,2)$. Note que f não é invertível pois f não é sobrejetiva. Entretanto as imagens inversas

$$f^{-1}\big((1,2)\big) = (1,4), \qquad f^{-1}(\{2\}) = \{4\}, \qquad f^{-1}\big([-2,0)\big) = \emptyset, \qquad f^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

são bem-definidas.

Observação 1.4. Note que algumas vezes podemos "tornar" uma função não invertível em invertível, restringindo o domínio ou o contradomínio. Por exemplo, suponha $f : A \to B$ injetiva, mas não sobrejetiva. Podemos definir então $g : A \to f(A)$ tal que $g(a) = f(a)$ para todo $a \in A$. Então g será injetiva e sobrejetiva (mostre isto).

De forma análoga, se $h : A \to B$ for sobrejetiva mas não injetiva, podemos definir uma nova função injetiva da seguinte forma. Para cada $b \in B$ escolha um único $\hat{a} \in A$ tal que $f(\hat{a}) = b$ (isto é possível pois f é sobre) e forme o conjunto $\hat{A} \subset A$. Então $\hat{f} : \hat{A} \to B$ é injetiva e sobre (mostre isto). E é, portanto, invertível.

Outra operação que pode ser muitas vezes executada é soma, diferença, produto, divisão, de funções. Por exemplo, sejam A conjunto e $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : A \to \mathbb{R}$ funções. Então podemos definir a função $h = f + g$ tal que

$$h(x) = f(x) + g(x) \text{ para todo } x \in A.$$

Da mesma forma podemos definir fg por $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Outras operações são definidas analogamente.

Temos que tomar cuidado entretanto se a definição faz sentido. Por exemplo, se $f : A \to \mathbb{R}$ se anula em algum ponto de A, então não podemos definir $\phi : A \to \mathbb{R}$ por $\phi(x) = 1/f(x)$. Igualmente, não faz sentido definir $1/g$, se $g : A \to \mathbb{R}^n$, para $n > 1$, pois não podemos dividir por vetores.

Observação 1.5. A visualização de algumas funções é possível, via gráficos. O gráfico de uma função real definida na reta é simplesmente o conjunto de pontos (x, y) do plano que satisfazem $y = f(x)$.

1.3. Conjuntos finitos e infinitos

Um conjunto B é *finito* se é vazio ou se existe uma bijeção entre B e

$$I_n = \{1, 2, \cdots, n\}$$

para algum $n \in \mathbb{N}$. Caso B não seja finito, o dizemos *infinito*. Consideraremos a seguir propriedade de conjuntos finitos, e depois de conjuntos infinitos.

1.3.1. Conjuntos finitos. Por definição, para mostrar que um conjunto é finito, é necessário achar uma bijeção com I_n, para algum $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.3. O conjunto $\{2, 3, 4, 5\}$ é finito pois a função $\phi : \{1, 2, 3, 4\} \to \{2, 3, 4, 5\}$ dada por $\phi(1) = 2$, $\phi(2) = 3$, $\phi(3) = 4$, $\phi(4) = 5$ é uma bijeção.

Exemplo 1.4. O conjunto I_n é finito para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dado um conjunto finito, podemos definir o *número de elementos* ou *cardinalidade* do conjunto, como abaixo.

Definição 1.3.1. *Se existir bijeção $\phi : I_n \to X$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então X é finito (por definição) e definimos a* cardinalidade *de X como sendo n. Denotamos a cardinalidade de X por* $\operatorname{card}(X)$ *(ou ainda $\#X$ ou $|X|$). Para conjuntos vazios, definimos* $\operatorname{card}(\emptyset) = 0$.

Exemplo 1.5. Sejam X e Y conjuntos e $f : X \to Y$ bijeção entre eles. Então X é finito se e somente se Y o for. Nestes casos, eles têm a mesma cardinalidade.

LEMA 1.3.2. Seja X finito. Então não existe bijeção entre X e $Y \subsetneq X$ (i.e., para X finito, se existir bijeção entre X e $Y \subseteq X$ então $X = Y$).

O resultado a seguir garante que não podemos ter conjuntos infinitos contidos em conjuntos finitos.

TEOREMA 1.3.3. *Suponha X conjunto finito e $Y \subseteq X$. Temos então que*

i) Y *é finito*

ii) $\operatorname{card}(Y) \leq \operatorname{card}(X)$

iii) se $\operatorname{card}(Y) = \operatorname{card}(X)$, *então* $Y = X$

COROLÁRIO 1.3.4. Seja Y conjunto finito e $f : X \to Y$ injetiva. Então X é finito e $\operatorname{card}(X) \leq \operatorname{card}(Y)$.

DEMONSTRAÇÃO. Como $f(X) \subseteq Y$, então $f(X)$ é finito. Como $f : X \to f(X)$ é bijeção, então X é finito. Finalmente, $\operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(f(X)) \leq \operatorname{card}(Y)$. □

COROLÁRIO 1.3.5. Seja X conjunto finito e $g : X \to Y$ sobrejetiva. Então Y é finito e $\operatorname{card}(Y) \leq \operatorname{card}(X)$.

DEMONSTRAÇÃO. Como $g : X \to Y$ é sobrejetiva, então existe $f : Y \to X$ injetiva tal que $g \circ f : Y \to Y$ e $g(f(y)) = y$ para todo $y \in Y$. Pelo corolário acima, X finito implica em Y finito e $\operatorname{card}(Y) \leq \operatorname{card}(X)$. □

1.3.2. União e produto cartesiano de conjuntos finitos. Discutimos a seguir resultados a respeito da união e produtos cartesianos de conjuntos finitos. Começamos por discutir uniões finitas de conjuntos finitos. A seguir consideramos propriedades de produtos cartesianos finitos de conjuntos finitos.

TEOREMA 1.3.6. *Seja X e Y conjuntos finitos disjuntos. Então $X \cup Y$ é finito e* $|X \cup Y| = |X| + |Y|$.

LEMA 1.3.7. Se $Y_1, \dots, Y_k$ são finitos (não necessariamente disjuntos), então $Y_1 \cup \cdots \cup Y_k$ é finito e $|Y_1 \cup \cdots \cup Y_k| \leq |Y_1| + \dots |Y_k|$.

LEMA 1.3.8. Se $X_1, \dots, X_k$ são conjuntos finitos, então $X_1 \times \cdots \times X_k$ é finito e $|X_1 \times \cdots \times X_k| = |X_1| \dots |X_k|$.

1.3.3. Conjuntos infinitos. Para mostrar que um conjunto é infinito, é preciso provar que não existe bijeção com I_n, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.6. $\mathbb{N}$ e $P = \{2j : j \in \mathbb{N}\}$ são infinitos.

Note os seguintes resultados:

i) X infinito e $f : X \to Y$ injetiva implica em Y infinito
ii) Y infinito e $f : X \to Y$ sobre implica em X infinito
iii) Se $X \subsetneq Y$ e $f : X \to Y$ é bijeção, então X e Y são infinitos

Exemplo 1.7. Os conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são infinitos, pois as funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(i) = i$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ dada por $g(i) = i$ são injetivas.

1.4. Exercícios

Exercício 1.1. Mostre que

(1) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0\} = \mathbb{R}$.
(2) $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \subsetneq \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0\}$.
(3) $\mathbb{R} \not\subseteq \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0\}$.

Exercício 1.2. Mostre a regra de *De Morgam* dada em (1.1.1).

Exercício 1.3. Mostre que $\{a, a\} = \{a\}$.

Exercício 1.4. Sejam A e B dois conjuntos disjuntos, i.e., $A \cap B = \emptyset$. Seja $X = A \cup B$. Mostre que $A = X \backslash B$ e $B = X \backslash A$.

Exercício 1.5. Sejam A e B dois conjuntos, e $C = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$. Mostre que $C = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$ e que $C \cap A \cap B = \emptyset$.

Exercício 1.6. Sejam $X_1, X_2, \ldots,$ conjuntos tais que $X_i \subseteq X_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Mostre que $\cap_{i \in \mathbb{N}} X_i = X_1$.

Exercício 1.7. Sejam A, B e C conjuntos. Mostre que $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ e $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Exercício 1.8. Sejam A, B, C e D conjuntos. Mostre que $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$. Mostre que, em geral, a inclusão não é própria.

Exercício 1.9. Sejam A, B conjuntos e $f : A \to B$ bijeção. Se $f^{-1} : B \to A$ for a função inversa de f, mostre que f^{-1} é bijeção.

Exercício 1.10. Sejam A, B e C conjuntos e $f : A \to B$, $g : B \to C$ bijeções. Mostre que a função composta $g \circ f : A \to C$ dada por $g \circ f(x) = g(f(x))$ é bijeção. Se f^{-1} e g^{-1} forem as funções inversas de f e g, quem é $(g \circ f)^{-1}$? Justifique suas conclusões.

Exercício 1.11. Seja A um conjunto e $f : A \to B$ injetiva. Mostre que a função $f : A \to f(A)$ é bijeção.

Exercício 1.12. Seja $g : X \to Y$ sobrejetiva. Mostre que existe $f : Y \to X$ tal que $g \circ f(y) = y$ para todo $y \in Y$.

Exercício 1.13. Mostre que a afirmativa do Exemplo 1.5 é verdadeira.

Exercício 1.14. Seja X conjunto finito. Mostre que $f : X \to X$ é injetiva se e somente se é sobrejeção.

Exercício 1.15. Demonstre o Teorema 1.3.6.

Exercício 1.16. Sejam os conjuntos A infinito e $B \neq \emptyset$ finito, e considere uma função $f : A \to B$. Mostre que existe $b \in B$ tal que $f^{-1}(\{b\})$ é infinito.

CAPíTULO 2

Noções de geometria analítica

[1]

Neste capítulo falaremos sobre noções como coordenadas, distância, vetores, produtos escalar e vetorial, perpendicularidade, equações da reta no plano e espaço, equações de planos, inequações lineares, parábolas, hipérboles. Uma boa referência é **[32]**

Consideraremos o $\mathbb{R}^n$ o como o conjunto das n-úplas ordenadas de números reais, como definido abaixo.

DEFINIÇÃO 2.0.1. *Seja $\mathbb{R}^n$ o conjunto das n-úplas ordenadas de números reais, i.e,*

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \text{ para } i = 1, \dots, n\}.$$

Definimos então as operações produto por escalar e soma da seguinte forma:

$$\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n), \qquad \mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

onde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ estão em $\mathbb{R}^n$, e $\alpha \in \mathbb{R}$. Pode-se checar que $\mathbb{R}^n$ é espaço vetorial com as operações acima descritas.

2.1. Coordenadas

Seja $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ base conônica do $\mathbb{R}^n$, onde, para $i \in \{1, \dots, n\}$, o vetor $\mathbf{e}_i$ é definido tal que a iésima coordenada vale um e as demais coordenadas valem zero, i.e.,

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1).$$

[1]Última Atualização: 27/04/2022

Chamamos este vetores de *vetores da base canônica*. Note que podemos escrever um ponto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ como $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$. Neste caso, $x_1, \ldots, x_n$ são as *coordenadas de* $\mathbf{x}$ *na base canônica*.

Existe uma identificação natural dos pontos em $\mathbb{R}^n$ com suas coordenadas na base canônica. Usaremos neste texto a seguinte notação. Para cada $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, indicaremos por $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ a matriz coluna das coordenadas na base canônica dada por

$$\vec{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{2.1.1}$$

Na verdade não seremos tão preciosistas e escreveremos que $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ também.

2.2. Distância, norma, produtos escalar e vetorial

Dados dois vetores $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ do $\mathbb{R}^2$, a distância $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ entre eles é dada pelo "tamanho" do vetor $\mathbf{x} - \mathbf{y} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2)$. Para medir tamanho de vetores, usamos a noção de *norma*. No $\mathbb{R}^2$, definimos a norma de um vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ por

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Esta é a *norma euclidiana*, que no caso mais geral, em $\mathbb{R}^n$, é dada por

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Voltando ao conceito de distância, temos que a distância entre dois pontos do $\mathbb{R}^2$ dados por $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ é dada por

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

EXEMPLO 2.1. Considere o vetor $(3, 4)$. Então $\|(3, 4)\| = \sqrt{9 + 16} = 5$.

Em $\mathbb{R}^2$, se $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, e $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, o produto interno canônico é dado por

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \vec{\mathbf{x}}^T \vec{\mathbf{y}} = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Em $\mathbb{R}^n$, para $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, definimos

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \vec{\mathbf{x}}^T \vec{\mathbf{y}} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Note que podemos definir as normas euclidianas usando o produto interno

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \tag{2.2.1}$$

Da desigualdade de Cauchy–Schwartz obtemos a desigualdade triangular:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \tag{2.2.2}$$

sempre que $\|\cdot\|$ for dada por (2.2.1).

Finalmente, dados dois vetores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ do $\mathbb{R}^n$, definimos o cosseno do ângulo formado por eles por **[32]**

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}. \tag{2.2.3}$$

Dizemos então que dois vetores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ são ortogonais, ou perpendiculares, se $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$. Note que devido à desigualdade de Cauchy-Schwartz (3.6.1), o cosseno toma sempre valores entre -1 e 1.

2.3. Projeção de vetores

Considere os vetores dados por $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Definimos a projeção ortogonal de $\mathbf{x}$ em $\mathbf{y}$ como sendo o vetor $\mathbf{w} = \alpha \mathbf{y}$ tal que $\mathbf{x} - \mathbf{w}$ é ortogonal a $\mathbf{y}$. Logo

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \alpha \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} \implies \alpha = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^2} = \frac{\|\mathbf{x}\| \cos\theta}{\|\mathbf{y}\|}.$$

2.4. A reta no plano e espaço

2.4.1. A reta no plano. Uma reta r no plano pode ser definida de algumas maneiras, principalmente:

(1) Parametrização: dado um ponto $\mathbf{x}_0$ da reta, e a uma direção $\mathbf{v} \neq (0,0)$ dada, a reta r pode ser parametrizada por

$$r = \{\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v} : t \in \mathbb{R}\}.$$

(2) Equação algébrica: uma reta r pode ser descrita pelo conjunto de pontos (x, y) que satisfazem

$$ax + by + c = 0,$$

onde ou a ou c são diferentes de zero.

É importante saber passar da forma (1) para a forma (2), e vice-versa.

Suponha que uma reta r seja dada por (1), onde $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \neq (0, 0)$, i.e., que

$$(x_0, y_0) + t(v_1, v_2)$$

seja uma parametrização de r. Então qualquer ponto (x, y) pode ser dado por

$$x = x_0 + tv_1, \qquad y = y_0 + tv_2$$

para algum $t \in \mathbb{R}$. Multiplicando a primeira equação por v_2, a segunda por v_1 e tirando a diferença obtemos

$$v_2 x - v_1 y + c = 0, \tag{2.4.1}$$

onde $c = v_1 y_0 - v_2 x_0 = (x_0, y_0) \cdot (-v_2, v_1)$.

Uma outra forma (mais simples) é perceber que se (x, y) é ponto da reta, então $(x - x_0, y - y_0)$ tem a mesma direção de (v_1, v_2). Como $(v_2, -v_1)$ é ortogonal a (v_1, v_2), então $(x - x_0, y - y_0)$ também o é. Logo

$$(x - x_0, y - y_0) \cdot (v_2, -v_1) = 0. \tag{2.4.2}$$

As equações (2.4.1) e (2.4.2) são idênticas.

De forma análoga, se uma reta r no plano é determinada por $ax + by + d = 0$, onde a e b não são simultaneamente nulos, então obtemos de (2.4.1) que (a, b) é vetor perpendicular à r e que $\mathbf{v} = (b, -a)$ é direção da reta.

Observação 2.1. Vemos portanto que em duas dimensões, podemos escrever a reta via parametrização ou usando as equações cartesianas, e que de uma forma obtemos a outra.

Observação 2.2. Note que se $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ são dois pontos de r, então $\mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ determina a direção da reta.

EXEMPLO 2.2. Seja r_1 reta dada por

$$r_1 = \{(1,2) + t(3,-1) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Ache r_2 passando por $(1,1)$ e paralela à r_1.

Solução. Como r_2 é paralela à r_1, ambas têm a mesma direção, que no caso é $(3,-1)$. Como $(1,1) \in r_2$, então $r_2 = \{(1,1) + t(3,-1) : t \in \mathbb{R}\}$.

EXEMPLO 2.3 (ângulo entre retas). Determine o ângulo entre as retas dadas por $y = ax + b$ e $y = cx + d$.

Solução. A primeira reta é determinada por $ax - y + b = 0$, e então o vetor $(a,-1)$ é perpendicular a ela. Então a reta tem a direção de $(1,a)$. De forma análoga, a segunda reta tem a direção de $(1,c)$. Portanto, se θ é o ângulo entre as duas retas, temos que

$$|\cos\theta| = \frac{|(1,a)\cdot(1,c)|}{\|(1,a)\|\|(1,c)\|} = \frac{|1+ac|}{\sqrt{(1+a^2)(1+c^2)}}$$

Note que pode ser conveniente utilizar como resposta $\pi - \theta$.

EXEMPLO 2.4 (distância de ponto a reta). A distância d entre um ponto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ e a reta r determinada por $ax + by + c = 0$ é dada por

$$d = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{2.4.3}$$

Solução. Sem perda de generalidade, suponha $b \neq 0$. Sabemos que r tem direção $\mathbf{v} = (b,-a)$. Seja $\mathbf{q} \in r$ tal que $\mathbf{p}-\mathbf{q}$ seja perpendicular a $\mathbf{v}$. Portanto $\mathbf{p}-\mathbf{q} = \alpha(a,b)$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$, e a distância é dada por

$$d = \|\mathbf{p}-\mathbf{q}\| = |\alpha|(b^2+a^2)^{1/2}.$$

Como $\mathbf{q} \in r$, então

$$bq_2 = -aq_1 - c, \qquad p_1 - q_1 = a\alpha, \qquad p_2 - q_2 = b\alpha.$$

e obtemos da segunda, terceira e primeira equações:

$$q_1 = p_1 - \frac{a}{b}(p_2 - q_2) = p_1 - \frac{a}{b}p_2 + \frac{a}{b^2}(-aq_1 - c) = p_1 - \frac{a}{b}p_2 - \frac{a^2}{b^2}q_1 - \frac{ac}{b^2}$$

Portanto $q_1 = (p_1 - ap_2/b - ac/b^2)/(1 + a^2/b^2)$. Logo, da segunda equação,

$$-a\alpha = -p_1 + q_1 = -p_1 + \frac{b^2(p_1 - ap_2/b - ac/b^2)}{b^2 + a^2} = -\frac{p_1 a^2 + abp_2 + ac}{b^2 + a^2}$$

Se $a \neq 0$, temos $\alpha = (p_1 a + p_2 b + c)/(b^2 + a^2)$, e portanto a distância é dada por (2.4.3).

Note que pelas contas acima, se $a = 0$, como $b \neq 0$ então $q_1 = p_1$ e $q_2 = -c/b$. Então

$$\alpha = \frac{p_2}{b} + \frac{c}{b^2} \implies d = |\alpha b| = |p_2 + c/b|$$

e a fórmula (2.4.3) se aplica mesmo neste caso.

2.4.2. A reta no espaço. Em $\mathbb{R}^3$, a reta é dada de forma parametrizada, i.e., dado um ponto $\mathbf{x}_0$ da reta, e a uma direção $\mathbf{v} \neq (0,0,0)$ dada, a reta r pode ser parametrizada por

$$r = \{\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v} : t \in \mathbb{R}\}.$$

O exemplo abaixo lida com interseção de retas.

Exemplo 2.5 (interseção de retas). Determine se as retas $r_1 = \{(0,0,1) + t(1,-1,3) : t \in \mathbb{R}\}$ e $r_2 = \{(1,2,0) + t(0,3,-1) : t \in \mathbb{R}\}$ se interseptam, e em qual ponto.

Solução. Note que as retas se interseptam se e somente se elas tiverem um ponto em comum, ou seja se existirem t, s tais que $(1,-2,1) + t(1,-1,3) = (1,2,0) + s(0,3,-1)$. Isto equivale a resolver o sistema

$$1 + t = 1; \qquad -2 - t = 2 + 3s; \qquad 1 + 3t = -s.$$

Este sistema de equações pode ter uma, zero ou infinitas soluções.

2.5. Produto vetorial

Uma outra operação com vetores é o *produto vetorial*. Sejam $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ vetores em R^3. Então definimos

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Uma outra forma de escrever é

$$\mathbf{x}\times\mathbf{y} = \left(\det\begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3\end{pmatrix},\quad -\det\begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3\end{pmatrix},\quad \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2\end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3\end{pmatrix}$$

onde $\det(A)$ denota o determinante, e $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ são os vetores da base canônica. Algumas propriedades do produto vetorial são dadas abaixo:

(1) $\mathbf{x}\times\mathbf{y} = -\mathbf{y}\times\mathbf{x}$
(2) $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ é ortogonal a $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$
(3) $(\alpha\mathbf{x})\times\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x}\times\mathbf{y}) = \mathbf{x}\times(\alpha\mathbf{y})$, para todo $\alpha\in\mathbb{R}$
(4) $(\mathbf{x}+\mathbf{y})\times\mathbf{z} = \mathbf{x}\times\mathbf{z}+\mathbf{y}\times\mathbf{z}$
(5) $\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2$
(6) $\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\sin\theta$
(7) $\mathbf{x}\times\mathbf{x} = 0$
(8) (produto misto) $\mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}\times\mathbf{z}) = \det\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\\ \mathbf{z}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3\end{pmatrix}$
(9) $\mathbf{x}\times\mathbf{y} = 0$ se e somente se $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}$ para algum $\alpha\in\mathbb{R}$
(10) $\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$

Uma interessante aplicação das propriedades do produto vetorial é na determinação de áreas e volumes. Considere o paralelograma gerado pelos vetores não colineares $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Então o paralelograma gerado tem área $\|\mathbf{u}\|h$, onde h é a altura do parelograma. Mas $h = \|\mathbf{v}\|\sin\theta$, sendo θ o ângulo gerado pelos dois vetores. Portanto a área é dada por $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$, onde usamos a propriedade (6) acima.

Considere agora o paralelepípedo formado por vetores não linearmente dependentes $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Para calcular o volume, usaremos o produto misto (8) acima. De fato, o volume é dada pela área $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$ do palelograma formado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, vezes a altura do paralelepípedo vezes $\|\mathbf{w}\||\cos\alpha|$, onde α é o ângulo formado por $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ e

$\mathbf{w}$. Logo o volume é dado por

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|\cos\alpha = \|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|\frac{|(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}|}{\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|} = |(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}| = \left|\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}\right|.$$

2.6. Planos no espaço

Um plano no espaço é definido por um ponto a ele pertencente e a um vetor ortogonal ao plano. Seja Σ um plano, $\hat{\mathbf{x}} \in \Sigma$ e $\mathbf{n}$ vetor perpendicular a Σ. Então

$$\Sigma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \ (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{n} = 0\}.$$

Expandindo nas coordenadas, temos que para $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$, e $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, que um ponto qualquer de Σ satisfaz $(x_1 - \hat{x}_1)n_1 + (x_2 - \hat{x}_2)n_2 + (x_3 - \hat{x}_3)n_3 = 0$. Reescrevemos esta equação como $n_1x + n_2x + n_3x = \hat{x}_1n_1 + \hat{x}_2n_2 + \hat{x}_3n_3 = \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n}$, que é da forma geral

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0,$$

com $a = n_1$, $b = n_2$, $c = n_3$, $d = -\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n}$.

Exemplo 2.6. Ache a menor distância do ponto $\hat{\mathbf{p}} = (1, 0, 1)$ ao plano dado por $x + 2y - z = 2$.

Solução.

Passo i: precisamos primeiro achar algum ponto $\mathbf{p}_0$ pertencente ao plano. Por exemplo $(1, 1, 1)$.

Passo ii: Seja $\mathbf{v} = (1, 1, 1) - (1, 0, 1) = (0, 1, 0)$. Então a projeção de $\mathbf{v}$ em $\mathbf{n} = (1, 2, -1)$ é dada por

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n} = \frac{1}{3}\mathbf{n}.$$

Então a distância de $\hat{\mathbf{p}}$ ao plano é dada simplesmente pela norma de $\mathbf{w}$, ou seja, a distância é de $\|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{n}\|/3 = \sqrt{6}/3$.

Passo iii: para achar o ponto $\mathbf{p}_M$ do plano que tem distância mínima até $\hat{\mathbf{p}}$, basta notar que $\mathbf{p}_M + \mathbf{w} = \hat{\mathbf{p}}$, e portanto

$$\mathbf{p}_M = \hat{\mathbf{p}} - \mathbf{w}.$$

EXEMPLO 2.7. A menor distância do ponto $\hat{\mathbf{p}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ ao plano dado por $ax + by + cz + d = 0$ é dada por

$$\frac{|a\hat{x} + b\hat{y} + c\hat{z} + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{2.6.1}$$

Solução.

Passo i: considere um ponto $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ pertencente ao plano.

Passo ii: Seja $\mathbf{v} = (\hat{x} - x_0, \hat{y} - y_0, \hat{z} - z_0)$. Então a projeção de $\mathbf{v}$ em $\mathbf{n} = (a, b, c)$ é dada por

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n}.$$

Então a distância de $\hat{\mathbf{p}}$ ao plano é dada simplesmente pela norma de $\mathbf{w}$, o seja, a distância é de

$$\|\mathbf{w}\| = \frac{|a(\hat{x} - x_0) + b(\hat{y} - y_0) + c(\hat{z} - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|a\hat{x} + b\hat{y} + c\hat{z} + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

já que $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$.

Portanto, a distância mínima entre o ponto $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ e o plano definido por $ax + by + cz + d = 0$ é dada por (2.6.1).

Outra forma de se definir um plano é, dados três pontos não colineares a ele pertencentes, definir um vetor normal ao plano via produto vetorial. De fato, se $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ pertencem a um plano, então $\mathbf{n} = (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \times (\mathbf{z} - \mathbf{x})$ é perpendicular a este mesmo plano.

EXEMPLO 2.8. Dadas duas retas

$$r_1 = \{\mathbf{p}^1 + t\mathbf{d}^1 : t \in \mathbb{R}\}, \qquad r_2 = \{\mathbf{p}^2 + t\mathbf{d}^2 : t \in \mathbb{R}\},$$

onde $\mathbf{d}^1$ e $\mathbf{d}^2$ não são colineares, ache pontos $\mathbf{x}^1 \in r_1$ e $\mathbf{x}^2 \in r_2$ que têm distância mínima.

Solução. Antes de mais nada, observe que como $\mathbf{d}^1$ e $\mathbf{d}^2$ não são colineares, o problema tem solução única. Note também que os pontos de distância minima são tais que $\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2$ são ortogonais às retas r_1 e r_2. Portanto, escrevendo $\mathbf{x}^1 = \mathbf{p}^1 + t\mathbf{d}^1$ e $\mathbf{x}^2 = \mathbf{p}^2 + s\mathbf{d}^2$, temos que achar t e s tais que

$$[(\mathbf{p}^1 + t\mathbf{d}^1) - (\mathbf{p}^2 + t\mathbf{d}^2)] \cdot \mathbf{d}^1 = 0, \qquad [(\mathbf{p}^1 + s\mathbf{d}^1) - (\mathbf{p}^2 + s\mathbf{d}^2)] \cdot \mathbf{d}^2 = 0.$$

Como temos duas equações e duas incógnitas, podemos resolver o sistema acima. A distância mínima é dada por $\|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2\|$.

2.7. Cônicas no plano

Uma cônica no plano é o conjunto de pontos

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\},$$

onde $a, b, \dots, f \in \mathbb{R}$. Pedimos ainda que a, b ou c seja diferente de zero. Uma outra forma de exigir isto é impor que $|a| + |b| + |c| \neq 0$. Se definirmos a forma quadrática $Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$, e a forma linear $F(x,y) = dx + ey$, temos que $Q(x,y) + F(x,y) + f = 0$. A seguir mostramos exemplos de cônicas em sua *forma reduzida.*

Exemplo 2.9.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (elipse)}, \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (hipérbole)}, \qquad x^2 - ey = 0 \text{ (parábola)}.$$

No caso da elipse e da hipérbole, impomos que a e b sejam não nulos. No caso da parábola, a imposição é que e seja não zero.

Podemos ainda ter casos degenerados, como o exemplo a seguir nos mostra.

Exemplo 2.10. O caso da hipérbole degenerada é dado, para a e b não nulos, por $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 0$, o que implica em $y = \pm bx/a$.

No caso da parábola degenerada, para $a \neq 0$, temos $ax^2 - f = 0$, e portanto $x = \pm\sqrt{f/a}$.

Elipses degeneradas são dadas por $ax^2 + by^2 = 0$, com a e b positivos. Logo $x = y = 0$ é o único ponto da cônica.

Finalmente, temos cônicas dadas por conjuntos vazios (elipses e parábolas degeneradas), se $ax^2 + by^2 + r^2 = 0$ e $r \neq 0$, $a \geq 0$ e $b \geq 0$, e a ou b são não nulos.

Como dissemos, todos os exemplo acima estão em sua forma reduzida, mas este não é a forma mais geral possível. Porém, todas as cônicas podem ser reescritas em forma reduzida após mudanças de coordenadas. Veja o exemplo abaixo.

EXEMPLO 2.11. ([**5**]) Seja a cônica dada por $2x^2+2y^2+4xy+4\sqrt{2}x+12\sqrt{2}y-8=0$. Para reescrevê-la na forma reduzida, seguimos os passos abaixo.

Passo i: reescrever a cônica em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & 12\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 8 = 0, \text{ onde } A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Passo ii: diagonalizar a matriz A. Primeiro vemos que A tem como autovalores $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 4$ e os correspondentes autovetores

$$\vec{\mathbf{v}}^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \vec{\mathbf{v}}^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Note que se definirmos a matriz $M = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{v}}^1 & \vec{\mathbf{v}}^2 \end{bmatrix}$, então $M^{-1} = M$ e

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = M^{-1}AM = MAM.$$

Se (x_1, y_1) são as coordenadas de (x, y) na base $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2\}$, i.e., se

$$\vec{\mathbf{x}} = x_1\vec{\mathbf{v}}^1 + y_1\vec{\mathbf{v}}^2 = M \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix},$$

então

$$Q(x,y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} M^T AM \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Passo iii: reescrever a parte linear em termos de (x_1, x_2). Note que temos

$$\begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & 12\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & 12\sqrt{2} \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Passo iv: eliminar as constantes. Note que em termos de (x_1, x_2) a cônica é dada por

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & 12\sqrt{2} \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - 8 = 0.$$

Reescrevendo a expressão acima em sua forma não matricial, temos que

$$y_1^2 + 2x_1 + 4y_1 - 2 = 0.$$

Completando quadrados temos que $(y_1^2 + 4y_1 + 4) + 2x_1 - 6 = 0$, e portanto

$$(y_1 + 2)^2 + 2(x_1 - 3) = 0.$$

Introduzindo novas coordenadas $y_2 = y_1 + 2$ e $x_2 = x_1 - 3$ obtemos que

$$y_2^2 + 2x_2 = 0,$$

e a cônica é uma parábola.

As contas acima podem ser feitas em geral, como mostra o resultado abaixo.

TEOREMA 2.7.1. *Seja a cônica definida por* $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, *i.e.,*

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0, \; \textit{onde } A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix},$$

e sejam λ_1 *e* λ_2 *os autovalores de* A. *Então*

(1) *se* $\lambda_1\lambda_2 > 0$, *então a cônica é uma elipse*
(2) *se* $\lambda_1\lambda_2 < 0$, *então a cônica é uma hipérbole*
(3) *se* $\lambda_1\lambda_2 = 0$, *então a cônica é uma parábola*

COROLÁRIO 2.7.2. Como o sinal de $\lambda_1\lambda_2$ é o mesmo de $-(b^2 - 4ac)$, podemos concluir que

(1) se $b^2 - 4ac < 0$, então a cônica é uma elipse
(2) se $b^2 - 4ac > 0$, então a cônica é uma hipérbole
(3) se $b^2 - 4ac = 0$, então a cônica é uma parábola

Olhemos com mais cuidado as propriedades de cada cônica.

2.7.1. Elipses. Dados dois pontos $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ (os *focos* da elipse) e $r > d(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$, a elipse será dada pelos pontos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$d(\mathbf{x}, \boldsymbol{f}_1) + d(\mathbf{x}, \boldsymbol{f}_2) = r.$$

Considere por simplicidade os focos situados no eixo x e equidistantes da origem, i.e., $\boldsymbol{f}_1 = (-c, 0)$, $\boldsymbol{f}_2 = (c, 0)$, para algum $a > 0$. Então tomando $a = r/2$, obtemos os pontos $\boldsymbol{A}_1 = (-a, 0)$ e $\boldsymbol{A}_2 = (a, 0)$ da elipse e formamos seu *eixo* *maior*. Similarmente, tomando $b > 0$ tal que $2(b^2 + c^2)^{1/2} = r$, obtemos os pontos $\boldsymbol{B}_1 = (0, -b)$ e $\boldsymbol{B}_2 = (0, b)$ da elipse e formamos seu *eixo menor*. Neste caso temos que $r = d(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2) = 2a$ e um ponto $\boldsymbol{P} = (x, y)$ qualquer da elipse satisfaz

$$d(P, \boldsymbol{f}_1) + d(P, \boldsymbol{f}_2) = d(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2).$$

Logo $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$, e então

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando ao quadrado e rearrumando a expressão, obtemos

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando novamente ao quadrado, obtemos

$$a^2(a^2 - c^2) = (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2$$

Usando agora que $a^2 = b^2 + c^2$, obtemos $a^2b^2 = b^2x^2 + a^2y^2$, i.e.,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2.7.2. Hipérboles. Dados dois pontos $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ (os *focos* da hipérbole) e $r < d(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$, a hipérbole será dada pelos pontos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$|d(\mathbf{x}, \boldsymbol{f}_1) - d(\mathbf{x}, \boldsymbol{f}_2)| = r. \tag{2.7.1}$$

Caso os focos da hipérbole estejam situados em $(-c, 0)$, $(c, 0)$, sua equação será dada por

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Fazendo $y = 0$ temos que $x = \pm a$, e vemos que $2a$ determina a distância entre os vértices. Note que neste caso, $r = 2a$. Pode-se concluir também que $b^2 = c^2 - a^2$ [**32**].

2.7.3. Parábolas. Dado um ponto $\boldsymbol{f}$ e uma reta r, a parábola é definida como o conjunto de pontos $\mathbf{x}$ tais que

$$d(\mathbf{x}, \boldsymbol{f}) = d(\mathbf{x}, r),$$

onde $d(\mathbf{x}, r)$ indica a distância de $\mathbf{x}$ a reta r. O ponto $\boldsymbol{f}$ é denominado *foco* da parábola, e r sua *diretriz*.

2.8. Desigualdade lineares

Às vezes precisamos otimizar uma certa função definida no $\mathbb{R}^n$ em domínios que satisfazem alguma restrição, por exemplo que as coordenadas sejam todas não negativas, i.e. $x_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Estes tipos de restrição são dadas por *desigualdade lineares*. Por simplicidade, ficaremos apenas no caso do plano, quando $n = 2$, mas o caso geral é análogo.

Em geral as desigualdades lineares são dadas na forma $ax_1 + bx_2 + c \leq 0$, onde a, b, c são números reais (para evitar trivialidades, suporemos sempre que a ou b são não nulos). Estas desigualdades determinam a região do plano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c \leq 0\}$. Tendo várias desigualdades, podemos considerar a interseção entre os domínios por elas determinados, a chamada *região admissível*. Esta interseção pode ser nula, não limitado, ou limitada. Neste último caso, a região será dada por um polígono.

Exemplo 2.12. Ache os pontos de $\mathbb{R}^2$ tais que

$$\begin{aligned} 3x + 4y - 5 &\leq 0, \\ y &\leq 1, \\ x &\geq 0, \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

É um problema típico tentar agora minimizar uma função linear nalguma região como a dada no exemplo 2.12.

Exemplo 2.13. Ache o mínimo de $p(x, y) = 2x + 3 - 5$ na região determinada no exemplo 2.12.

Solução. Note que as curvas de nível da função p são dadas por retas no plano. Neste caso, para achar os pontos de máximo e mínimo de p, basta procurar entre os vértices. Este é apenas um exemplo do caso geral, como enunciado no resultado a seguir.

TEOREMA 2.8.1. *Se uma região admissível D definida por desigualdades lineares é limitada, então máximos e mínimos de $p(x, y) = ax + by + c$ em D ocorrem nos vértices de D.*

2.9. Exercícios

EXERCÍCIO 2.1. No $\mathbb{R}^n$, seja $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Mostre que os vetores de $\mathcal{B}$ são *linearmente independentes* se e somente se as coordenadas de todo vetor do $\mathbb{R}^n$ são unicamente determinadas.

EXERCÍCIO 2.2. Mostre que $\big|\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|\big| \le \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ (isto vale para qualquer norma) e que $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2$ (isto vale para qualquer norma que venha de produto interno) para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ do $\mathbb{R}^n$.

EXERCÍCIO 2.3. Considere uma norma vinda de produto interno. Prove o Teorema de Pitágoras.

EXERCÍCIO 2.4. Mostre que o ângulo θ entre a diagonal de um cubo e as suas arestas é tal que $\cos\theta = 1/\sqrt{3}$.

EXERCÍCIO 2.5. Verifique que o trângulo com vértices em $(0, -1,)$, $(-1, 1)$, $(2, 0)$ é retângulo.

EXERCÍCIO 2.6. Mostre a lei dos cossenos, que diz que um triângulo com lados de tamanho a, b e c, e com os lados de tamanho a e b determinando um ângulo θ, obedecem à relação:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

EXERCÍCIO 2.7. Seja $\mathbf{y}$ vetor não nulo. Mostre que se $\mathbf{z}$ é a projeção de $\mathbf{x}$ em $\mathbf{y}$, i.e., $\mathbf{z} = \alpha\mathbf{y}$ e $(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \cdot \mathbf{y} = 0$, então $\alpha = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}/\|\mathbf{y}\|^2$ e $\|\mathbf{z}\| = \|\mathbf{x}\| \cos\theta$.

EXERCÍCIO 2.8. Mostre que a área do paralelograma determinado pelos vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ é dada por $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|$.

EXERCÍCIO 2.9. Usando a notação do Exemplo 2.8, ache a distância entre as duas retas, com $\mathbf{p}^1 = (0, 0, 0)$, $\mathbf{d}^1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{p}^2 = (-1, 1, 2)$ e $\mathbf{d}^2 = (-1, -1, 0)$.

CAPíTULO 3

Álgebra Linear

[1]

Neste capítulo trataremos resumidamente de várias noções de álgebra linear, como operações com matrizes, matriz inversa, transposta e adjunta, resolução de sistemas lineares, determinantes, regra de Cramer, espaços vetoriais e subespaços, base e dimensão, produto interno, ortogonalidade, projeções, transformações lineares, núcleo e imagem, matriz de uma transformação linear. Autovalores e autovetores, polinômios característicos, operadores diagonalizáveis, operadores auto-adjuntos, operadores ortogonais, e formas bilineares.

3.1. Operações com matrizes

Denotaremos por $\mathbb{R}^{m\times n}$ o espaço das matrizes reais com m linhas e n colunas. Se $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, Denotaremos por $A_{i,j}$ o elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna de A. A soma e multiplicação de matrizes é definida da forma usual, isto é, se A, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, então $C = A + B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ é dada por $C_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$. A multiplicação para matrizes $D \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $E \in \mathbb{R}^{n\times o}$, é definida tal que $C = AB \in \mathbb{R}^{m\times o}$ é dada por $C_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j}$.

Chamaremos de matriz identidade, e denotaremos por I, à matriz tal que $I_{i,i} = 1$ e $I_{i,j} = 0$ se $i \neq j$, para $i, j = 1, \ldots, n$.

3.2. Matriz inversa, transposta e adjunta

Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se existir $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $AB = I$ e $BA = I$, então dizemos que A é invertível e que B é a inversa de A. Escrevemos ainda $B = A^{-1}$.

[1]Última Atualização: 07/04/2022

Uma forma de se computar a matriz inversa de A, quando esta existir, é via *matriz dos cofatores*. Seja $\hat{A}^{i,j} \in \mathbb{R}^{n-1\times n-1}$ obtida de A "retirando" de A sua i-ésima linha e j-ésima coluna. Por exemplo, dada

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

temos que

$$\hat{A}^{1,1} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \hat{A}^{1,2} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, \quad \hat{A}^{1,3} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad \hat{A}^{2,1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \hat{A}^{2,2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix},$$

$$\hat{A}^{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad \hat{A}^{3,1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \hat{A}^{3,2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad \hat{A}^{3,3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Definimos $\Delta \in \mathbb{R}^{n\times n}$ como sendo a *matriz cofator* de A, onde $\Delta_{i,j} = (-1)^{i+j} \det \hat{A}^{i,j}$. No caso do exemplo acima, temos

$$\Delta = \begin{bmatrix} \det \hat{A}^{1,1} & -\det \hat{A}^{1,2} & \det \hat{A}^{1,3} \\ -\det \hat{A}^{2,1} & \det \hat{A}^{2,2} & -\det \hat{A}^{2,3} \\ \det \hat{A}^{3,1} & -\det \hat{A}^{3,2} & \det \hat{A}^{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

OBSERVAÇÃO 3.1. A matriz Δ^T é também chamada de *adjunta*. É um péssimo nome, que provavelmente deriva de uma tradução infeliz do inglês *adjugate*. O termo matriz adjunta é utilizado mais comumente como sendo simplesmente a transposta de uma matriz (no caso real). Entretanto, na ANPEC, pode aparecer o termo "matrix adjunta" para denominar Δ^T.

Após o cômputo de Δ temos que se A for invertível, então

$$A^{-1} = \frac{\Delta^T}{\det A}.$$

No exemplo acima temos que $\det A = 0$, e portanto a matriz não é invertível. Na verdade temos o importante resultado que afirma que A é invertível se e somente se seu determinante é não nulo.

Note que para conferir se uma matriz é ou não inversa de outra, basta executar a multiplicação matricial e checar se resulta na matriz identidade. Por exemplo, se

A e B são invertíveis, então $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ pois

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = I,$$
$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = BAA^{-1}B^{-1} = BB^{-1} = I.$$

Voltando ao caso geral, dada $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ definimos a matriz transposta de A denotada por A' (ou A^T), onde $A'_{i,j} = A_{j,i}$. Neste caso, as linhas se tornam colunas, e as colunas se tornam linhas. Note que se $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times o}$, e além disto, $C = AB$, então $C' = B'A'$ pois

$$C'_{i,j} = C_{j,i} = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k}B_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} B'_{i,k}A'_{k,j}.$$

3.3. Resolução de sistemas lineares

Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $\vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^m$. Queremos descobrir se existe, e neste caso, quem é, $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ tal que $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ (chamado de *sistema linear*). Este problema pode não ter solução ($0x = 1$), ter solução única ($2x = 1$), ou ter infinitas soluções ($x + y = 1$). Note entretanto que se A for invertível, então o sistema tem solução única dada por $\vec{\mathbf{x}} = A^{-1}\vec{\mathbf{b}}$.

Em cálculos manuais, a melhor forma de se descobrir se um sistema tem solução é reduzindo-o a uma forma triangular superior, usando a *matriz ampliada*, como nos mostra o exemplo abaixo [**5**, pag.33].

Seja

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Obtemos então a matriz ampliada, que reduzimos a uma forma triangular superior:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1/3 & -2/3 \end{bmatrix}$$

Voltando a forma de equações, temos da última linha que $x_3 = 2$. Usando a segunda linha obtemos $x_2 = -2$. Finalmente, da primeira linha temos $x_1 = 3$.

3.4. Determinantes e a regra de Cramer

O determinante é uma função $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ que satisfaz algumas propriedades. Denotaremos o determinante de uma matriz A por $\det(A)$ ou $|A|$. Dentre elas:

(1) Se existir alguma linha ou coluna zero, então o determinante se anula.
(2) $\det A = \det A^T$, portanto propriedades que valem para linhas, valem para colunas.
(3) $|\vec{\mathbf{v}}_1 \ldots \alpha\vec{\mathbf{v}}_j \ldots \vec{\mathbf{v}}_n| = \alpha|\vec{\mathbf{v}}_1 \ldots \vec{\mathbf{v}}_n|$.
(4) $|\vec{\mathbf{v}}_1 \ldots \vec{\mathbf{v}}_i \ldots \vec{\mathbf{v}}_j \ldots \vec{\mathbf{v}}_n| = -|\vec{\mathbf{v}}_1 \ldots \vec{\mathbf{v}}_j \ldots \vec{\mathbf{v}}_i \ldots \vec{\mathbf{v}}_n|$.
(5) $|\vec{\mathbf{v}}_1 \ldots \vec{\mathbf{v}}_i + \vec{\mathbf{w}} \ldots \vec{\mathbf{v}}_n| = |\vec{\mathbf{v}}_1 \ldots \vec{\mathbf{v}}_i \ldots \vec{\mathbf{v}}_n| + |\vec{\mathbf{v}}_1 \ldots \vec{\mathbf{w}} \ldots \vec{\mathbf{v}}_n|$
(6) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

É importante notar que $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$. O contraexemplo mais simples é dado por

$$0 = \det\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} = \det\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\right) \neq \det\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix} = 2.$$

3.4.1. Regra de Cramer. Considere o sistema linear $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$, onde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é invertível. Então

$$x_i = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix}a_{1,1} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1,n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n,1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{n,n}\end{vmatrix}.$$

para $i = 1, \ldots, n$. Esta identidade é conhecida como *Regra de Cramer.*

Exemplo 3.1 ([**5**]). Seja o sistema linear dado por $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$, onde

$$A = \begin{bmatrix}2 & -3 & 7\\1 & 0 & 3\\0 & 2 & -1\end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix}1\\5\\0\end{bmatrix}.$$

Como $\det A = -1$, então, pela Regra de Cramer,

$$x_1 = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -79, \quad x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 9, \quad x_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 18.$$

3.5. Espaços vetoriais, subespaços, base e dimensão

O exemplo mais comum e intuitivo de espaço vetorial é o $\mathbb{R}^n$. Entretanto, uma definição mais geral é de grande utilidade.

Definição 3.5.1. *Um espaço vetorial V sobre os reais é um conjunto cujos elementos chamamos de vetores, com duas operações binárias, soma vetorial e multiplicação por escalar tais que*

(1) $\mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{y}+\mathbf{x}$*, para todo* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$
(2) $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} = \mathbf{y}+(\mathbf{x}+\mathbf{z})$*, para todo* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$
(3) Existe um elemento $\mathbf{0} \in V$ *tal que* $\mathbf{0}+\mathbf{x} = \mathbf{x}$*, para todo* $\mathbf{x} \in V$
(4) Para todo $\mathbf{x} \in V$*, existe um elemento* $\mathbf{y} \in V$ *tal que* $\mathbf{y}+\mathbf{x} =$
(5) $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$*, para todo* $\mathbf{x} \in V$
(6) $(\alpha+\beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}$*, para todo* α*,* $\beta \in \mathbb{R}$ *e para todo* $\mathbf{x} \in V$
(7) $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$*, para todo* α*,* $\beta \in \mathbb{R}$ *e para todo* $\mathbf{x} \in V$
(8) $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}$*, para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e para todo* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$

Alguns resultados podem ser obtidos imediatamente:

Lema 3.5.2. Seja V um espaço vetorial sobre os reais. Então temos que

(1) O vetor zero é único
(2) Todo elemento de $\mathbf{x} \in V$ tem um único negativo dado por $(-1)\mathbf{x}$
(3) $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{x} \in V$
(4) $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

Exemplo 3.2. O espaço das matrizes $m \times n$ reais denotado por $\mathbb{R}^{m\times n}$ é um espaço vetorial com a definição usual de soma de matrizes e multiplicação por escalar.

3.5.1. Subespaço vetorial. Seja V um espaço vetorial e $W \subseteq V$. Então dizemos que W é *subespaço vetorial de V* se W for também um espaço vetorial. Para que isto aconteça, basta que

(1) $W \neq \emptyset$
(2) se $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in W$, então $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$
(3) se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u} \in W$, então $\alpha\mathbf{u} \in W$

Note se W é subespaço de V, então o vetor nulo $\mathbf{0} \in W$ pois como W é não vazio, então existe algum $\mathbf{u} \in W$. Mas então $\mathbf{0} = 0\mathbf{u} \in W$, por causa de (3).

Exemplo 3.3. Note que $\{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$ é subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$, mas que $\{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0,\ z \geq 0\}$ não o é.

Exemplo 3.4. O espaço das matrizes diagonais $n \times n$ é subespaço do espaço vetorial das matrizes $n \times n$.

Exemplo 3.5. Se V é espaço vetorial e $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$, então

$$\operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \overset{\text{def}}{=} \{\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k : \alpha_1, \dots \alpha_k \in \mathbb{R}\}$$

é subespaço vetorial de V. Chamamos o termo $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k$ de *combinação linear de* $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$.

Os próximos resultados respondem à pergunta natural: interseções e uniões de subespaços são ainda subespaços?

Lema 3.5.3. Sejam W_1 e W_2 subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Então $W_1 \cap W_2$ é subespaço vetorial de V.

Como podemos ver no exemplo a seguir, a união de subespaços vetoriais *não é* subespaço vetorial.

Exemplo 3.6. Sejam $A_1 = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ e $A_2 = \{(0, x) : x \in \mathbb{R}\}$ subespaços de $\mathbb{R}^2$. Seja $A = A_1 \cup A_2 = \{(x, y) : x = 0 \text{ ou } y = 0\}$. Logo $(1, 0) \in A$ e $(0, 1) \in A$, mas $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin A$.

Apesar da união não ser necessariamente subespaços, há uma forma de se "juntar" subespaços vetoriais e obter outro subespaço, como vemos no resultado a seguir.

LEMA 3.5.4. Sejam W_1 e W_2 subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Seja o conjunto

$$W_1 + W_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 : \mathbf{w}_1 \in W_1 \text{ e } \mathbf{w}_2 \in W_2\}.$$

Então $W_1 + W_2$ é subespaço vetorial de V.

OBSERVAÇÃO 3.2. Algumas observações quanto a soma de espaços. A primeira é que $W_1 + W_2$ é apenas uma notação, afinal soma de conjuntos não é uma operação que faça sentido em geral. A segunda observação diz respeito ao importante caso $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Neste caso dizemos que a soma é *direta* e a representamos por $W_1 \oplus W_2$. Note que podemos estender a noção de soma direta para mais que dois espaços, como em $W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_N$. Note que $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}$ é a soma direta do $\mathbb{R}$ repetida n vezes.

3.5.2. Base e dimensão. Sejam $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ vetores de um espaço vetorial V. Se

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k = 0 \implies \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$$

então dizemos que $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ são *linearmente independentes*, ou *L.I.*. Vetores que não são L.I. são chamados de L.D., ou *linearmente dependentes*. Outra forma de dizer que $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ são L.D. é quando existirem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, nem todos nulos e tais que

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k = 0.$$

Com o conceito de independência linear, podemos definir o que é uma base de um espaço vetorial. Dado um espaço V, dizemos que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subseteq V$ é base de V se

(1) $\operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} = V$
(2) $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é L.I.

EXEMPLO 3.7. Quando $V = \mathbb{R}^n$, definimos a *base canônica* $\{\mathbf{e}_1 \ldots, \mathbf{e}_n\}$, onde

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \qquad \mathbf{e}_n = (0, \ldots, 0, 1).$$

A seguir enunciamos alguns resultados sobre bases.

TEOREMA 3.5.5. *Se* $V = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$*, então é sempre possível extrair uma base de* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$.

TEOREMA 3.5.6. *Se* $V = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *então o conjunto* $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ *é L.D. sempre que* $m > n$.

COROLÁRIO 3.5.7. Qualquer base de V tem sempre o mesmo número de elementos, que é a dimensão de V.

TEOREMA 3.5.8. *Qualquer conjunto L.I. de vetores pode ser completado a fim de formar uma base.*

COROLÁRIO 3.5.9. Se $\dim V = n$, qualquer conjunto L.I. com n vetores é base.

TEOREMA 3.5.10. *Seja* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *base de* V*. Então todo vetor de* V *pode ser escrito de forma única como combinação linear de* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$*, i.e., dado* $\mathbf{u} \in V$ *existem únicos números reais* $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *tais que*

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{v}_1 + u_2\mathbf{v}_2 + \cdots + u_n\mathbf{v}_n.$$

Os escalares $u_1, u_2, \ldots, u_n$ do teorema acima são chamados de *coeficientes de* $\mathbf{u}$ *na base* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Usamos a notação

$$\vec{u}_\beta = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Portanto, $\mathbf{u}$ é um vetor do espaço V (independe da base) e $\vec{u}_\beta$ denota os coeficientes de $\mathbf{u}$ na base β. Quando β for a base canônica, simplificamos a notação escrevendo $\vec{u}$.

3.6. Produto interno, ortogonalidade e projeções

Duas importantes *ferramentas* matemáticas quando se trabalha em espaços vetoriais são produtos internos e normas.

DEFINIÇÃO 3.6.1. *Seja V espaço vetorial sobre os reais. Um* produto interno *é uma função de $V \times V \to \mathbb{R}$, denotado por $\mathbf{x}, \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ e tal que*

(1) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} > 0$ *para todo* $\mathbf{x} \in V$ *com* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
(2) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$ *para todo* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in V$
(3) $(\alpha \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e todo* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in V$
(4) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$ *para todo* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in V$

Outra notação usual para produtos internos é $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Note que da definição acima concluímos imediatamente que para todo $\mathbf{x} \in V$,

$$\mathbf{0} \cdot \mathbf{x} = (0\mathbf{0}) \cdot \mathbf{x} = 0(\mathbf{0} \cdot \mathbf{x}) = 0.$$

EXEMPLO 3.8. Em $\mathbb{R}^2$, se $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, e $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, o produto interno canônico é dado por

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \vec{\mathbf{x}}^T \vec{\mathbf{y}} = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Em $\mathbb{R}^n$, para $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, definimos

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \vec{\mathbf{x}}^T \vec{\mathbf{y}} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Introduzimos agora a noção de *norma.* Num espaço vetorial, uma boa forma de se medir distâncias entre vetores é através de normas. Em particular, o conceito normas ajuda na definição canônica de conjuntos abertos e fechados, como veremos a seguir.

DEFINIÇÃO 3.6.2. *Dado um espaço vetorial V, uma* norma *é uma função de V em $\mathbb{R}$, denotada por $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$, e tal que*

(1) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ *para todo* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in V$ *(desigualdade triangular)*
(2) $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$ *para todo* $\mathbf{x} \in V$, *e para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$
(3) $\|\mathbf{x}\| > 0$ *para todo* $\mathbf{x} \in V$ *tal que* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

Quando um espaço vetorial V tem uma norma associada, dizemos que é um *espaço normado.*

EXEMPLO 3.9. Em $\mathbb{R}^2$,

$$\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

define uma norma. No caso mais geral, em $\mathbb{R}^n$,

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

também define uma norma.

O resultado abaixo é importante pois mostra que *todo* produto interno induz uma norma.

TEOREMA 3.6.3. *Seja V um espaço vetorial com produto interno. Então*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$$

define uma norma em V. Além disto, vale a desigualdade de Cauchy-Schwartz

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \le \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \qquad \textit{para todo } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V. \tag{3.6.1}$$

OBSERVAÇÃO 3.3. A igualdade $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ vale se e somente se $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$.

Bem como no caso do $\mathbb{R}^n$, podemos definir cossenos de "ângulos entre dois vetores" não nulos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \in V$ por

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}, \tag{3.6.2}$$

que toma valores entre -1 e 1 devido à desigualdade de Cauchy-Schwartz (3.6.1). Dizemos também que $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ são ortogonais, ou perpendiculares, se $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.

3.7. Transformações lineares, núcleo, imagem e representações matriciais

Dados dois espaços vetoriais V_1 e V_2, dizemos que uma função $T: V_1 \to V_2$ é uma *função, transformação* ou *aplicação linear* se

$$T(\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + \alpha T(\mathbf{y}) \qquad \text{para todo } \mathbf{x},\, \mathbf{y} \in V_1 \text{ e todo } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Note que em particular, para toda aplicação linear linear temos $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, pois

$$T(\mathbf{0}) = T(0\mathbf{0}) = 0T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

O exemplo principal de transformação linear em espaços de dimensões finitas é dado por multiplicação de matrizes. De fato, seja $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ definida por $T(\vec{\mathbf{u}}) = A\vec{\mathbf{u}}$, onde $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Então T é linear pois $T(\vec{\mathbf{u}} + \alpha\vec{\mathbf{v}}) = A(\vec{\mathbf{u}} + \alpha\vec{\mathbf{v}}) = A\vec{\mathbf{u}} + \alpha A\vec{\mathbf{v}} = T(\vec{\mathbf{u}}) + \alpha T(\vec{\mathbf{v}})$.

Observe que para definir uma aplicação linear qualquer $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, basta defini-la numa base $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ do $\mathbb{R}^m$, i.e., basta conhecer $T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)$. De fato, se $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n$, então

$$T(\mathbf{x}) = T(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n) = \alpha_1 T(\mathbf{v}_1) + \cdots + \alpha_n T(\mathbf{v}_n).$$

Num certo sentido, todas as transformações lineares em espaçoes de dimensões finitas são dadas por matrizes. De forma mais precisa, seja $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ base de V e $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ base de W. Então, se $\mathbf{x} \in V$ é dado por $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_m\mathbf{v}_m$, então

$$T(\mathbf{x}) = \alpha_1 T(\mathbf{v}_1) + \cdots + \alpha_m T(\mathbf{v}_m).$$

Seja $A_{j,i}$ a j-ésima coordenada de $T(\mathbf{v}_i)$ na base $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$, i.e.,

$$T(\mathbf{v}_i) = A_{1,i}\mathbf{w}_1 + \cdots + A_{n,i}\mathbf{w}_n. \tag{3.7.1}$$

Logo

$$\begin{aligned} &T(\mathbf{x}) = \alpha_1(A_{1,1}\mathbf{w}_1 + \cdots + A_{n,1}\mathbf{w}_n) + \cdots + \alpha_m(A_{1,m}\mathbf{w}_1 + \cdots + A_{n,m}\mathbf{w}_n) \\ &= (\alpha_1 A_{1,1} + \cdots + \alpha_m A_{1,m})\mathbf{w}_1 + \cdots + (\alpha_1 A_{n,1} + \cdots + \alpha_m A_{n,m})\mathbf{w}_n = \beta_1\mathbf{w}_1 + \cdots + \beta_n\mathbf{w}_n, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_{1,1} & \cdots & A_{1,m}\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix}. \tag{3.7.2}$$

Se $\mathbf{w} = T(\mathbf{u})$, então a matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ com coeficientes $A_{i,j}$ mapeia as coordenadas de $\mathbf{u}$ nas coordenadas de $\mathbf{v}$. Note que a matriz A depende fortemente das bases de V e W. Dizemos que A é a representação de ou matriz associada a T nas bases $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ e $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$. Por vezes, esta representação é também escrita como $[T]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}$.

Um exemplo importante é quando as bases são canônicas. Neste caso, basta ver de (3.7.1) que $A_{j,i}$ é dada pela j-ésima coordenada de $T(\mathbf{e}_i)$.

Dois importantes conjuntos relacionados a uma aplicação linear $T : V \to W$ são seu núcleo e sua imagem, dados por

$$N(T) = \{\mathbf{v} \in V : T(\mathbf{v}) = 0\} \subseteq V, \qquad \operatorname{Im}(T) = \{T(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in V\} \subseteq W.$$

O núcleo recebe também a notação $\ker(T)$, do inglês *kernel*, e a imagem de V por T também recebe a notação $T(V)$ ou $R(T)$ (do inglês *range*). É importante notar que tanto o núcleo como a imagem de uma transformação linear são espaços vetoriais. Para tal, basta checar que estes são subespaços de V e W respectivamente. Ver exercício 3.9.

Se $\operatorname{Im}(T) = W$ dizemos que T é sobrejetora. Se

$$T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v}) \implies \mathbf{u} = \mathbf{v},$$

então dizemos que T é injetora, ou $1-1$. Temos também o seguinte resultado.

TEOREMA 3.7.1. *$N(T) = \mathbf{0}$ se e somente se T é injetiva.*

Temos a seguir um importante resultado.

TEOREMA 3.7.2 (Teorema do núcleo e da imagem). *Seja $T : V \to W$ aplicação linear, onde V e W são espaços vetoriais. Então* $\dim N(T) + \dim \operatorname{Im}(T) = \dim V$.

COROLÁRIO 3.7.3. Considere as hipóteses do Teorema acima. Temos então que

i) Se $\dim V = \dim W$, então T é injetora se e somente se T é sobrejetora.
ii) Se T for injetora, então T leva vetores LI em vetores LI. E se além disto $\dim W = \dim V$, então T leva base em base.

3.7.1. Posto de matrizes e forma escalonada. Uma forma de se definir posto de uma transformação linear $T : V \to W$ é como sendo a dimensão de sua imagem. Note que

$$\operatorname{posto} T = \dim \operatorname{Im}(T) \leq \dim W, \qquad \operatorname{posto} T = \dim V - \dim N(T) \leq \dim V,$$

onde usamos o Teorema da núcleo e da imagem. Se A é a matriz representando T, então o posto de A é simplesmente o número de colunas LI de A, também chamado de *posto segundo colunas* de A. Analogamente, definimos o *posto segundo linhas* de A como sendo o número de linhas de A que sejam LI. Vale o seguinte resultado:

posto segundo colunas = posto segundo linhas.

É importante ter em mente que os espaços gerados pelas linhas e colunas são diferentes em geral, apenas suas dimensões são iguais.

Definimos também, a nulidade de um operador T ou de uma matriz A como sendo a dimensão de seu núcleo.

Note que há relação entre as dimensões do núcleo e imagem de uma transformação linear T e o posto e nulidade da matriz que representa esta transformação (em quaisquer bases):

$$\dim \operatorname{Im}(T) = \operatorname{posto}([T]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}), \qquad \dim N(T) = \text{nulidade de } ([T]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}).$$

Note que pelo Teorema 3.7.2 que

$$\dim N(T) = \text{nulidade de } ([T]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}) = \text{número de colunas de } [T]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} - \operatorname{posto}([T]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}).$$

Outra forma de se definir posto de uma matriz é via sua forma escalonada. Dizemos que uma matriz A está em sua forma escalonada quando todas as linhas completamente nulas estão na parte de baixo da matriz e se $A_{i,j}$ for o primeiro termo não nulo da linha i então $A_{i+1,j}, \dots, A_{m,j} = 0$. Um importante resultado é que dada uma matriz em forma escalonada, seu posto é igual ao número de linhas não nulas.

EXEMPLO 3.10. As matrizes abaixo estão em forma escalonada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 10 & -3 & 21 & -5 & -5 \\ 0 & 3 & -2 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.7.2. Resolução de sistemas lineares. Suponha que $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e que $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Queremos discutir agora quando o sistema

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{3.7.3}$$

tem solução e se é única. Note que A define um operador $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Temos então que em relação ao problema 3.7.3:

(1) Se $m = n$ (matrizes quadradas):
   (a) A é invertível se e somente se $\det(A) \neq 0$
   (b) se A for invertível, então existe uma única solução, e é dada por $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$
   (c) A é invertível se e somente se existe uma única solução para todo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$
   (d) A é sobre se e somente se for injetiva (existência de soluções para todo $\mathbf{b}$ é equivalente à unicidade)
   (e) Se $\det A = 0$, então $N(A) \neq \{\mathbf{0}\}$ e portanto o sistema possui infinitas soluções
   (f) $\det A \neq 0$ se e somente se $N(A) = \{\mathbf{0}\}$
(2) Caso geral:
   (a) Se a solução existir, ela será única se e somente se $N(A) = \{\mathbf{0}\}$ (A é injetiva)
   (b) Existem zero, uma ou infinitas soluções
   (c) Se existir solução e $N(A) \neq \{\mathbf{0}\}$ então existem infinitas soluções
   (d) Se posto$(A) = m$ então sempre existe solução
   (e) Se posto$(A) < m$ então existe $\mathbf{b}$ tal que o sistema não possui solução
   (f) Se $n < m$ então existe $\mathbf{b}$ tal que o sistema não possui solução

3.8. Autovalores, polinômios característicos e operadores diagonalizáveis

Nesta seção falaremos sobre autovalores, autovetores, e suas propriedades. Citamos como referência o livro [**5**].

3.8.1. Autovalores, autovetores e polinômios característicos. Seja $T : V \to V$ transformação linear. Dizemos que $\lambda \in \mathbb{C}$ é um *autovalor* de T se existe vetor não nulo, chamado de *autovetor*, $\mathbf{v} \in V$ tal que $T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Chamamos ainda $(\lambda, \mathbf{v})$ de *autopar*.

Suponha agora um operador linear dado por uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, definindo a aplicação linear $\vec{\mathbf{x}} \to A\vec{\mathbf{x}}$. Para achar autovalores e autovalores de A, basta achar soluções não triviais, i.e., não nulas, para o sistema $(A - \lambda I)\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$. Isto só será possível de $\det(A - \lambda I) = 0$. Note que $\det(A - \lambda I)$ é um polinômio em termos de λ, ao qual damos o nome de *polinômio característico*, e denotamos por $P(\lambda)$. O problema de achar autovalores resume-se então ao problema de encontrar as raízes de $P(\lambda)$. Isto é *sempre possível*, segundo o teorema fundamental da Álgebra, desde que admita-se autovalores complexos.

Depois de encontrado um autovalor λ, pode-se encontrar os autovetores correspondentes resolvendo-se $(A - \lambda I)\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$. Note que este sistema *sempre* tem soluções não triviais, já que $A - \lambda I$ não é invertível, ver o exercício 3.11.

Suponha que o polinômio característico de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ seja da forma

$$(\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{n_k} = 0,$$

onde os autovalores $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_k$ e os inteiros positivos $n_1, \dots, n_k$ são tais que $n_1 + \dots n_k = n$. Então chamamos n_j de *multiplicidade algébrica* de λ_j e a dimensão do espaço

$$E_{\lambda_j} = \{\mathbf{v} \in V : T\mathbf{v} = \lambda_j\mathbf{v}\} \tag{3.8.1}$$

de *multiplicidade geométrica* de λ_j. Note que E_{λ_j} é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, chamado *autoespaço* de λ_j. Ver Exercício 3.10.

EXEMPLO 3.11. Seja $A = 2I$. Então, se λ for autovalor, temos que $\det(2I - \lambda I) = 0$, i.e., $(\lambda - 2)^2 = 0$. Logo $\lambda = 2$ é o único autovalor. Como autovetores temos que

$(2I - \lambda I)\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$, ou seja, $0\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$. Portanto todo $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$ é autovetor, e neste caso, o autoespaço tem dimensão dois. Dizemos que λ tem multiplicidade algébrica dois, e multiplicidade geométrica dois.

Exemplo 3.12. Seja agora a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico é dado por $P(\lambda) = (2-\lambda)^2$, o mesmo do exemplo 3.11, e portanto $\lambda = 2$ é o único autovalor. Entretanto ao calcular os autovetores vemos que se $(B - 2I)\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$, então

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo $x_2 = 0$, e os autovetores são múltiplos de $[1,0]^T$. Dizemos então que λ tem multiplicidade algébrica dois, e multiplicidade geométrica um.

3.8.2. Operadores diagonalizáveis. Seja $T : V \to V$ operador linear e V espaço vetorial de dimensão finita. Uma característica interessante de autovalores é que, quando estes formam uma base de V, a matriz que representa T é diagonal. De fato, observe em (3.7.1) que se $\mathbf{v}_i$ é autovetor, então

$$T(\mathbf{v}_i) = \lambda \mathbf{v}_i,$$

onde tomamos $\mathbf{w}_j = \mathbf{v}_j$ para todo j. Conclua então que a matriz A em (3.7.2) é diagonal.

Como é bastante conveniente representar um operador por uma matriz diagonal, é natural perguntar se, dado um operador linear, ele é *diagonalizável*, i.e., se existe uma base tal que sua representação nesta base é uma matriz diagonal. De forma mais simples, dizemos que um operador $T : V \to V$ é *diagonalizável* se existe uma base de V formada por autovetores. Isto não será sempre possível, como pode ser visto no exemplo 3.12.

Outra forma de se definir matrizes diagonalizáveis, é exigir que sejam similares a uma matriz diagonal. Dizemos que duas matrizes A e B são *similares* se existe uma matriz P invertível tal que $B = P^{-1}AP$. O resultado abaixo trata de propriedades de matrizes similares.

TEOREMA 3.8.1. *Matrizes similares têm o mesmo determinante, mesmo traço, mesmo polinômio característico, e mesmos autovalores.*

Note que se a matriz A é diagonalizável e $D = P^{-1}AP$ é diagonal, então as colunas de P são exatamente os autovetores de A. Para ver isto, suponha que

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = P^{-1}AP,$$

onde $P = [\vec{\mathbf{v}}_1 \dots \vec{\mathbf{v}}_n]$ e $A\vec{\mathbf{v}}_i = \lambda_i \vec{\mathbf{v}}_i$. Então $AP = PD$:

$$A \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{v}}_1 & \dots & \vec{\mathbf{v}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{v}}_1 & \dots & \vec{\mathbf{v}}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

O resultado abaixo é importante para garantir tal base. Ele garante que autovetores correspondentes a autovetores distintos são LI.

TEOREMA 3.8.2. *Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ autovalores distintos de T. Então os correspondentes autovetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ são LI.*

COROLÁRIO 3.8.3. Se uma transformação linear em espaços de dimensão n tiver n autovalores distintos, então existe uma base formada por autovetores.

3.9. Operadores auto-adjuntos, operadores ortogonais

Na seção anterior, pouco pudemos dizer a respeito de que matrizes são diagonalizáveis ou não. Em casos especiais é possível conseguir resultados mais interessantes.

Dizemos que uma transformação linear T é *auto-adjunta* ou *simétrica* se $T' = T$. Uma definição equivalente em espaços com produto interno V é dizer que $\langle T\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, T\mathbf{v} \rangle$ para todo $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$.

Outro resultado importante para operadores auto-adjuntos vem abaixo.

Teorema 3.9.1. *Seja $T : V \to V$ auto-adjunto, e λ_1, $\mathbf{v}_1$ e λ_2, $\mathbf{v}_2$ autovalores e autovetores de T. Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ então $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são ortogonais: $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$.*

Demonstração. Note que

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = (T\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot (T\mathbf{v}_2) = \lambda_2 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2.$$

Logo $(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$. Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ então $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$. □

Uma importante propriedade de operadores auto-adjuntos é dada pelo resultado a seguir.

Teorema 3.9.2. *Seja $T : V \to V$ auto-adjunto. Então existe uma base ortonormal de V formada por autovalores de T.*

Note que o resultado acima *não* diz que toda base de autovalores de operadores auto-adjuntos é ortonormal, apenas que *existe* uma base ortonormal. De fato, por exemplo, para a matriz identidade n-dimensional, todo vetor de $\mathbb{R}^n$ é autovetor. Entretanto nem toda base do é $\mathbb{R}^n$ ortonormal.

Caso $T^{-1} = T'$, dizemos que T é ortogonal. A mesma definição e terminologia é empregada no caso de matrizes.

Um exemplo de matriz ortogonal e simétrica é a identidade, e de ortogonal e não simétrica é

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

se $\theta \neq k\pi$.

Note que se A é ortogonal, então

$$(\det A)^2 = \det A \det A' = \det(AA') = \det I = 1,$$

e portanto $\det A = \pm 1$.

Segue-se imediatamente da definição de matrizes ortogonais, que os seus vetores colunas e vetores linhas são ortonormais (ou seja, são ortogonais entre si e todos têm norma um).

Finalmente, o resultado abaixo serve para caracterizar quais matrizes são ortogonais.

TEOREMA 3.9.3. *Seja $T : V \to V$. Então as afirmativas abaixo são equivalentes.*

(1) T é ortogonal
(2) T leva bases ortogonais em bases ortogonais
(3) T preserva produtos internos, i.e., $\langle T\mathbf{u}, T\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$, para todo $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$.
(4) T preserva normas, i.e., $\|T\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|$ para todo $\mathbf{u} \in V$.

3.10. Exercícios

EXERCÍCIO 3.1. Se os vetores do conjunto $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$ são linearmente independentes, e $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ é invertível, então os vetores de $\{Av_1, Av_2, Av_3\}$ também são linearmente independentes.

EXERCÍCIO 3.2. Suponha que M seja uma matriz não nula tal que $M^2 = MM = 0$. Isto é possível? Em caso afirmativo, dê um exemplo. Se for possível, pode-se concluir que $det(M) = 0$?

EXERCÍCIO 3.3. Dizemos que uma matriz M é ortogonal se $M^T = M^{-1}$. Quais são os valores possíveis que o determinante de uma matriz ortogonal pode assumir? Mostre que se M é ortogonal, então ela "preserva" produto interno, i.e.

$$(M\mathbf{x}) \cdot (M\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

Aqui usamos o produto interno canônico, i.e., $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i$.

EXERCÍCIO 3.4. Mostre que $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ e $(3, 2, 1)$ são linearmente dependentes e que $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 1)$ são linearmente independentes.

EXERCÍCIO 3.5. Mostre que uma matriz quadrada é invertível se e somente se todos seus autovalores são diferentes de zero. É verdade que a dimensão de seu núcleo corresponda à multiplicidade algébrica do autovalor zero?

EXERCÍCIO 3.6. Seja $\mathcal{L}(V, W)$ o espaço das aplicações lineares $T : V \to W$. Defina operações de multiplicação por escalar e soma em $\mathcal{L}(V_1, V_2)$, tais que este seja um espaço vetorial com estas operações.

Exercício 3.7. Seja V espaço vetorial normado e de dimensão finita. Seja $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ base de V, e $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_n\end{bmatrix}^T$ o vetor formado pelas coordenadas de $\mathbf{v} \in V$ nesta base. Mostre que existem constantes c_0, c_1, que dependem da base mas não de $\mathbf{v}$ tais que

$$c_0\|\boldsymbol{\alpha}\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|\mathbf{v}\|_V \leq c_1\|\boldsymbol{\alpha}\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Acima, $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ denota a norma canônica do $\mathbb{R}^n$.

Exercício 3.8. Mostre que se V e W forem espaços vetoriais de dimensão finita, então toda transformação linear $T : V \to W$ é limitada.

Exercício 3.9. Sejam V e W espaços vetoriais, e $T : V \to W$ aplicação linear. Mostre que $N(T)$ e $\mathrm{Im}(V)$ são subespaços vetoriais de V e W respectivamente.

Exercício 3.10. Seja $T : V \to W$ operador linear e λ autovalor de T. Mostre que $\{\mathbf{v} \in V : T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\}$ é um subespaço vetorial de V.

Exercício 3.11. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, e λ autovalor de A. Mostre que o sistema $(A - \lambda I)\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ *sempre* tem soluções não triviais.

Exercício 3.12. Faça os detalhes da demonstração do teorema 3.8.2 no caso $k = 3$.

CAPíTULO 4

Limites de funções e Funções Contínuas

[1] A fim de discutirmos a noção de *continuidade de funções*, precisamos entender *limites de funções*. Este conceito será importante quando falarmos em derivação.

4.1. Limites de funções

Começamos por definir limites de uma função num ponto. Seja $I = (a, b)$ e $f : I \to \mathbb{R}$, e seja $c \in [a, b]$.

DEFINIÇÃO 4.1.1. *Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o limite de f em c se para toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em I com $x_n \neq c$ para todo n e $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, tem-se que a seqência $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e*

$$\lim_{n\to\infty} \big(f(x_n)\big) = L.$$

Escrevemos neste caso que $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

Uma observação a respeito da definição acima é que o valor do limite em c independe do valor que f assume em c. Na verdade, f não precisa nem estar definida neste ponto. Somente quando discutirmos continuidade é que o valor em c será importante, mas isto fica para outro depois.

EXEMPLO 4.1. Seja $f(x) = 2x$. Então $\lim_{x\to c} f(x) = c$ para qualquer ponto $c \in \mathbb{R}$. De fato, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que $x_n \to c$, então $f(x_n) = 2x_n \to 2c = f(x)$

EXEMPLO 4.2. Pela definição de limites, faz sentido perguntar, por exemplo, se existe $\lim_{x\to 0} 1/x$ e $\lim_{x\to 0}(\sin x)/x$, pois as funções não precisam estar definidas no ponto do limites (neste casos, o zero).

[1] Última Atualização: 26/03/2022

No primeiro caso, o limite não existe pois dada a sequência $(1/n) \to 0$, temos que $(f(1/n))_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge.

No segundo caso, $\lim_{x\to 0}(\sin x)/x = 1$, como veremos mais a frente.

Lema 4.1.2 (Unicidade do limite). Seja $I = (a, b)$ e $f : I \to \mathbb{R}$, e seja $c \in [a, b]$. Então f pode ter, no máximo, um limite em c.

Exemplo 4.3. Seja

$$\mathrm{sgn(x)} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Tomando-se as sequências $(-1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$, ambas convergindo para $c = 0$ mas nunca atingindo este valor, tem-se $\big(f(-1/n)\big)_{n\in\mathbb{N}} = -1$ e $\big(f(1/n)\big)_{n\in\mathbb{N}} = 1$. Então esta função não tem limite em $c = 0$, pois se o limite existe, este tem que ser único.

Assim como no caso de sequências, podemos definir operações com funções, como soma, subtração, etc. Se $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : I \to \mathbb{R}$, então definimos $(f + g) : I \to \mathbb{R}$ por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. De forma análoga definimos $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ e $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Se g é tal que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, definimos também $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$. Valem então resultados como o limite da soma é a soma do limite, etc.

Lema 4.1.3. Seja $I = (a, b)$. Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : I \to \mathbb{R}$, e seja $c \in [a, b]$. Suponha que existam os limites $\lim_{x\to c} f(x)$ e $\lim_{x\to c} g(x)$. Então

(1) $\lim_{x\to c}(f + g)(x) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$
(2) $\lim_{x\to c}(f - g)(x) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$
(3) $\lim_{x\to c}(fg)(x) = \lim_{x\to c} f(x) \lim_{x\to c} g(x)$
(4) $\lim_{x\to c}(f/g)(x) = \lim_{x\to c} f(x)/ \lim_{x\to c} g(x)$, se g for tal que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, e $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$.

Os resultados acima podem ser estendidos para um número finito de operações.

Exemplo 4.4. Seja $n \in \mathbb{N}$. Então $\lim_{x\to c} x^n = (\lim_{x\to c} x)^n = c^n$.

Exemplo 4.5. Se $c > 0$, então $\lim_{x\to c} 1/x = 1/(\lim_{x\to c} x) = 1/c$.

Uma condição extra tem que ser imposta quando lidamos com composição de funções. É natural perguntar, supondo-se que $\lim_{x\to c} g(x) = L$, quando

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(\lim_{x\to c} g(x)) = f(L)$$

ocorre. E a resposta é que a igualdade acima é verdadeira se $\lim_{y\to L} f(y) = f(L)$. Em outras palavras, basta que f seja contínua em L.

Alguns resultados que valem para sequências podem ser estendidos para limites de funções. Por exemplo, do Lema 4.1.4 tiramos o seguinte resultado. Sua demonstração é um exercício.

Lema 4.1.4 (sanduíche de limites, também chamado de Teorema do Confronto). Sejam $I = (a, b)$ e f, g e h funções de I em $\mathbb{R}$, e seja $c \in [a, b]$. Suponha que para todo $x \in I$ com $x \neq c$ tivermos $f(x) \le g(x) \le h(x)$, e que $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$. Então $\lim_{x\to c} g(x) = L$.

Lema 4.1.5. Sejam $I = (a, b)$ e $f : I \to \mathbb{R}$, e seja $c \in [a, b]$. Suponha que para todo $x \in I$ com $x \neq c$ tivermos $a \le g(x) \le b$, e que existe o limite de f em c. Então $a \le \lim_{x\to c} f(x) \le b$.

4.1.1. Limites laterais, infinitos e no infinito. Assim como na seção anterior, assumimos que $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$. Seja agora $c \in [a, b]$. Dizemos que L é *limite à direita* de f em c se para toda sequência (x_n) tal que $x_n > c$ e $x_n \to c$, tem-se $f(x_n) \to L$. Neste caso escrevemos que $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$.

Definição similar vale para limite à esquerda (e escrevemos $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$).

É possível mostrar que se $c \in (a, b)$, então

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \iff \lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) = L. \tag{4.1.1}$$

Exemplo 4.6. Seja $f(x) = \operatorname{sgn}(\mathrm{x})$, como no exemplo 4.3. Como $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$, então não existe limite de f no zero.

Outra definição importante é a de *limite infinito*. Dizemos que f tende a $+\infty$ em c se para todo $x_n \to c$ com $x_n \neq c$, tem-se $f(x_n) \to +\infty$. Escrevemos então que $\lim_{x\to c} = +\infty$. Definições similares valem quando f tende a $-\infty$ em c ou para limites laterais tendendo a $-\infty$ ou $+\infty$.

Em qualquer caso em que limites tendam a infinito (mais ou menos), os limites *não existem*! Caso $\lim_{x\to c^+} = \pm\infty$, ou $\lim_{x\to c^-} = \pm\infty$, dizemos que a reta dada por $x = c$ é uma *assíntota vertical*.

EXEMPLO 4.7. $\lim_{x\to 0} 1/x^2 = +\infty$. De fato, dado $x_n \to 0$, tem-se $f(x_n) = 1/x_n^2 \to +\infty$.

EXEMPLO 4.8. Seja $g : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 1/x$. Então g não tende a $-\infty$ ou a $+\infty$ no zero pois $g(x) < 0$ se $x < 0$ e $g(x) > 0$ se $x > 0$.

Finalmente definimos limites "no infinito". Seja $a \in \mathbb{R}$ e $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é limite de f quando $x \to +\infty$ se para todo $x_n \to +\infty$ tem-se $f(x_n) \to L$. Analogamente podemos definir limite de f quando $x \to -\infty$.

Chamamos a reta $y = L$ de *assíntota horizontal* no caso de $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.

EXEMPLO 4.9. $\lim_{x\to-\infty} 1/x = \lim_{x\to+\infty} 1/x = 0$.

EXEMPLO 4.10. Nem sempre existe limite "no infinito. Tome por exemplo $\sin(x)$.

Um último caso de interesse é quando $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (e as definições análogas usando $-\infty$).

4.2. Funções Contínuas

A partir das definições de limites de funções anteriomente vistas, fica mais fácil definir continuidade e estudar suas propriedades.

4.2.1. Introdução e exemplos. Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é *contínua em* $c \in A$ se $f(c) = \lim_{x\to c} f(x)$.

Outro resultado útil é o seguinte *critério de descontinuidade:* f não é contínua em c se e somente se existe sequência (x_n) em A convergindo para c mas $\big(f(x_n)\big)$ não convergindo para $f(c)$.

Exemplo 4.11. $g(x) = x$ é contínua em $\mathbb{R}$. De fato, para todo $c \in \mathbb{R}$, temos $\lim_{x\to c} g(x) = c = g(c)$.

Exemplo 4.12. A função sgn(x) (ver exemplo 4.3) não é contínua no zero, já que não existe $\lim_{x\to 0}$ sgn(x).

Se uma função $f : A \to \mathbb{R}$ não está definida num dado ponto $c \notin A$, então pode-se perguntar se é possível definir $f(c)$ tal que f seja contínua em c.

Por exemplo, considere a função $f(x) = 2x + 3$ definida em $(0, 1)$, Então f não está definida em $x = 0$ nem em $x = 1$. Mas podemos *estender* f, definindo $f(0) = 3$ e $f(1)5$, tornando a função contínua em $x = 0$ e $x = 1$.

Exemplo 4.13. Nem sempre tal extensão contínua é possível. Por exemplo no caso de $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$, não se pode definir $f(0)$ tal que $f : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ seja contínua.

4.2.2. Composição de funções. Em geral, se f e g são contínuas, então $f+g$, $f-g$, fg também o são. Da mesma forma, se $h(x) \neq 0$ para todo x do domínio, então f/h é contínua. O próximo resultado garante que a *composição* de funções contínuas também é contínua.

Teorema 4.2.1. *Sejam A, $B \subset \mathbb{R}$, e $f : A \to B$ e $g : B \to \mathbb{R}$. Assuma f contínua em $c \in A$ e g contínua em $f(c) \in B$. Enão a composição $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ é contínua em c.*

Exemplo 4.14. A função $g(x) = |x|$ é contínua em $\mathbb{R}$. Realmente, como

$$|g(x) - g(y)| = ||x| - |y|| \leq |x - y|,$$

se (x_n) converge para x então

$$|g(x_n) - g(x)| \leq |x_n - x| \implies \lim_{n\to\infty} \big(g(x_n)\big) = g(x).$$

Portanto, se $f : A \to \mathbb{R}$ é contínua em $c \in A$, entao $h(x) = |f(x)|$ também o é, pois $h = g \circ f$ é composição de funções contínuas.

4.2.3. Funções Contínuas em intervalos fechados e limitados. Um resultado com várias aplicações diz que funções contínuas definidas em conjuntos fechados e limitados são limitadas e atingem seus pontos extremos. Chamamos um intervalo de fechado limitado quando é da forma $[a, b]$, para $a < b$.

DEFINIÇÃO 4.2.2. *Dizemos que $f : A \to \mathbb{R}$ é limitada em A se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \le M$ para todo $x \in A$.*

EXEMPLO 4.15. $\sin x$ é limitada em $\mathbb{R}$ pois $|\sin x| \le 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

EXEMPLO 4.16. $1/x$ não é limitada em $\mathbb{R}^+$. Entretanto $1/x$ é limitada em $(1/2, +\infty)$ pois $|1/x| \le 2$ para todo x neste intervalo.

TEOREMA 4.2.3. *Seja $I = [a, b]$, e $f : I \to \mathbb{R}$ contínua em I. Então f é limitada em I.*

Outra noção importante é o de máximos e mínimos. Dizemos que $f : A \to \mathbb{R}$ tem valor máximo em A se existe $x^* \in A$ tal que $f(x^*)$ é máximo de $f(A)$. De forma análoga dizemos que f tem valor mínimo em A se existe $x_* \in A$ tal que $f(x_*)$ é mínimo de $f(A)$. Chamamos x^* de ponto de valor máximo e x_* de ponto de valor mínimo.

OBSERVAÇÃO 4.1. Se uma função f como acima definida assume seus valores máximo e mínimo em A, então f é limitada em A.

EXEMPLO 4.17. $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/(1 - x^2)$ não é limitada em $(-1, 1)$, mas é limitada em $[-1/2, 1/2]$ por exemplo.

EXEMPLO 4.18. $f(x) = x$ é contínua e limitada em $(-1, 1)$, mas não assume valor máximo nem mínimo em $(-1, 1)$. Entretanto f assume seus valores máximo e mínimo em $[-1, 1]$.

EXEMPLO 4.19. $h(x) = 1/(1 + x^2)$ é limitada em $\mathbb{R}$, assume seu valor máximo em $x^* = 0$, mas não assume seu valor mínimo. Isto porque $\inf h(\mathbb{R}) = 0 \ne h(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observação 4.2. Note que pontos de máximo e mínimo não são únicos em geral. Por exemplo, $f(x) = x^2$ tem -1 e 1 como seus dois pontos de máximo em $[-1, 1]$.

Teorema 4.2.4 (Pontos Extremos). *Seja $I = [a, b]$, e $f : I \to \mathbb{R}$ contínua em I. Então f tem pelo menos um ponto de máximo e um de mínimo em I.*

Outro resultado de grande importância é o Teorema do Valor Intermediário que garante a preservação de intervalos por funções contínua.

Teorema 4.2.5 (Teorema do Valor Intermediário). *Sejam $a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

Concluímos esta parte com uma importante consequência dos resultados anteriores.

4.3. Exercícios

Exercício 4.1. Responda se é verdadeiro ou falso, justificando suas respostas:

(1) Para existir $\lim_{x\to c} f(x)$, a função f tem que estar definida em c
(2) (ANPEC 97, #3) $\lim_{x\to 1}(x - 1)/(\sqrt{x} - 1) = 3$
(3) A função $f(x) = \cos(x)/(x^2 - 1)$ é contínua em $(0, 1]$, mas não em $[0, 1]$
(4) A função $(x^2 - 5x + 6)/(x - 2)$ pode ser estendida continuamente em $x = 2$ por $f(2) = 1$
(5) A função $f + g$ é contínua se e somente se f e g também o forem

Exercício 4.2. Responda se é verdadeiro ou falso, justificando suas respostas:

(1) A função $f(x) = \max\{0, \sin x\}$ é descontínua
(2) Toda função definida em $(0, 1)$ pode ser estendida contínuamente para $(0, 1]$
(3) Se uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não é limitada, então $\lim_{x\to\infty} |f(x)| = +\infty$
(4) Toda função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ é limitada

(5) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em zero, então $f(x) > 0$ para todo x próximo o suficiente de zero.

EXERCÍCIO 4.3. Determine os pontos de continuidade da função $[x]$, que retorna para cada $x \in \mathbb{R}$ o maior inteiro menor ou igual a x. Por exemplo, $[2] = 2$, $[2.5] = 2$, $[-2.5] = -3$.

EXERCÍCIO 4.4. Construa uma função $f : [0, 1] \to [0, 1]$ que seja descontínua em *todos* os pontos, e outra que seja contínua somente no zero.

EXERCÍCIO 4.5. Construa $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ injetiva e não monótona. Considere $D \subseteq \mathbb{R}$ e construa $f : D \to \mathbb{R}$, contínua, injetiva e não monótona.

EXERCÍCIO 4.6. Demonstre o Lema 4.1.4.

EXERCÍCIO 4.7. Demonstre o Lema 4.1.5.

EXERCÍCIO 4.8. Demonstre a equivalência 4.1.1.

CAPíTULO 5

Derivadas e suas aplicações

[1] Neste capítulo vemos a noção de diferenciabilidade e suas aplicações.

5.1. Definições e Exemplos

Seja $f : I \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo em $\mathbb{R}$. Dizemos que f é diferenciável em $c \in I$ se o limite

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

existir.

Se f é diferenciável em todo ponto de I dizemos que f é diferenciável em I. Neste caso note que a derivada f' é uma função de I em $\mathbb{R}$.

Exemplo 5.1. Se $f(x) = x^2$, então para $c \in \mathbb{R}$ tem-se

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{x^2 - c^2}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{(x+c)(x-c)}{x - c} = \lim_{x \to c}(x + c) = 2c.$$

Teorema 5.1.1. *Se $f : I \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo em $\mathbb{R}$ é diferenciável em $c \in I$, então f é continua em c.*

Observação 5.1. Pelo teorema acima, diferenciabilidade implica em continuidade. O inverso entretanto não é verdade em geral. Seja por exemplo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = |x|$. Então f é continua em $\mathbb{R}$ mas não é diferenciável em zero pois para $x \neq 0$ temos

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Logo o limite quando $x \to 0$ não existe.

[1] Última Atualização: 29/06/2022

5.2. Propriedades da Derivada

Seja f e g funções de $I \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo em $\mathbb{R}$, ambas diferenciáveis em $c \in I$. Então

(1) $(\alpha f)'(c) = \alpha f'(c)$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$.
(2) $(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$.
(3) $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$
(4)
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = f'(c)\frac{1}{g'(c)} - \frac{f(c)}{g^2(x)}g'(c).$$

Exemplo 5.2. Pela regra acima temos que se $f(x) = x^n$, para $n \in \mathbb{N}$, então f é diferenciável e $f'(c) = nx^{n-1}$.

Teorema 5.2.1 (Regra da Cadeia). *Sejam I e J intervalos em $\mathbb{R}$ e $g : I \to \mathbb{R}$ e $f : J \to \mathbb{R}$, onde $f(J) \subset I$. Se f é diferenciável em $c \in J$ e g é diferenciável em $f(c)$, ent ao $g \circ f$ é diferenciável em c e*

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c))f'(c).$$

Exemplo 5.3. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Logo, para $x \neq 0$ temos $f'(x) = 2x \sin 1/x - \cos 1/x$. Em $x = 0$ usamos a definição:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0.$$

Logo f é diferenciável em $\mathbb{R}$ mas f' não é contínua no zero.

Teorema 5.2.2 (Derivada da Função Inversa). *Seja $I \subset \mathbb{R}$ intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ contínua e invertível com inversa $g : J \to \mathbb{R}$ contínua, e $J = f(I)$. Se f é diferenciável em $c \in I$, então g é diferencável em $d = f(c)$ se e somente se $f'(c) \neq 0$. Neste caso,*

$$g'(d) = \frac{1}{f'(c)} = \frac{1}{f'(g(d))}$$

Exemplo 5.4. Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = x^n$, onde $n \in \mathbb{N}$. Então f tem inversa $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, e $g(y) = \sqrt[n]{y}$. Para $y > 0$ temos então

$$g'(y) = \frac{1}{ny^{\frac{n-1}{n}}}.$$

Note que g não é diferenciável no zero pois $f'(0) = 0$.

5.3. Aplicações

Uma primeira e importante aplicação diz respeito a pontos extremos locais. Dizemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, tem um *máximo local (ou relativo)* em $c \in I$ se existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in (c - \delta, c + \delta) \cap I \implies f(x) \leq f(c).$$

Definição análoga serve para mínimo local. Chamamos um ponto de máximo ou mínimo local de ponto extremo local.

O resultado a seguir descreve condição necessária para um ponto x ser extremo local de uma função f definida num intervalo aberto. Basta que c seja ponto crítico, i.e., $f'(c) = 0$.

Teorema 5.3.1 (Ponto extremo interior). *Seja $f : I \to \mathbb{R}$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, e $c \in I$ ponto extremo local. Se f é diferenciável em c, então c é ponto crítico, i.e., $f'(c) = 0$.*

Definição 5.3.2. *Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é crescente se*

$$y > x \implies f(y) \geq f(x). \tag{5.3.1}$$

e decrescente se

$$y > x \implies f(y) \leq f(x). \tag{5.3.2}$$

Dizemos que a função é estritamente crescente se

$$y > x \implies f(y) > f(x). \tag{5.3.3}$$

e estritamente decrescente se

$$y > x \implies f(y) < f(x). \tag{5.3.4}$$

Note a diferença entre (5.3.1), (5.3.2) *e* (5.3.3), (5.3.4). *No caso de* (5.3.1), (5.3.2), *dizemos que a função é monótona, e no caso de* (5.3.3), (5.3.4) *dizemos que é estritamente monótona.*

Infelizmente, a notação acima não é unânime. Alguns autores [**20**, **27**] *chamam* (5.3.3) *de crescente e* (5.3.1) *de não decrescente, por exemplo.*

O resultado abaixo garante condições necessárias e suficientes para uma função ser crescente num intervalo.

Lema 5.3.3. Seja $I \subset \mathbb{R}$ intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável em I. Então

(1) f é crescente em I se e somente se $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.
(2) f é decrescente em I se e somente se $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in I$.

Observação 5.2. É possível modificar a demonstração acima e mostrar que $f'(x) > 0$ implica em f estritamente crescente. Entretanto, mesmo funções que tem derivada nula em alguns pontos podem ser estritamente crescentes, como por exemplo $f(x) = x^3$.

5.4. Teorema de Taylor e Aplicações

Uma ferramenta poderosa em análise com várias consequências é o Teorema de Taylor. A expansão de Taylor aproxima localmente uma função por um polinômio. Suponha que $f : I \to \mathbb{R}$ onde $I \subset \mathbb{R}$ tenha $n \geq 0$ derivadas num ponto $x_0 \in I$. Defina

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!},$$

onde usamos a notação que $g^{(k)}(c)$ indica a k-ésima deriva de g num ponto c.

Note que com a definição acima, temos $f^{(k)}(x_0) = P_n^{(k)}(x_0)$ para $k = 1, \ldots, n$. Chamamos P_n de polinômio de Taylor de ordem n para f em x_0, e o resultado abaixo diz o quão boa é a aproximação de uma função por seu polinômio de Taylor.

Teorema 5.4.1 (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange). *Seja $n \geq 0$ e $I = [a, b]$, com $a < b$. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ n vezes diferenciável em I com $f^{(n)}$ contínua* *em I e tal $f^{(n+1)}$ exista em (a,b). Se x_0, $x \in I$ então existe $\xi \in (x_0,x) \cap (x,x_0)$ tal que*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{5.4.1}$$

Uma primeira aplicação refere-se à caracterização de extremos locais. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e seja $x_0 \in \mathbb{R}$ tais que $f'(x_0) = 0$:

(1) Se $f''(x_0) > 0$, então x_0 é mínimo local
(2) Se $f''(x_0) < 0$, então x_0 é máximo local
(3) Se $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) = ne0$, então x_0 não é máximo nem mínimo local

Uma segunda aplicação diz respeito à funções convexas [**14**]. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Dizemos que $f : I \to \mathbb{R}$ é *convexa* em I se para todo $t \in [0,1]$ e x_1, $x_2 \in I$ temos

$$f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

A função será *estritamente convexa* se a desigualdade acima é estrita para $x_1 \neq x_2$ e $t \in (0,1)$. Graficamente, uma função é convexa se o gráfico de f entre x_1 e x_2 está abaixo da reta que une os pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$.

TEOREMA 5.4.2. *Seja I intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$. Então f é convexa se e somente se $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.*

OBSERVAÇÃO 5.3. Se uma função for convexa, então todo ponto de mínimo local é global. E se a função for estritamente convexa, então há, no máximo, um ponto de mínimo [**14**].

5.4.1. Pontos de inflexão e concavidades. Dada f uma função real, dizemos que um ponto é de inflexão se este "separa" curvas de concavidades contrárias. Se f for duas vezes diferenciável e c for ponto de inflexão então $f''(c) = 0$. Mas isto não é suficiente. Para descobrir se um ponto c onde a segunda derivada se anula é de inflexão, basta checar se f'' muda de sinal no intervalo $(c-\epsilon, c+\epsilon)$, para todo $\epsilon > 0$.

Quanto a concavidades, dizemos que f é *côncava* (para baixo) em (a,b) se $f'' < 0$ em (a,b). Dizemos que f é *convexa* (côncava para cima) em (a,b) se $f'' > 0$ em (a,b).

5.5. Regra de L'Hôpital

Considere o problema de achar

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x},$$

se este limite existir. Surpreendentemente, vale a regra de que, nestes casos, o limite da razão das funções é igual ao limite da razão das derivadas das funções.

TEOREMA 5.5.1. *Sejam f e g duas funções reais diferenciáveis definidas na intervalo (a,b). Suponha também que g e g' seja não nula e que*

$$\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) = 0, \text{ ou que } \lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) = \pm\infty.$$

Temos então que

$$\text{se } \lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha, \text{ então } \lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha.$$

Mesmo se α for $-\infty$ ou ∞, o resultado continua valendo. Vale também se $x \to a$, ou mesmo para pontos interiores, onde basta tomar os dois limites laterais.

EXEMPLO 5.5.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

EXEMPLO 5.6. Nunca usar l'Hôspital cegamente! Aplicando l'Hôspital:

$$\lim_{x\to \pi^-} \frac{\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to \pi^-} \frac{\cos x}{\sin x} = -\infty.$$

Isto está errado! Note que o numerador $\lim_{x\to\pi^-} \sin x = 0$. Entretanto, o denominador $\lim_{x\to\pi^-}(1-\cos x) = 2$. Logo

$$\lim_{x\to \pi^-} \frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{\lim_{x\to\pi^-} \sin x}{\lim_{x\to\pi^-}(1-\cos x)} = 0.$$

Considere o limite $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, temos limites de produtos indeterminados do tipo "$\infty \cdot 0$". Escrevemos o produto como uma das opções abaixo

$$fg = \frac{f}{1/g} = \frac{g}{1/f},$$

e depois aplicamos l'Hôspital.

EXEMPLO 5.7.

$$\lim_{x\to 0} x \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0} x = 0.$$

O caso de *diferença indeterminada* "$\infty - \infty$" pode ser calculado da seguinte forma. Suponha que $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$. Então $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)]$ pode ser calculado manipulando-se algebricamente $f - g$ para obter um limite da forma ∞/∞ ou $0/0$.

EXEMPLO 5.8.

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} (\sec x - \tan x) = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right) = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0.$$

Potências indeterminadas 0^0, ∞^0, 1^∞, podem surgir quando calculamos limites do tipo $f(x)^{g(x)}$. Nestes casos tomamos logarítimos:

$$y = f(x)^{g(x)} \implies \ln y = g(x) \ln f(x),$$

ou escrever $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$.

EXEMPLO 5.9. O $\lim_{x\to 0^+}(1 + \sin 4x)^{\cot x}$ pode ser calculado definindo-se $y = (1 + \sin 4x)^{\cot x}$ e portanto

$$\ln y = \cot x \ln(1 + \sin 4x)$$

e então

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \cot x \ln(1 + \sin 4x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1 + \sin 4x)}{\tan x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{4\cos 4x}{1+\sin 4x}}{\sec^2 x} = 4.$$

Note que $\lim_{x\to 0^+} \ln y = 4$, então

$$\lim_{x\to 0^+} (1+\sin 4x)^{\cot x} = \lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^4.$$

Exemplo 5.10. Para calcular $\lim_{x\to 0^+} x^x$ escrevemos $x^x = e^{x\ln x}$, e então

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1.$$

Note que usamos $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$.

5.6. Exercícios

Exercício 5.1. (**[27]**) Se $y(x)$ satisfaz $x^3 + y^3 = 6xy$, encontre y'.

Exercício 5.2. Determine se as afirmativas são verdadeiras ou falsas (e justifique):

(1) A função $f(x) = |x|$ tem ponto de mínimo no zero pois $f'(0) = 0$.
(2) Toda derivada de uma função diferenciável é contínua
(3) Se x^* é ponto extremo de uma função diferenciável $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, então $f'(x^*) = 0$.
(4) Se x^* é ponto extremo de uma função diferenciável $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, então $f'(x^*) = 0$.
(5) Se f é uma função convexa, então $\frac{f(x)+f(y)}{2} > f\left(\frac{x+y}{2}\right)$.

Exercício 5.3. (**[27]**) Encontre os pontos de máximo e mínimo de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

Exercício 5.4. Descubra se a afirmativa a seguir é verdadeira ou falsa (e justifique):

Seja

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ x(x-2) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Então f é diferenciável em $\mathbb{R}$.

Exercício 5.5. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ g(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

onde g é uma função dada. Descubra se as afirmativas a seguir são verdadeiras ou falsas (e justifique):

(1) Se f é diferenciável em zero então g é contínua em zero com $g(0) = 0$
(2) Se g é contínua em zero com $g(0) = 0$ então f é diferenciável em zero
(3) Se f seja diferenciável no zero, $f'(0) = 0$.
(4) Mesmo que $f'(0)$ exista, seu valor vai depender da função g
(5) f nunca será diferenciável em zero

Exercício 5.6. Suponha que f seja uma função suave. Mostre que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

Exercício 5.7. (ANPEC 1990, Questão 2) Se $f(x) = x^a$, $x \geq 0$ e $0 < a < 1$, examine as seguintes afirmações:

(1) A função f é crescente.
(2) A função df/dx é crescente.
(3) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.
(4) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.
(5) Se $x > 0, \quad y > 0$, então $\frac{f(x)+f(y)}{2} > f\left(\frac{x+y}{2}\right)$.

Exercício 5.8. Calcule

(1) $\lim_{x \to 0} (\ln x)/x^{1/4}$
(2) $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$
(3) $\lim_{x \to 0^+} x^x$
(4) $\lim_{x \to 0^-} (\cos x)/x$
(5) $\lim_{x \to \infty} e^x/x^4$

Exercício 5.9. Suponha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável em $c \in \mathbb{R}$ e $f(c) = 0$. Mostre então que $g(x) = |f(x)|$ é diferenciável em c se e somente se $f'(c) = 0$.

Exercício 5.10. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - c_i)^2,$$

onde $c_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \ldots, n$, e $n \in \mathbb{N}$. Ache um ponto de mínimo relativo de f. Mostre que é único.

Exercício 5.11. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável. Mostre que se f' é positiva em I, i.e., $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é estritamente crescente.

CAPíTULO 6

Funções trigonométricas, logarítmicas e exponenciais

[1]

Neste capítulo descrevemos algumas funções especiais, como as funções trigonométricas, o logarítmo e a exponencial.

6.1. Funções trigonométricas

Definimos aqui algumas funções trigonométricas, começando pelas funções seno e cosseno. Nossas definições diferem das definições geométricas "usuais", pois usamos séries de potências. Entretanto são as mesmas funções, como pode ser visto em [Djairo Figueiredo].

6.1.1. Senos e cossenos. Definimos as funções sin e cos de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ através das séries de potências

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots.$$

A derivação termo a termo nas séries de potências acima é válida, e portanto

$$\sin' x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \cos x, \qquad \cos' x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2n \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} = -\sin x.$$

Note que das definições, a função seno é ímpar ($\sin(-x) = -\sin x$), e a função cosseno é par ($\cos(-x) = \cos x$). Temos ainda uma igualdade fundamental, dada pelo resultado abaixo.

Lema 6.1.1. Para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

[1] Última Atualização: 22/06/2020

DEMONSTRAÇÃO. Seja $f(x) = \sin^2 x + \cos^2$. Então $f'(x) = 2\sin x \cos x - 2\cos x \sin x = 0$. Logo f é constante. Basta agora ver que $f(0) = 1$, e então

$$1 = f(0) = f(x) = \sin^2 x + \cos^2 .$$

$\square$

COROLÁRIO 6.1.2. Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que $|\sin x| \leq 1$ e $|\cos x| \leq 1$.

Valem também as identidades abaixo.

LEMA 6.1.3. Para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se que

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a, \qquad \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Finalmente, uma propriedade importante destas funções são suas periodicidades. Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *periódica*, com período T se $f(x+T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

LEMA 6.1.4. As funções sin e cos são periódicas com período 2π.

6.1.2. Outras funções trigonométricas. Seja $\tan x = \sin x / \cos x$ definida em $\mathbb{R}$ excetuando-se $\{\pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \dots\}$. Note que $\tan x$ é periódica com período π, pois

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x.$$

Outras funções trigonométricas são:

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x}.$$

6.2. Funções log e exponencial

Duas funções que têm importância fundamenal na matemática são dadas pelo logaritmo e sua inversa, a função exponencial. Há formas diversas de definirmos estas funções, e escolhemos aquela que nos parece mais direta.

6.2.1. O logaritmo. Definimos, para $x > 0$,

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{s}\, ds.$$

Observamos diretamente da definição que se $x > 1$, então $\ln x > 0$ e que se $x \in (0,1)$, então

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{s}\, ds = -\int_x^1 \frac{1}{s}\, ds < 0.$$

Segue ainda de definição que $\ln 1 = 0$. Temos ainda os seguintes resultados:

(1) $\ln x$ é crescente
(2) $\ln x$ é contínua
(3) $\ln' x = 1/x$
(4) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
(5) $\ln x^r = r \ln x$, para $r \in \mathbb{Q}$
(6) $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$
(7) $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$

As demonstrações dos resultados acima não são complicadas. O resultado (1) vem do fato que se $x > y>0$, então $\ln x - \ln y = \int_y^x 1/s\, ds > 0$. Os fatos dados por (2) e (3) são resultados diretos da definição do ln e as propriedades das integrais. Para demonstrar (4), definimos $f(x) = \ln(xy)$, e portanto $f'(x) = 1/x = \ln' x$. Logo $f(x) - \ln x$ é constante. Como $f(1) - \ln 1 = \ln y$, obtemos o resultado. A identidade (5) é verdadeira para $r = 0$ pois $\ln 1 = 0$. Para r natural, aplicamos (4) $r-1$ vezes, pois $x^r = x \cdots x$. Se $r = 1/n$, então usamos (4) novamente com $x = x^{1/n} \cdots x^{1/n}$. O caso geral para racionais positivos vem de $x^{m/n} = x^m x^{1/n}$. Para expoentes negativos, note que se $r > 0$ por exemplo, $0 = \ln(x^r x^{-r}) = \ln x^r + \ln x^{-r}$. Portanto, $\ln x^{-r} = -\ln x^r = -r \ln x$.

Observação 6.1. Vale a pena ressaltar que (5) vale também para qualquer r real, mas esta afirmativa esbarra no fato de que ainda não temos uma definição para x^r, quando r não é racional. Este lapso será resolvido somente em (6.2.1).

Finalmente, para (6) (7), basta usar que o logarímo é função crescente e considerar as sequências $\ln 2^n$ e $\ln 2^{-n}$.

Podemo definir a logarítmo “na base b” via

$$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)},$$

para $b \neq 1$ positivo.

6.2.2. A exponencial. Como a função ln é estritamente crescente, ela é invertível. Denominando esta inversa por $\exp x$, onde $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, note que

(1) $\exp(0) = 1$
(2) $x > 0 \implies \exp x > 1$
(3) $x < 0 \implies \exp x < 1$
(4) $\exp x$ é contínua
(5) $\exp x$ é diferenciável e $\exp' x = \exp x$
(6) $\exp(x + y) = \exp x \cdot \exp y$
(7) $\exp(\alpha x) = (\exp x)^\alpha$, para $\alpha \in \mathbb{R}$

A demonstração da fórmula em (5) é dada por

$$\exp' x = \frac{1}{\ln'(\exp x)} = \exp x.$$

Com a ajuda das funções acima descritas, podemos definir

$$a^b = \exp(b \ln a) \text{ para } a > 0 \text{ e } b \in \mathbb{R}. \tag{6.2.1}$$

Definimos o número especial $e = \exp 1$. Note então de (7) que

$$\exp \alpha = \exp(\alpha 1) = (\exp 1)^\alpha = e^\alpha \text{ para } \alpha \in \mathbb{R}.$$

CAPíTULO 7

Funções de várias variáveis

[1] Neste capítulo estudamos as propriedades de funções de várias variáveis. Nos concentramos principalmente nas questões relativas a diferenciabilidade destas funções e aplicações.

7.1. Introdução

Consideamos aqui funções $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, onde, tipicamente, $m = 2, 3$ e $n = 1$. Assim como no caso unidimensional, dizemos que uma função f é contínua em $\mathbf{x}_0$ se dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \implies \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < \epsilon.$$

Analogamente ao caso unidimensional, podemos definir o conceito de limite de funções num determinado ponto, ver Exercício 7.1.

Outro conceito importante é o de curvas (em duas dimensões) ou superfícies (em três dimensões) de nível, que chamaremos sempre de curvas de nível. Uma curva de nível é dada pelo conjunto de pontos que têm imagem constante, i.e., dado $c \in \mathbb{R}$, definimos

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \ f(\mathbf{x}) = c\}.$$

7.2. Derivadas parciais e planos tangentes

Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Então definimos a *i-ésima derivada parcial* de f num ponto $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ por

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m)}{h}$$

[1] Última Atualização: 31/08/2020

quando o limite acima existir. Se cada uma das derivadas parciais existirem, definimos o *vetor gradiente* (também chamado de *gradiente* pelos íntimos) dada por

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{x})\right).$$

Note-se que depois de obtida uma derivada parcial, pode-se derivar novamente para se obter segundas derivadas parciais. Por exemplo, derivando-se na direção i e depois na direção j obtemos a função $\partial^2 f/\partial x_j \partial x_i$. Para funções "suaves", a ordem em que se deriva não importa. Em particular, se $\partial^2 f/\partial x_j \partial x_i(\mathbf{x}_0)$ e $\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j(\mathbf{x}_0)$ existem e são contínuas numa vizinhança de $\mathbf{x}_0$, então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0).$$

Considere agora o caso bidimesional e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Com o conceito de derivadas parciais, é possível, quando a função é suave o suficiente, definir o plano tangente ao gráfico de f num determinado ponto $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Começamos por lembrar que a reta tangente no caso $m = 1$ é definida pelos pontos (x, z) tais que

$$z - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = 0.$$

Fixando primeiramente y_0 temos que $f(x, y_0)$ é uma função de uma dimensão, e a reta tangente na direção x então é dada pelos pontos (x, y_0, z) tais que

$$z - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) = 0. \tag{7.2.1}$$

De forma análoga, fixando-se x_0, obtém-se a reta tangente à $f(x, y_0)$ na direção y, e esta é dada pelos pontos (x_0, y, z) tais que

$$z - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - x_0) = 0. \tag{7.2.2}$$

Dadas as duas retas acima, tangentes ao gráfico de f, podemos determinar o pano tangente P a este mesmo gráfico. Tomando $x = x_0 + 1$ em (7.2.1) e $y = y_0 + 1$ em (7.2.2), temos que

$$\left(x_0 + 1, y_0, f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right), \qquad \left(x_0, y_0 + 1, f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$$

pertencem ao plano P. Como $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$ também pertence a P, então os vetores

$$\mathbf{v}_x = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right), \qquad \mathbf{v}_y = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)$$

são tangentes a P. Portanto

$$\mathbf{N} = \mathbf{v}_x \times \mathbf{v}_y = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)$$

é normal a P. Como temos que

$$P = \{(x, y, z) : \big(x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0)\big) \cdot \mathbf{N} = 0\}$$

então P é definido pela equação

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) - z + f(x_0, y_0) = 0.$$

7.3. Diferenciabilidade

A noção de diferenciabilidade e de derivada em dimensões maiores simplesmente generaliza de forma natural a derivada unidimensional. Seja $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. Dizemos que $\boldsymbol{f}$ é diferenciável em $\mathbf{x}$ se

$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{\|\boldsymbol{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \boldsymbol{f}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0,$$

onde $\boldsymbol{f}'(\mathbf{x})$ tem a representação matricial $[\boldsymbol{f}'(\mathbf{x})] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ dada por

$$[\boldsymbol{f}'(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix}.$$

A matriz $[\boldsymbol{f}'(\mathbf{x})]$ também é chamada de *matriz jacobiana* de f no ponto $\mathbf{x}$. . Chamamos $\boldsymbol{f}'(\mathbf{x})$ de derivada de $\boldsymbol{f}$ em $\mathbf{x}$, e que também denotamos por $\boldsymbol{D}f(\mathbf{x})$.

Assim como em uma dimensão, $\boldsymbol{f}$ é diferenciável em $\mathbf{x}$ se e somente se existir uma função $\boldsymbol{r}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ tal que

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})=\boldsymbol{f}(\mathbf{x})+\boldsymbol{f}'(\mathbf{x})(\mathbf{h})+\mathbf{r}(\mathbf{h})\quad\text{com}\ \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\frac{\|\mathbf{r}(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|}=0. \tag{7.3.1}$$

Note que pela identidade acima, temos imediatamente que diferenciabilidade implica em continuidade.

Exemplo 7.1. Considere $\boldsymbol{A}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ aplicação linear e $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ dada por $\boldsymbol{f}(\mathbf{x})=\boldsymbol{A}(\mathbf{x})+\boldsymbol{c}$, onde $\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^n$ é vetor constante. Então $\boldsymbol{f}'(\mathbf{x})(\mathbf{h})=\boldsymbol{A}(\mathbf{h})$ para todo $\mathbf{x},\mathbf{h}\in\mathbb{R}^m$. Note que neste caso, a derivada $\boldsymbol{f}'(\mathbf{x})$ é na verdade *independente* de $\mathbf{x}$.

Exemplo 7.2. Seja a matriz $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ e $\mathbf{c}=(c_1,\dots,c_m)$ vetor constante. Considere ainda $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ tal que para $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_m)$ tem-se $\boldsymbol{f}(\mathbf{x})=(f_1(\mathbf{x}),\dots,f_n(\mathbf{x}))$ e

$$\vec{\boldsymbol{f}}(\mathbf{x})=A\vec{\mathbf{x}}+\vec{\boldsymbol{c}}\qquad\text{i.e., } f_i(\mathbf{x})=\sum_{j=1}^m A_{ij}x_j+c_j\quad\text{para } i=1,\dots,n.$$

Então, para $\mathbf{h}=(h_1,\dots,h_m)$ tem-se $\boldsymbol{f}'(\mathbf{x})(\mathbf{h})=\mathbf{y}$ onde $\vec{\mathbf{y}}=A\vec{\mathbf{h}}$, i.e.,

$$y_i=\sum_{j=1}^m A_{ij}h_j.$$

Compare com o exemplo 7.1.

Uma interessante forma de analisarmos uma função em várias variáveis é restringindo esta função numa direção e usando propriedades de funções de apenas uma variável. Para tanto, sejam $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^m$ com $\|\mathbf{u}\|=1$, e $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$. Dado $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m$, definimos a *derivada direcional de* $\boldsymbol{f}$ *em* $\mathbf{x}$ *na direção* $\mathbf{u}$ por $\boldsymbol{D}_{\mathbf{u}}\boldsymbol{f}(\mathbf{x})\in\mathbb{R}^n$, onde

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{u}}\boldsymbol{f}(\mathbf{x})=\lim_{t\to0}\frac{\boldsymbol{f}(\mathbf{x}+t\mathbf{u})-\boldsymbol{f}(\mathbf{x})}{t}=0.$$

quando o limite acima existir.

No caso em que $\mathbf{u} = \mathbf{e}_i$, então temos a *derivada parcial* em relação à iésima coordenada e escrevemos

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{e}_i}\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

É importante ressaltar que a *existência de derivadas parciais em relação às coordenadas não implica na existência de derivadas direcionais em geral.* Considere o simples exemplo abaixo.

Exemplo 7.3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y} & \text{se } y \neq 0, \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Então

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$$

mas a derivada direcional na direção (a,b) não existe se a e b são não nulos, pois não existe o limite quando $t \to 0$ de

$$\frac{f(ta,tb) - f(0,0)}{t} = \frac{1}{t}\frac{a}{b}.$$

A situação muda se supusermos diferenciabilidade, como mostra o resultado a seguir.

Teorema 7.3.1. *Seja $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ diferenciável em $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. Seja $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ com $\|\mathbf{u}\| = 1$. Então existe a derivada direcional $\boldsymbol{D}_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$, e esta é dada por*

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{u}}\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{f}'(\mathbf{x})(\mathbf{u}).$$

Observação 7.1. Considerando $n = 1$, temos que

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})(\mathbf{u}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \|\mathbf{u}\| \cos\theta \leq \|\nabla f(\mathbf{x})\| \|\mathbf{u}\|, \tag{7.3.2}$$

onde θ é o ângulo formado por $\nabla f(\mathbf{x})$ e $\mathbf{u}$. Portanto, a derivada direcional atinge seu maior valor se $\theta = 0$, i.e., quando $\mathbf{u}$ aponta na direção do gradiente. Outra forma de se ler a equação (7.3.2) é observar que a direção do gradiente é a direção de crescimento máximo da função, e que a direção contrária ao gradiente é a direção de menor crescimento (menor derivada).

A existência de derivadas direcionais *não implica em diferenciabilidade*. Para ilustrar tal fato, considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y}^2 & \text{se } y \neq 0, \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Então

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$$

mas dado (a,b) com $\|(a,b)\|^2 = a^2 + b^2 = 1$ e $b \neq 0$, temos

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(ta,tb) - f(0,0)}{t} = \frac{a^2}{b},$$

e a derivada direcional é dada por

$$D_{(a,b)}f(0,0) = \frac{a^2}{b}. \tag{7.3.3}$$

Entretanto, se f fosse diferenciável, teríamos

$$D_{(a,b)}f(0,0) = \boldsymbol{f}'(0,0)(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)a + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)b = 0,$$

uma contradição com (7.3.3). Logo f não é diferenciável em $(0,0)$ apesar de ter todas as derivadas direcionais neste ponto. Note que $f(x,x^2) = 1$ para $x \neq 0$, e portanto f é descontínua em $(0,0)$.

Apesar da existência de derivadas direcionais num determinado ponto não garantir a diferenciabilidade neste ponto, a existência e continuidade das derivadas parciais numa *vizinhança* dum ponto garante a diferenciabilidade, como podemos ver no resultado a seguir.

Teorema 7.3.2. *Seja* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$*. Se* $\partial\mathbf{f}/\partial x_i$ *existir e for contínua numa vizinhança de* $\mathbf{x}$ *para* $i = 1, \dots, m$*, então* $\mathbf{f}$ *é diferenciável em* $\mathbf{x}$*.*

Outro resultado de grande importância diz respeito à diferenciabilidade de composições de funções, garantindo que se duas funções são diferenciáveis, então a composição também o é.

Teorema 7.3.3 (Regra da Cadeia). *Sejam* $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^m$ *e* $\boldsymbol{g}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$. *Se* $\boldsymbol{f}$ *é diferenciável em* $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^l$ *e* $\boldsymbol{g}$ *é diferenciável em* $\boldsymbol{f}(\mathbf{x})$, *então* $\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}$ *é diferenciável em* $\mathbf{x}$ *e*

$$(\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f})'(\mathbf{x})=\mathbf{g}'(\boldsymbol{f}(\mathbf{x}))\circ\boldsymbol{f}'(\mathbf{x}).$$

Veremos agora várias aplicações da regra da cadeia.

- **Aplicação 1:**

  Exemplo 7.4. Seja $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, e seja a função $\boldsymbol{g}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ inversa de $\boldsymbol{f}$, isto é,

  $$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\mathbf{x}))=\mathbf{x},\qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\mathbf{y}))=\mathbf{y},$$

  para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ em $\mathbb{R}^n$. Se $\boldsymbol{f}$ é diferenciável em $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, e $\boldsymbol{g}$ é diferenciável em $\mathbf{y}=\boldsymbol{f}(\mathbf{x})$, então $\boldsymbol{f}'(\mathbf{x})$ e $\mathbf{g}'(\mathbf{y})$ são inversas uma da outra, isto é,

  $$\boldsymbol{f}'(\mathbf{x})\circ\mathbf{g}'(\mathbf{y})=\mathbf{g}'(\mathbf{y})\circ\boldsymbol{f}'(\mathbf{x})=\boldsymbol{I},$$

  onde $\boldsymbol{I}$ é o operador identidade $\boldsymbol{I}(\mathbf{x})=\mathbf{x}$.

  De fato, seja $\boldsymbol{h}(\mathbf{x})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\mathbf{x}))=\mathbf{x}$. Derivando $\boldsymbol{h}(\mathbf{x})=\mathbf{x}$, temos $\mathbf{h}'(\mathbf{x})=\boldsymbol{I}$. Usando a regra da cadeia para $\boldsymbol{h}(\mathbf{x})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\mathbf{x}))$, temos $\mathbf{h}'(\mathbf{x})=\mathbf{g}'(\mathbf{y})\boldsymbol{f}'(\mathbf{x})$. Logo, $\mathbf{g}'(\mathbf{y})\boldsymbol{f}'(\mathbf{x})=\boldsymbol{I}$. De forma análoga segue-se que $\boldsymbol{f}'(\mathbf{x})\mathbf{g}'(\mathbf{y})=\boldsymbol{I}$.

- **Aplicação 2:** Gradientes são ortogonais a curvas de níveis. Seja $\boldsymbol{\phi}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ parametrização "suave" de uma curva de nível de uma função $f(x,y)$. Então $f(\boldsymbol{\phi}(t))$ é constante, e

  $$0=\frac{d}{dt}f(\boldsymbol{\phi}(t))=\nabla f(\boldsymbol{\phi}(t))\cdot\boldsymbol{\phi}'(t).$$

  Portanto, como $\boldsymbol{\phi}'$ é tangente a curva de nível da f em $\mathbf{x}$, temos que $\nabla f(\mathbf{x})$ é ortogonal a curvas de nível de f no ponto $\mathbf{x}$.
- **Aplicação 3:** Uma outra aplicação da regra da cadeia tem a ver com funções homogêneas. Dizemos que $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ é *homogênea de grau* k se $f(t\mathbf{x})=t^kf(\mathbf{x})$ para todo $t\in\mathbb{R}$. Por exemplo, $x^2/(yz)$ é homogênea de grau

zero, e $\sqrt{x^5}$ é homogênea de grau $5/2$. Um Teorema devido à Euler afirma que f é homogênea de grau k se e somente se

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = kf(\mathbf{x}). \tag{7.3.4}$$

Para obter (7.3.4) a partir de uma função homogênea f, basta derivar $f(t\mathbf{x}) = t^k f(\mathbf{x})$ em relação a t usando a regra da cadeia:

$$\mathbf{x} \cdot \nabla f(t\mathbf{x}) = kt^{k-1} f(\mathbf{x}),$$

e depois tomar $t = 1$.

Observação 7.2. Ver Questão 08, prova ANPEC 2021.

Aplicação 5: É possível obter a regra de Leibniz através da regra da cadeia. Seja

$$F(t_1, t_2, t_3) = \int_{t_1}^{t_2} f(t_3, y)\, dy.$$

Então

$$\frac{d}{dx} F(u(x), v(x), x) = \frac{\partial F}{\partial t_1}\frac{du}{dx} + \frac{\partial F}{\partial t_2}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial F}{\partial t_3},$$

implica em

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\, dy = -f(x, u(x))\frac{du}{dx} + f(x, v(x))\frac{dv}{dx} + \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\, dy.$$

7.4. Matriz Hessiana, Fórmula de Taylor e pontos críticos

Note que a derivada de uma função de uma função de $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ num determinado ponto $\mathbf{x}$ foi definida como uma aplicação linear de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}$. No caso, para $\mathbf{x}$ fixo, teríamos $\boldsymbol{f}'(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ dada por

$$\boldsymbol{f}'(\mathbf{x})(\mathbf{y}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x})y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x})y_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{x})y_m,$$

onde $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$.

De forma análoga, definimos a segunda derivada de f num ponto $\mathbf{x}$ fixado como sendo a função bilinear $f''(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tal que

$$f''(\mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} y_i z_j, \quad \text{onde } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right),$$

e $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$. Uma forma mais compacta de escrever a definição acima é usando-se a *matriz hessiana* H dada por $H_{ij}(\mathbf{x}) = \partial^2 f(\mathbf{x})/\partial x_i \partial x_j$. Logo

$$f''(\mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\vec{\mathbf{y}})^t H(\mathbf{x})\vec{\mathbf{z}}.$$

OBSERVAÇÃO 7.3. Um interessante resultado garante que se f for suficientemente suave num determinado ponto $\mathbf{x}_0$ (é suficiente que as segundas derivadas existam e sejam contínuas numa vizinhança aberta de $\mathbf{x}_0$) teremos que *não importa a ordem em que se toma as derivadas*, i.e., $\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j = \partial^2 f/\partial x_j \partial x_i$, e portanto a matriz hessiana é simétrica. Este tipo de resultado, com diferentes hipóteses, é atribuido à *Clairaut* em [**35**], e à *Schwarz* em [**3**, **19**].

Definições para derivadas de ordem mais alta seguem o mesmo formato, sendo estas *aplicações multilineares*. Entretanto para os nossos propósitos, a matriz hessiana basta.

Apresentamos no teorema a seguir a fórmula de Taylor, e nos restringimos ao caso particular de polinômios quadráticos. Este teorema será de fundamental importância para caracterizarmos pontos extremos.

TEOREMA 7.4.1 (Taylor). *Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em Ω, com derivadas contínuas. Para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$, existe $\hat{t} \in (0, 1)$ tal que para $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} + \hat{t}\mathbf{h}$ tem-se*

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{f}'(\mathbf{x})(\mathbf{h}) + \frac{1}{2} f''(\boldsymbol{\xi})(\mathbf{h}, \mathbf{h}). \tag{7.4.1}$$

OBSERVAÇÃO 7.4. Note que exigindo que as segundas derivadas sejam contínuas, podemos usar o fato de que a "ordem" das segundas derivadas não importam.

Assim como em uma dimensão, usaremos o Teorema de Taylor para estudarmos pontos extremos de uma função. Dizemos que $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tem um *máximo local* em $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ se existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \delta \implies f(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}). \tag{7.4.2}$$

Dizemos que $\mathbf{x}$ é *máximo estrito local* se valer a desigualdade estrita em (7.4.2). Definição análoga serve para *mínimo local* e *mínimo estrito local*. Chamamos um ponto de máximo ou mínimo local de *ponto extremo local*, e um ponto de máximo ou mínimo estrito local de *ponto extremo estrito local*.

O resultado que obtemos a seguir, relativo a pontos extremos interiores, é análogo ao caso unidimensional, ver o Teorema 5.3.1, e diz primeiro que pontos extremos interiores são *pontos críticos*, i.e., pontos em que a derivada se anula. O resultado mostra também que se um ponto $\mathbf{x}$ é de mínimo local, então a forma bilinear $f''(\mathbf{x})$ é *semi-definida positiva*, i.e, $f''(\mathbf{x})(\mathbf{h},\mathbf{h}) \geq 0$ para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$. De forma análoga se um ponto é de máximo local, então $f''(\mathbf{x})$ é *semi-definida negativa*, i.e, $f''(\mathbf{x})(\mathbf{h},\mathbf{h}) \leq 0$ para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$.

Em termos matriciais, $f''(\mathbf{x})$ é semi-definida positiva se a matriz hessiana $H(\mathbf{x})$ o for, i.e., se $(\vec{\mathbf{h}})^t H(\mathbf{x})\vec{\mathbf{h}} \geq 0$ para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$, e semi-definida negativa se $(\vec{\mathbf{h}})^t H(\mathbf{x})\vec{\mathbf{h}} \leq 0$ para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$.

Teorema 7.4.2 (Ponto extremo interior). *Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ ponto extremo local. Se f é diferenciável em $\mathbf{x}$, então $\mathbf{x}$ é ponto crítico, i.e., $\boldsymbol{f}'(\mathbf{x}) = 0$. Se além disto, f for duas vezes diferenciável com derivadas segundas contínuas, então temos que*

(1) se $\mathbf{x}$ for ponto de mínimo local, então $f''(\mathbf{x})(\mathbf{h},\mathbf{h}) \geq 0$ para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$,
(2) se $\mathbf{x}$ for ponto de máximo local, então $f''(\mathbf{x})(\mathbf{h},\mathbf{h}) \leq 0$ para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$.

Os resultados acima nos dão condições necessárias para um ponto interior ser extremo local, porém estas não são suficientes (vide exemplo $f(x) = x^3$). Dizemos que um ponto é *de sela* quando a derivada se anula mas este não é extremo local. Um caso interessante é quando a função é localmente crescente na direção de uma coordenada e decrescente na direção de outra. Por exemplo, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 - y^2$, ver Figura 1. Ver também a sela de macaco dada por $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$, Figura 2 (tirada de **[29]**).

O resultado a seguir nos fornece algumas condições suficientes para um ponto ser de máximo, mínimo ou de sela. Mais precisamente, temos que se um ponto crítico $\mathbf{x}$ de uma função suave tem $f''(\mathbf{x})$ *positiva definida*, i.e, $f''(\mathbf{x})(\mathbf{h},\mathbf{h}) > 0$ para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m \backslash \{\mathbf{0}\}$, então ele é mínimo estrito local. De forma análoga, se $f''(\mathbf{x})$ é *negativa definida*, i.e, $f''(\mathbf{x})(\mathbf{h},\mathbf{h}) < 0$ para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m \backslash \{\mathbf{0}\}$, então ele é máximo estrito

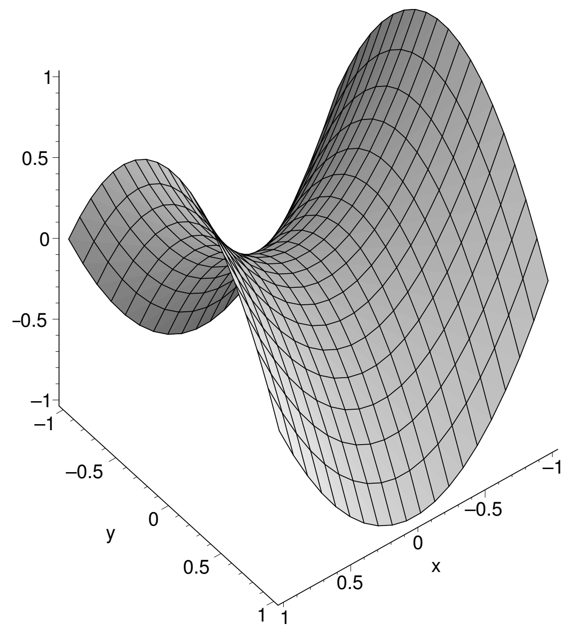


FIGURA 1. Gráfico de $x^2 - y^2$, que tem ponto de sela em $(0,0)$.

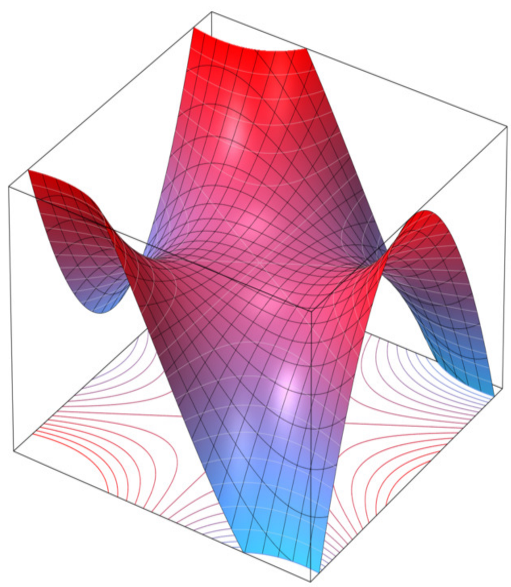


FIGURA 2. Gráfico da sela de macaco dada por $x^3 - 3xy^2$, com ponto de sela em $(0,0)$.

local. O último caso é quando $f''(\mathbf{x})$ é *indefinida* i.e, existem $\mathbf{h}$, $\boldsymbol{\xi}$ em $\mathbb{R}^m$ tais que $[f''(\mathbf{x})(\mathbf{h},\mathbf{h})][f''(\mathbf{x})(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})] < 0$. Aí então $\mathbf{x}$ é ponto de sela.

TEOREMA 7.4.3. *Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável, com derivadas contínuas, e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ ponto crítico. Temos então que*

(1) se $f''(\mathbf{x})$ for positiva definida então $\mathbf{x}$ é mínimo estrito local,
(2) se $f''(\mathbf{x})$ for negativa definida então $\mathbf{x}$ é máximo estrito local,
(3) se $f''(\mathbf{x})$ for indefinida então $\mathbf{x}$ é ponto de sela.

Note que apesar do teorema anterior dar condições suficientes para determinar se um ponto crítico é ou não extremo local, ainda é preciso descobrir se a f'' é positiva ou negativa definida ou indeterminada. Esta dificuldade é contornável, pois existem vários resultados de álgebra linear que dizem, por exemplo, quando uma matriz é ou não positiva definida. Por exemplo, uma matriz simétrica é positiva definida se e somente se seus autovalores são positivos. A referência **[13]** apresenta este e vários outros resultados relacionados ao tema.

EXEMPLO 7.5. Seja $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(\mathbf{x}) = c + \vec{\mathbf{b}}^t\vec{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{x}}^t A\vec{\mathbf{x}},$$

onde $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ é simétrica positiva definida, $\vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, e $c \in \mathbb{R}$. Então $\mathbf{x}^*$ é ponto de mínimo estrito de F se e somente se $A\vec{\mathbf{x}}^* = -\vec{\mathbf{b}}$. De fato, se $\mathbf{x}^*$ é ponto de mínimo estrito de F, então $F'(\mathbf{x}^*) = 0$. Mas a matriz jacobiana $[F'(\mathbf{x}^*)] \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ é dada por

$$[F'(\mathbf{x}^*)] = (\vec{\mathbf{x}}^*)^t A + \vec{\mathbf{b}}^t,$$

e portanto $A\vec{\mathbf{x}}^* = -\vec{\mathbf{b}}$. Por outro lado, se $A\vec{\mathbf{x}}^* = -\vec{\mathbf{b}}$, então $F'(\mathbf{x}^*) = 0$. Como a matriz hessiana de F, dada por A, é positiva definida, então $\mathbf{x}^*$ é ponto de mínimo estrito de F.

Uma segunda aplicação do Teorema 7.4.1 diz respeito à funções convexas definidas em convexos. Dizemos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ é convexo se $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \Omega$ implica em $(1-t)\mathbf{x}+t\mathbf{y} \in \Omega$ para todo $t \in [0,1]$. Dizemos que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é convexa em Ω se

$$f\big((1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}\big) \leq (1-t)f(\mathbf{x}) + tf(\mathbf{y}).$$

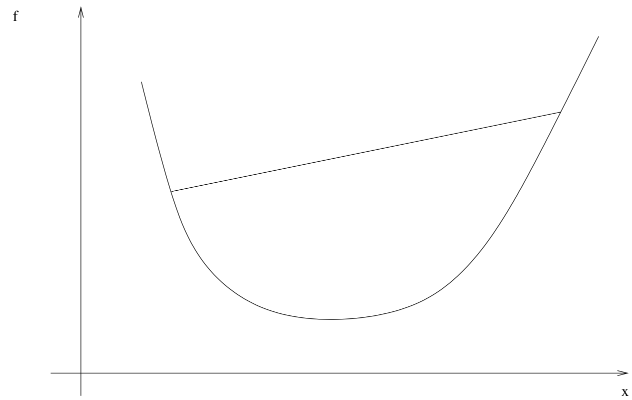


FIGURA 3. Função convexa.

para todo $t \in [0, 1]$. Graficamente, uma função é convexa se o gráfico de f entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ está abaixo da reta que une os pontos $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ e $(\mathbf{y}, f(\mathbf{y}))$, como ilustra a Figura 3.

Existem inúmeros resultados relacionados a convexidade. Em particular, um mínimo local é também global, e se o mínimo local é estrito, segue-se a unicidade de mínimo global [**23**].

TEOREMA 7.4.4. *Seja* $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *duas vezes diferenciável, com derivadas contínuas. Então as afirmativas abaixo são equivalentes:*

(1) f *é convexa*

(2) $f''(\mathbf{x})$ *é semi-definida positiva para todo* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$.

OBSERVAÇÃO 7.5. Note que no processo de demonstração do Teorema 7.4.4, mostramos também que uma função f ser convexa implica em $\boldsymbol{f}'(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$.

7.5. Teorema da Função Inversa e da Função Implícita

7.5.1. Teorema da função implícita. O teorema de função implícita trata da importante questão de solvabilidade de equações dadas de forma implícita. A pergunta é simples: dados os pontos $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, soluções de uma equação $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, será que é possível escrever $\mathbf{y}$ em função de $\mathbf{x}$, numa vizinhança de $\mathbf{x}$?

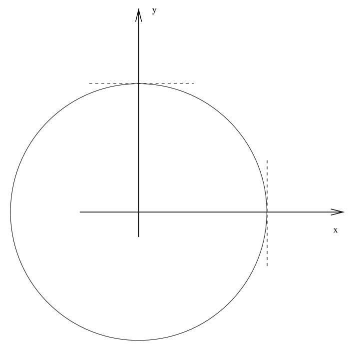


Figura 4. Conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

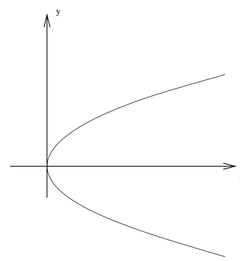


Figura 5. Conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$.

Como uma primeira motivação, considere $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Então a curva de nível determinada por $F(x, y) = 0$ é dada pelo círculo de raio unitário, como nos mostra a Figura 4. Seja $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $F(a, b) = 0$. Por exemplo $(0, 1)$ e $(0, -1)$ satisfazem esta condição, ou seja, numa vizinhaça de $(0, 1)$, podemos escrever y como função de x, na caso $y = \sqrt{1 - x^2}$. E em torno de $(0, -1)$ podemos escrever $y = -\sqrt{1 - x^2}$. Uma pergunta natural é se existe uma função ϕ tal que $F(x, \phi(x)) = 0$, e $\phi(a) = b$. A resposta é *globalmente, não.* Mas *localmente sim*, se $\partial F/\partial y(a, b) \neq 0$.

Um segundo exemplo é dado por $F(x, y) = x - y^2$, ver Figura 5. Para se ter $F(x, \phi(x)) = 0$, pode-se escolher $\phi(x) = \sqrt{x}$ ou $\phi(x) = -\sqrt{x}$. Entretanto nenhuma das duas funções está definida na vizinhança de $x = 0$. Note que $\partial F/\partial y(0, 0) = 0$.

Um exemplo final, agora em dimensões maiores. Sejam $T_1 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $T_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ transformações lineares, e $F : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ dada por $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = T_1\mathbf{x} + T_2\mathbf{y}$. Então podemos escrever a equação $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ somente em função de $\mathbf{x}$ se T_2 for invertível. Neste caso temos $F(\mathbf{x}, -T_2^{-1}T_1\mathbf{x}) = 0$. Note que dados $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{v}^n$, tem-se

$$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = T_1\mathbf{u} + T_2\mathbf{v} \tag{7.5.1}$$

Observação 7.6. No exemplo acima, podemos usar um abuso de notação e escrever (7.5.1) como

$$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\mathbf{v}.$$

Portanto a condição de solvabilidade é que $\partial F/\partial \mathbf{y}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ seja invertível.

Teorema 7.5.1 (Função implícita). *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ um aberto, e $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in \Omega$. Seja $\boldsymbol{F} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$, e tal que $\boldsymbol{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0$. Se a transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ definida por $\mathbf{v} \mapsto \boldsymbol{F}'(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)(\mathbf{0}, \mathbf{v})$ for invertível, então existe uma vizinhança aberta W de $\mathbf{x}_0$, e uma única função $\boldsymbol{\phi} : W \to \mathbb{R}^n$, que é $\mathcal{C}^1(W)$ e tal que $\mathbf{y}_0 = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_0)$ e $F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})) = 0$ para todo $\mathbf{x} \in W$.*

Observação 7.7. Se escrevermos a matriz jacobiana em formato de blocos, como

$$\Big(\boldsymbol{F}'(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\Big) = \Big(\tfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \quad \tfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\Big)$$

temos que a condição do teorema da função implícita é dada por $\partial \boldsymbol{F}/\partial \mathbf{y}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ ser invertível.

Note que o Teorema da função implícita *não* garante existência de $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ tal que $\boldsymbol{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0$. Por exemplo, considere $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x, y) = x^2 + y^2 + 1$. Então F não tem raiz, apesar de $\partial F/\partial y(x_0, y_0) = 2y \neq 0$ sempre que $y \neq 0$.

Exemplo 7.6. Considere a caso onde $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é suave e seja $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $F(x_0, y_0) = c$ para alguma constante $c \in \mathbb{R}$, e $\partial F/\partial y(x_0, y_0) \neq 0$. Então, aplicando o teorema de função implícita para $F(x_0, y_0) - c$, existe função ϕ definida numa vizinhança de x_0 e tal que $\phi(x_0) = y_0$ e $F(x, \phi(x)) = c$. Note que

$$0 = \frac{d}{dx}F(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x})) = \frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x})) + \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x}))\phi'(\mathbf{x}),$$

e portanto $\phi'(\mathbf{x}) = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$ calculada no ponto $(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x}))$.

Observação 7.8. Ver Questões ANPEC: 05 (2020), 11 (2012). 05 (2010), 11 (2001), 06 (1997), 06 (1997), 10 (1994), 15 (1992).

7.6. Minimização com restrições

Para problemas de minimização com restrições, dois importantes resultados nos dão condições suficientes para que um ponto seja extremo. São os teoremas de Lagrange e de Kuhn–Tucker, que apresentamos abaixo.

7.6.1. Condições de primeira ordem.

7.6.1.1. *Restrições de igualdade.* Dadas funções reais $f, g_1, \dots, g_k$ definidas num aberto Ω de $\mathbb{R}^m$, consideramos o problema de minimizar f restrita ao conjunto de raízes de $g_1, \dots, g_k$ em Ω. O Teorema de Lagrange nos dá condições necessárias que um candidato a mínimo de tal problema tem que satisfazer.

Começamos com um caso mais simples, de funções definidas no plano e onde há apenas uma restrição. Sejam f e g funções do $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, e suponha que $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^2$ seja tal que

$$f(\mathbf{x}^*) = \min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2,\ g(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Apesar de termos imposto $\mathbf{x}^*$ como mínimo global, isto é somente uma simplificação. A teoria não se modifica em nada se $\mathbf{x}^*$ for somente mínimo local.

Suponha agora que $\nabla g(\mathbf{x}^*) \neq 0$ e considere $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma parametrização para a curva de nível determinada por $g(x, y) \equiv 0$, e tal que $\mathbf{r}(0) = \mathbf{x}^*$. A existência de tal parametrização (local) pode ser justificada através do teorema da função implícita. Pela regra da cadeia,

$$0 = \frac{d}{dt} g(\mathbf{r}(t)) = \nabla g(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)$$

concluímos que $\nabla g(\mathbf{r}(t))$ é ortogonal a $\mathbf{r}'(t)$. De forma análoga, temos que $f(\mathbf{r}(t))$ atinge seu máximo em $t = 0$. Logo, $df(\mathbf{r}(0))/dt = 0$, e como

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t),$$

temos que $\nabla f(\mathbf{x}^*)$ é também ortogonal a $\mathbf{r}'(0)$. Em duas dimensões, se $\nabla g(\mathbf{x}^*)$ e $\nabla f(\mathbf{x}^*)$ são ortogonais a $\mathbf{r}'(0)$ isto significa que $\nabla g(\mathbf{x}^*)$ e $\nabla f(\mathbf{x}^*)$ são colineares, i.e., existe $\lambda^* \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla g(\mathbf{x}^*) = \lambda^* \nabla f(\mathbf{x}^*).$$

O caso mais geral, em dimensões maiores e com número arbitrário de restrições, é enunciado no teorema abaixo.

Teorema 7.6.1 (Lagrange). *Sejam $f, g_1, \dots, g_k$ funções reais definidas em $\mathbb{R}^m$ com derivadas contínuas. Suponha que exista $\delta > 0$ e $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^m$ e tal que*

$$f(\mathbf{x}^*) = \min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}^*) \text{ e } g_1(\mathbf{x}) = \cdots = g_k(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Então existem números $\mu, \lambda_1^*, \dots, \lambda_k^*$ não todos nulos e tais que

$$\mu \nabla f(\mathbf{x}^*) = \lambda_1^* \nabla g_1(\mathbf{x}^*) + \cdots + \lambda_k^* \nabla g_k(\mathbf{x}^*). \tag{7.6.1}$$

Além disto, se $\{\nabla g_1(\mathbf{x}^*), \dots, \nabla g_k(\mathbf{x}^*)\}$ é linearmente independente, então pode-se tomar $\mu = 1$.

Observação 7.9. Note que uma forma compacta de descrever as condições de Lagrange vem através da definição do Lagrangeano $\mathcal{L} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ dado por

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}), \tag{7.6.2}$$

onde $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ e $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \big(g_1(\mathbf{x}), \dots, g_k(\mathbf{x})\big) \in \mathbb{R}^k$. Então as condições necessárias para $\mathbf{x}^*$ ser ponto de mínimo são dadas por $\nabla \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = 0$, i.e.,

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \nabla_{\mathbf{x}} f\big(\mathbf{x}^*\big) - \boldsymbol{\lambda}^* \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}, \quad \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = -\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}. \tag{7.6.3}$$

Os números $\lambda_1^*, \dots, \lambda_k^*$ acima são conhecidos por *multiplicadores de Lagrange*, e em muitas aplicações têm significado próprio.

Apresentamos, seguindo **[9]**, alguns argumentos que indicam o porquê do resultado valer. A argumentação é toda baseada na aproximação dada pelo Teorema do Valor Médio:

$$g_i(\mathbf{x}^* + \mathbf{s}) \approx g_i(\mathbf{x}^*) + \nabla g_i(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{s}, \tag{7.6.4}$$

Diremos que $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^m$ é uma *direção factível* se $\mathbf{x}^* + \mathbf{s}$ satisfizer todas as restrições, i.e., $g_i(\mathbf{x}^* + \mathbf{s}) = 0$ para todo $i = 1, \dots, k$. Logo, para termos $\mathbf{s}$ factível, temos $g_i(\mathbf{x}^* + \mathbf{s}) = g_i(\mathbf{x}^*) = 0$. Logo, por (7.6.4), vemos que $\mathbf{s}$ é factível se e somente se

$$\nabla g_i(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{s} = 0 \text{ para } i = 1, \dots, k. \tag{7.6.5}$$

Note que a derivada direcional da f em $\mathbf{x}^*$ na direção factível $\mathbf{s}$ não pode ser negativa, pois isto indicaria que $f(\mathbf{x}^* + \mathbf{s}) < f(\mathbf{x}^*)$, uma contradição com $\mathbf{x}^*$ ser mínimo local. Logo

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{s} < 0 \tag{7.6.6}$$

não pode ocorrer junto com (7.6.5).

A condição necessária e suficiente para que (7.6.5) e (7.6.6) nunca ocorram simultaneamente é que existam $\lambda_1^*, \dots, \lambda_k^*$ tais que

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \lambda_1^* \nabla g_1(\mathbf{x}^*) + \cdots + \lambda_k^* \nabla g_k(\mathbf{x}^*).$$

É imediato checar que a condição é suficiente. Para ver que é também necessária, suponha que (7.6.5) e (7.6.6) não ocorram simultaneamente para nenhuma direção factível $\mathbf{s}$, e considere P o subespaço vetorial formado por $\nabla g_1(\mathbf{x}^*), \dots, \nabla g_k(\mathbf{x}^*)$. Se $\nabla f(\mathbf{x}^*) \notin P$ então existe $\mathbf{u}$ não nulo e ortogonal a P. Por (7.6.5), $\mathbf{u}$ é factível. Seja $\mathbf{v} \in P$ tal que $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \nabla f(\mathbf{x}^*)$. Então $\mathbf{s} = -\mathbf{u}$ satisfaz (7.6.5) e (7.6.6), uma contradição.

7.6.1.2. *Restrições de desigualdade.* Uma outra situação de minimização com restrições ocorre quando as restrições são dadas por desigualdades. Neste caso temos o Teorema de Kuhn–Tucker, dado abaixo.

TEOREMA 7.6.2 (Kuhn–Tucker). *Sejam $f, h_1, \dots, h_k$ funções reais definidas em $\mathbb{R}^m$ com derivadas contínuas. Suponha que existam $\delta > 0$ e $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^m$ tais que*

$$f(\mathbf{x}^*) = \min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}^*) \text{ e } h_1(\mathbf{x}) \geq 0, \cdots, h_k(\mathbf{x}) \geq 0\}.$$

Então as seguintes afirmativas são verdadeiras:

(1) existem números $\mu, \lambda_1^*, \dots, \lambda_k^*$ *não todos nulos e tais que*

$$\mu \nabla f(\mathbf{x}^*) = \lambda_1^* \nabla h_1(\mathbf{x}^*) + \cdots + \lambda_k^* \nabla h_k(\mathbf{x}^*).$$

(2) seja $i \in \{1, \dots, k\}$ *tal que* $h_i(\mathbf{x}^*) > 0$. *Então pode-se impor* $\lambda_i^* = 0$.

(3) se o conjunto $V = \{\nabla h_i(\mathbf{x}^*) : h_i(\mathbf{x}^*) = 0, \text{ onde } 1 \leq i \leq k\}$ *é linearmente independente, então pode-se tomar* $\mu = 1$ *e* $\lambda_1^* \geq 0, \dots, \lambda_k^* \geq 0$.

Justificamos a seguir o Teorema de Kuhn–Tucker, seguindo novamente [**9**]. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $h_i(x^*) = 0$ para todo $i = 1, \dots, k$. De fato, se $h_i(x^*) > 0$, então podemos tomar uma vizinhança de $\mathbf{x}^*$ tal que h_i seja estritamente positiva nesta vizinhança (pois h_i é positiva). Podemos então tomar $\lambda_i^* = 0$ nestes casos.

Se $\mathbf{s}$ é direção factível, i.e., satisfaz as desigualdades, então, $h_i(\mathbf{x}^* + \mathbf{s}) \geq 0$. Logo, como $h_i(\mathbf{x}^*) = 0$, por (7.6.4), temos

$$\nabla h_i(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{s} \geq 0 \text{ para } i = 1, \dots, k. \tag{7.6.7}$$

Desde que a derivada direcional da f em $\mathbf{x}^*$ na direção factível $\mathbf{s}$ não pode ser negativa, temos que

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{s} < 0 \tag{7.6.8}$$

não pode ocorrer junto com (7.6.7).

A condição necessária e suficiente para que (7.6.7) e (7.6.8) nunca ocorram simultaneamente é que existam $\lambda_1^* \geq 0, \dots, \lambda_k^* \geq 0$ tais que

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \lambda_1^* \nabla h_1(\mathbf{x}^*) + \cdots + \lambda_k^* \nabla h_k(\mathbf{x}^*).$$

Novamente, é fácil checar que a condição é suficiente. Para ver que $\nabla f(\mathbf{x}^*)$ é combinação linear de $\nabla h_1(\mathbf{x}^*), \dots, \nabla h_k(\mathbf{x}^*)$, basta argumentar como no caso de restrição estrita. Sem perda de generalidade suponha agora que $\lambda_1^* < 0$. Seja P o espaço vetorial formado pelas combinações lineares de $\{\nabla h_2(\mathbf{x}^*), \dots, \nabla h_k(\mathbf{x}^*)\}$. Seja agora $\mathbf{s}$ vetor ortogonal ao subespaço P, e "apontando na mesma direção que $\nabla h_1(\mathbf{x}^*)$", i.e., tal que $\nabla h_1(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{s} \geq 0$. Por construção temos então que (7.6.7) e (7.6.8) ocorrem com tal $\mathbf{s}$, uma contradição. Logo temos sempre $\lambda_i^* \geq 0$. Note que no argumento acima usamos que $\nabla h_1(\mathbf{x}^*)$ é linearmente independente de $\nabla h_2(\mathbf{x}^*), \dots, \nabla h_k(\mathbf{x}^*)$ (caso contrário $\nabla h_1(\mathbf{x}^*) \in P$). Esta hipótese de independência linear é um artifício desta demonstração, e pode ser eliminada [**9**].

7.6.1.3. *Restrições de positividade.* Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ "suave" e considere o seguinte problema de otimização com restrições:

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}) \quad \text{tal que } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \tag{7.6.9}$$

e suponha que $\mathbf{x}^*$ resolva (7.6.9). Seja $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m\}$ base canônica de $\mathbb{R}^m$ e $i \in \{1, \dots, m\}$. Seja $f_i : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_i(\tau) = f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{i-1}^*, \tau, x_{i+1}^*, \dots, x_m^*).$$

Note então que f_i atinge mínimo em $\tau = x_i^*$. Se $x_i = 0$, então $f_i'(x_i^*) \geq 0$, caso contrário, $f_i'(x_i^*) = 0$. Podemos escrever estas condições de forma resumida por

$$f_i'(x_i^*) \geq 0, \qquad x_i^* f_i'(x_i^*) = 0, \qquad x_i^* \geq 0.$$

Como $f_i'(x_i^*) = \partial f/\partial x_i(x_i^*)$, reescrevemos as condições acima por

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) \geq \mathbf{0}, \qquad \nabla f(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{x}^* = 0, \qquad \mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}.$$

7.6.1.4. *Restrições de positividade com desigualdade.* Com a introdução de variáveis de folga, pode-se reduzir o problema com restrições de desigualdade a problemas com restrições de positividade. Seja $\mathbf{g} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ "suave" e $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^k$, com $k \geq 1$, e

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}) \quad \text{tal que } \mathbf{g}(\mathbf{x}) \geq \boldsymbol{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \tag{7.6.10}$$

Introduzindo a *variável de folga* $\boldsymbol{s} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{b}$, obtemos um problema na forma:

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}) \quad \text{tal que } \boldsymbol{s} + \boldsymbol{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{s} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \tag{7.6.11}$$

Para obtermos condições suficientes para pontos de ótimo, basta combinar a demonstração do Teorema 7.6.1 com as ideias da Seção 7.6.1.3. O lagrangeano será agora dado por

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda} \cdot \big(\boldsymbol{s} + \boldsymbol{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x})\big),$$

e as condições necessárias de otimalidade são

$$\begin{gathered}
\nabla_{\mathbf{x}}\,\mathcal{L}(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}) = \nabla_{\mathbf{x}}\, f - \boldsymbol{\lambda}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\,\mathbf{g} \geq \mathbf{0}, \qquad \nabla_{\mathbf{x}}\,\mathcal{L}(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda})\cdot\mathbf{x} = (\nabla_{\mathbf{x}}\, f - \boldsymbol{\lambda}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\,\mathbf{g})\cdot\mathbf{x} = 0,\\
\nabla_{\boldsymbol{s}}\,\mathcal{L}(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \qquad \nabla_{\boldsymbol{s}}\,\mathcal{L}(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{s} = 0,\\
\nabla_{\boldsymbol{\lambda}}\, L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{s} + \boldsymbol{b} - \mathbf{g} = \mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{s} \geq \mathbf{0}, \qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.
\end{gathered}$$

computed at $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$, $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}^*$ and $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^*$. Eliminando $\boldsymbol{s} = \mathbf{g} - \boldsymbol{b}$, obtém-se finalmente

$$\begin{gathered}
\nabla_{\mathbf{x}}\, f - \boldsymbol{\lambda}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\,\mathbf{g} \geq \mathbf{0}, \qquad (\nabla_{\mathbf{x}}\, f - \boldsymbol{\lambda}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\,\mathbf{g})\cdot\mathbf{x} = 0,\\
\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{\lambda}\cdot(\mathbf{g} - \boldsymbol{b}) = 0, \qquad \mathbf{g} - \boldsymbol{b} \geq \mathbf{0}, \qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.
\end{gathered}$$

7.6.2. Condições de segunda ordem. Considere o caso de restrições de igualdade somente, como no Teorema 7.6.1. Considere $\mathbf{x}^*$ e $\boldsymbol{\lambda}^*$ tal que (7.6.3) valha. Temos por Taylor, para $\mathbf{s}$ factível [**9**], que

(7.6.12)

$$f(\mathbf{x}^*+\mathbf{s}) \approx \mathcal{L}(\mathbf{x}^*+\mathbf{s},\boldsymbol{\lambda}^*) \approx \mathcal{L}(\mathbf{x}^*,\boldsymbol{\lambda}^*) + \nabla_{\mathbf{x}}\,\mathcal{L}(\mathbf{x}^*,\boldsymbol{\lambda}^*)\cdot\mathbf{s} + \frac{1}{2}\mathbf{s}\cdot W^*\mathbf{s} = f(\mathbf{x}^*) + \frac{1}{2}\mathbf{s}\cdot W^*\mathbf{s}$$

onde $\mathcal{L}$ foi definida em (7.6.1), e W^* é a Hessiana de $\mathcal{L}$ em relação a $\mathbf{x}$, i.e,

$$\mathbf{s}\cdot W^*\mathbf{s} = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2\,\mathcal{L}(\mathbf{x}^*,\boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial x_i \partial x_j}\mathbf{s}_i\mathbf{s}_j.$$

Como $\mathbf{x}^*$ é mínimo, obtemos de (7.6.12) a condição necessária $\mathbf{s}\cdot W^*\mathbf{s} \geq 0$ para todo $\mathbf{s}$ factível, i.e., todo $\mathbf{s}$ tal que satisfaça (7.6.5). Similarmente, de (7.6.12) obtemos a condição suficiente para que $\mathbf{x}^*$ seja mínimo estrito, que é

$$\mathbf{s}\cdot W^*\mathbf{s} > 0$$

para todo $\mathbf{s}$ factível.

Para o caso de restrições com desigualdade, seja $\mathbf{s}$ factível, i.e., tal que $h_i(\mathbf{x}^*+\mathbf{s}) \geq 0$. Então definimos agora

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{h}(\mathbf{x}),$$

onde $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \big(h_1(\mathbf{x}), \dots, h_k(\mathbf{x})\big) \in \mathbb{R}^m$. Portanto

(7.6.13)

$$f(\mathbf{x}^*+\mathbf{s}) = \mathcal{L}(\mathbf{x}^*+\mathbf{s}, \lambda^*)+\boldsymbol{\lambda}^*\cdot\mathbf{h}(\mathbf{x}^*+\mathbf{s}) \approx \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)+\nabla_{\mathbf{x}}\,\mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)\cdot\mathbf{s}+\frac{1}{2}\mathbf{s}\cdot W^*\mathbf{s}+\boldsymbol{\lambda}^*\cdot\mathbf{h}(\mathbf{x}^*+\mathbf{s})$$
$$= f(\mathbf{x}^*) - \boldsymbol{\lambda}^* \cdot \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) + \frac{1}{2}\mathbf{s} \cdot W^*\mathbf{s} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* h_i(\mathbf{x}^* + \mathbf{s}).$$

Como $\lambda_i^* \geq 0$, podemos definir $\mathcal{A}_+ = \{i \text{ inteiro} : \lambda_i^* > 0,\ 1 \leq i \leq k\}$ e $\mathcal{A}_0^* = \{i \text{ inteiro} : \lambda_i^* = 0,\ 1 \leq i \leq k\}$. Logo, usando que $h_i(\mathbf{x}^*) = 0$,

$$f(\mathbf{x}^* + \mathbf{s}) - f(\mathbf{x}^*) \approx \frac{1}{2}\mathbf{s} \cdot W^*\mathbf{s} + \sum_{i\in\mathcal{A}_+} \lambda_i^*\,\nabla\, h_i(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{s},$$

Buscamos então condições suficientes para que o lado direito da equação acima seja positivo. Se $\mathbf{s}$ é factível, então vale (7.6.7). Se $\nabla\, h_i(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{s} > 0$, para $\mathbf{s}$ "pequeno o suficiente" temos que

$$\frac{1}{2}\mathbf{s} \cdot W^*\mathbf{s} + \sum_{i\in\mathcal{A}_+} \lambda_i^*\,\nabla\, h_i(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{s} > 0$$

e $f(\mathbf{x}^* + \mathbf{s}) > f(\mathbf{x}^*)$. Entretanto, se $\nabla\, h_i(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{s} = 0$, uma condição suficiente para que $f(\mathbf{x}^* + \mathbf{s}) \geq f(\mathbf{x}^*)$ é exigir que $\mathbf{s} \cdot W^*\mathbf{s} > 0$ para todo $\mathbf{s}$ factível e ortogonal a $\nabla\, h_i(\mathbf{x}^*)$ para $i \in \mathcal{A}_+$.

7.7. Exercícios

EXERCÍCIO 7.1. Extenda para $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ o conceito de limite de funções num determinado ponto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m$.

EXERCÍCIO 7.2. Seja f e g funções de $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, diferenciáveis em $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. Mostre usando a definição de derivadas que $(f + g)'(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x}) + g'(\mathbf{x})$. Seja $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ também diferenciável em $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. Mostre usando a definição de derivadas que $(hg)'(\mathbf{x}) = h'(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) + h(\mathbf{x})g'(\mathbf{x})$.

EXERCÍCIO 7.3. Sejam $a < b$ números reais, e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). Mostre que entre duas raízes consecutivas de f' existe no máximo uma raiz de f.

EXERCÍCIO 7.4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{para } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{para } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Mostre que a derivada direcional de f em $(0,0)$ com respeito a $\mathbf{u} = (a,b)$ existe e que

$$D_{\mathbf{u}}f(0,0) = \frac{b^2}{a}, \qquad \text{se } a \neq 0.$$

Mostre que f não é contínua e portanto não é diferenciável no $(0,0)$.

EXERCÍCIO 7.5 (Kevmasan **[22]**, Example 1.1.1). Mostre que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{(y-x^2)+x^4} & \text{para } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{para } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

tem todas as derivadas direcionais em $(0,0)$ iguais a zero, mas que f não é diferenciável no $(0,0)$. (Dica: considere $\mathbf{h} = (h,h^2)$ em (7.3.1)).

EXERCÍCIO 7.6. Seja $Q = (0,1) \times (0,1)$. Suponha que $f : Q \to \mathbb{R}$, e $g : Q \to \mathbb{R}$ sejam diferenciáveis em Q. Mostre que se $\mathbf{f}'(x) = \mathbf{g}'(x)$ para todo $\mathbf{x} \in Q$, então existe constante c tal que $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + c$ para todo $\mathbf{x} \in Q$.

EXERCÍCIO 7.7. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto e com a seguinte propriedade: existe $\mathbf{x}^* \in \Omega$ tal que para todo $\mathbf{x} \in \Omega$, a reta $S_{\mathbf{x}} = \{t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{x}^* : t \in [0,1]\}$ está contida em Ω, i.e., $S_{\mathbf{x}} \subset \Omega$. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ função diferenciável em Ω e tal que todas as derivadas parciais de $f(\mathbf{x})$ são nulas, para todo $\mathbf{x} \in \Omega$. Mostre que f é constante.

EXERCÍCIO 7.8. Seja $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ e $f : B \to \mathbb{R}$ função contínua em B, diferenciável no interior de B e tal que $f \equiv 0$ na fronteira de B. Mostre que f tem ponto crítico no interior de B.

EXERCÍCIO 7.9 (Mínimos Quadrados). Considere para $i = 1, \dots, n$ os pontos $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, e seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $p(x) = ax^2 + bx + c$ tal que a, b e c

minimizam o erro $\sum_{i=1}^n |p(x_i)-y_i|^2$. Mostre que a, b e c satisfazem as equações

$$a\sum_{i=1}^n x_i^4 + b\sum_{i=1}^n x_i^3 + c\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i,$$
$$a\sum_{i=1}^n x_i^3 + b\sum_{i=1}^n x_i^2 + c\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$
$$a\sum_{i=1}^n x_i^2 + b\sum_{i=1}^n x_i + cn = \sum_{i=1}^n y_i.$$

Exercício 7.10. Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ compacto, e A° o conjunto dos pontos interiores de A. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável, com derivadas contínuas, em A°. Suponha ainda que f se anule em toda a fronteira de A, e que f'' seja negativa definida para todo ponto em A°. Mostre que $f(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \in A^\circ$.

Exercício 7.11. Mostre, usando o Teorema 7.4.3, que $(0,0)$ é ponto de sela de $f(x,y) = x^2 - y^2$, e ponto de mínimo estrito local de $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Exercício 7.12. Sejam as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciáveis, com as segundas derivadas contínuas. Suponha que o zero seja ponto de mínimo estrito de f e g, e que $f(0) = g(0) = 1$. Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x,y) = f(x)g(y)$. O que podemos afirmar sobre a Hessiana de φ em $(0,0)$ (nada pode ser afirmado, ela é indefinida, positiva definida, positiva semi-definida, negativa definida, etc)? O que podemos afirmar sobre o ponto $(0,0)$ em relação à φ (nada pode ser afirmado, é ponto de máximo, de máximo estrito, de mínimo, de mínimo estrito, de sela, etc)? Justifique suas respostas.

Exercício 7.13. Seja $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ diferenciável e tal que $\|\mathbf{f}(t)\| = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Mostre então que $\mathbf{f}'(t) \cdot \mathbf{f}(t) = 0$. O vetor $\mathbf{f}'(t)$ é o *vetor tangente da curva* $\mathbf{f}$ *em* t.

Exercício 7.14. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ diferenciável em $\mathbf{x} \in \Omega$. Seja $\nabla f(\mathbf{x}) = (\partial f/\partial x_1, \dots, \partial f/\partial x_m)(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$. Supondo que $\mathbf{x}$ não é ponto crítico de f, mostre que a derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$ atinge seu máximo quando $\mathbf{u} = c\nabla f(\mathbf{x})$ para algum $c > 0$. O vetor ∇f é chamado de *vetor gradiente de* f, e dá a direção de “maior crescimento” da função f no ponto $\mathbf{x}$.

CAPíTULO 8

Integração

[1]

Sem entrar em detalhes a respeito da definição de integral (Riemann), enunciamos algumas properiedades importantes. Consideraremos inicialmente (Seção 8.1) somente funções limitadas em intervalos limitados, mas não necessariam,ente contínuas e aplicações para determinar áreas Seção 8.2. Funções não limitadas e/ou intervalos limitados serão considerados na seção seguinte (Seção 8.3)

8.1. Propriedade básicas de integrais de funções limitadas

Primeiros veremos algumas propriedades fundamentais de funções diferenciáveis, e a seguir abordaremos a importante relação entre integrabilidade ew diferenciabilidade. Na última seção falaremos um pouco sobre técnicas que podem ajudar nos cálculos de algumas ingtegrais.

8.1.1. Algumas propriedades fundamentais. Considere abaixo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitadas, $a < b$ números reais . As integrais serão sempre no domínio $[a, b]$. Temos então os seguintes resultados.

(1) Se f for contínua, então é integrável
(2) Se f for monótona (i.e., for função crescente ou decrescente), ela é integrável
(3) A integral da soma de funções é a soma das integrais. O mesmo vale para diferença e produto por escalar $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b \alpha f(x) + g(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx,$$

(4) $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$ e $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$.

[1]Última Atualização: 04/08/2022

(5) Se f e g são integráveis, então o produto fg é integrável

(6) Existem funções não integráveis. Por exemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

(7) O exemplo do ítem 5 mostra que f^2 pode ser integrável, mesmo que f não o seja

(8) Se f é integrável, e $g(x) = f(x)$ a menos de um número finito de pontos, então g é integrável e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$$

(9) Podemos sempre decompor uma função como a soma de suas partes positivas e negativas. Sejam

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \qquad f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{caso contrário} \end{cases},$$

Note que f^+ e f^- assumem somente valores positivos, e que, por construção, $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ e $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$. Quanto a integrabilidade, se f for integrável, então f^+, f^- e $|f|$ são integráveis. Note que $|f|$ ser integrável não implica em f integrável, como nos mostra o exemplo apresentado no ítem 5.

(10) Se $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in (a, b)$ (ou a menos de um número finito de pontos), então

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

Se $f(x) > g(x)$ então a integral de f é estritamentente maior que a integral de g. Uma consequência imediata é que se $\alpha_0 \leq f(x) \leq \alpha_1$, onde α_0 e α_1 são números reais, então

$$\alpha_0(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \alpha_1(b-a)$$

(11) O módulo da integral é menor ou igual a integral de módulo:

$$|\int_a^b f(x)\,dx| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

(12) Se f é função para e g é funçãoímpar, então

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx, \qquad \int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 0.$$

Exemplo 8.1. Diga se é verdadeiro ou falso:

$$\int_{-2}^{2}(ax^2+bx+c)\,dx = 2\int_0^2 (ax^2+c)\,dx$$

Resposta: verdadeiro, pois

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}(ax^2+bx+c)\,dx = \int_{-2}^{2} ax^2\,dx + \int_{-2}^{2} bx\,dx + \int_{-2}^{2} c\,dx = 2\int_0^2 ax^2\,dx + 2\int_0^2 c\,dx \\ = 2\int_0^2 (ax^2+c)\,dx\end{aligned}$$

8.1.2. Primitivas e o Teorema Fundamental do Cálculo. Provavelmente o resultado mais importante em se tratando de integrais é o *Teorema Fundamental do cálculo*. Suponha que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ seja integrável, e defina $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_a^b f(s)\,ds \quad \text{para } x \in [a,b].$$

Então F é contínua em $[a,b]$. Além disto, se f for contínua em $c \in [a,b]$, então F é diferenciável em c e $F'(c) = f(c)$. Se f for contínua em todos os pontos de seu domínio, então F é chamada de *primitiva* da f.

A continuidade da f é essencial para a diferenciabilidade de F. Por exemplo, considere $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

Então

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

Note que F é contínua em $[-1,1]$, mas não diferenciável em $x=0$, ponto em que f é descontínua.

Veja também que duas primitivas de uma função diferem por uma constante. Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e F e $\hat{F}$ suas primitivas. Então $F'=\hat{F}'=f$ em todos os pontos do domínio. Logo, $(F'-\hat{F}')=0$ e portanto $F'=\hat{F}'+C$ para alguma constante C.

Denotamos a primitiva de f por

$$\int f(x)\,dx,$$

também chamada de *integral indefinida* da f.

TEOREMA 8.1.1 (Fundamental do Cálculo (parte 1)). *Seja f contínua. Então*

$$F(x)=\int_a^x f(s)\,ds$$

é diferenciável e $F'(x)=f(x)$.

TEOREMA 8.1.2 (Fundamental do Cálculo (parte 2)). *Seja f integrável. Se F é primitiva de f, então*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b F'(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

É muito comum a notação

$$F\Big|_a^b=F\Big]_a^b=F(b)-F(a).$$

Há que se tomar cuidado com o uso de TFC. Por exemplo, se

$$g(x)=\int_0^{x^2} f(x)\,dx,$$

então ́falso que $g'(x)=f(x^2)$. A forma correta de se calcular g' é a seguinte. Seja $h(x)=x^2$ e $I(s)=\int_0^s f(x)\,dx$. Então $I'(s)=f(s)$ e como $g(x)=I(h(x))$, temos pela regra da cadeia

$$g'(x)=I'(h(x))h'(x)=f(h(x))2x=2xf(x^2).$$

Considere agora o caso geral.

LEMA 8.1.3. Seja p, q funções diferenciáveis em toda reta, e

$$g(x) = \int_{p(x)}^{q(x)} f(t)\, dt.$$

Então $g'(x) = f(q(x))q'(x) - f(p(x))p'(x)$.

Um resultado importante é dado pela fórmula do valor médio. O valor médio da integral de $f[a, b] \to \mathbb{R}$ é dado por

$$f_{\text{med}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

TEOREMA 8.1.4 (Fórmula do valor médio para integrais). *Seja $f[a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$. Então existe $c \in [a, b]$ tal que*

$$f(c) = f_{med}.$$

TEOREMA 8.1.5 (Fórmula de Taylor com resto integral). *Seja $n \geq 0$ e $I = [a, b]$, com $a < b$. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ n vezes diferenciável em I com $f^{(n)}$ contínua em I e tal $f^{(n+1)}$ exista em (a, b). Se x_0, $x \in I$ então*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!} \\ + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} \int_0^1 (1 - t)^n f^{(n+1)}(x_0 + t(x - x_0))\, dt.$$

Note que do Teorema acima obtemos a Fórmula de Taylor com resto de Lagrange se $f^{(n+1)}$ for contínua. De fato, usando o Fórmula do valor médio para integrais, existe $s \in (0, 1)$ tal que

$$f^{(n+1)}(x_0 + s(x - x_0)) = \int_0^1 (1 - t)^n f^{(n+1)}(x_0 + t(x - x_0))\, dt.$$

Denotando $\xi = x_0 + s(x - x_0)$, obtemos a fórmula (5.4.1).

8.1.3. Cálculo das integrais. Pode-se notar depois de algumas tentativas que achar primitivas ou calcular o valor de integrais não é tarefa fácil. Aqui falaremos de duas técnicas comumente usadas nesta tarefa. Consideraremos aqui somente funções integráveis.

8.1.3.1. *Integração por partes.* A primeira técnica, bem simples, é dada executando-se *integração por partes*. Sejam f e g diferenciáveis. Então

$$(fg)\Big|_a^b = \int_a^b \big(f(x)g(x)\big)'\,dx = \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

Logo

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Um exemplo onde este truque pode ser usado é no cálculo de $\int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx$. Note que

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx = \int_0^{2\pi} \sin x \sin x\,dx = -\int_0^{2\pi} \cos' x \sin x\,dx \\ = -\cos x \sin x\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos x \sin' x\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx = \int_0^{2\pi} 1 - \sin^2 x\,dx \\ = 2\pi - \int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx.\end{aligned}$$

Passando $\int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx$ para o lado esquerdo temos que $\int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx = \pi$.

8.1.3.2. *Regra da substituição.* Outro resultado que é bastante útil é a mudança de variáveis no domínio de integração. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável, e $\phi : [c,d] \to [a,b]$ derivável, com $\phi(c) = a$ e $\phi(d) = b$, e tal que ϕ' seja integrável. Então

$$\int_c^d f(\phi(s))\phi'(s)\,ds = \int_{\phi(c)}^{\phi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{8.1.1}$$

A fórmula é prática pois pode ser mais simples integrar $f(x)$ do que $(\phi(s))\phi'(s)$. Para lembrar a fórmula basta definir $u(s) = \phi(s)$, e então $du/ds = \phi'(s)$, i.e., "$du = \phi'(s)ds$", e

$$\int_c^d f(\phi(s))\phi'(s)\,ds = \int_{u(c)}^{u(d)} f(u)\,du.$$

Em boa parte das aplicações, usamos ϕ invertível. Se denotarmos $u = \phi^{-1}$, temos que $\phi'(s) = 1/u'(\phi(s))$ e portanto, de (8.1.1), temos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d \frac{f(u^{-1}(s))}{u'(\phi(s))}\,ds = \int_{u(a)}^{u(b)} \frac{f(u^{-1}(s))}{u'(u^{-1}(s))}\,ds.$$

A forma de lembrar é usando $ds/dx = u'$ implica formalmente em $dx = ds/u'$.

Nos exemplos abaixo, vemos como usar estas identidades.

Exemplo 8.2. Para calcular $\int_0^\pi \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$, notamos que $\sin x = -\cos' x$ e usamos $u(x) = \cos x$. Então $du = -\sin x\,dx$ e

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx = -\int_{\cos 0}^{\cos\pi} \frac{1}{u^3}\,du = \frac{1}{2u^2}\bigg|_1^{-1} = 0.$$

Na verdade, a integral acima poderia ser calculada diretamente observando-se por simetria que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx = -\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$$

Exemplo 8.3. Para calcular $\int_0^{\pi/6} \cos^2(x)\sin^3(x)\,dx$, primeiro notamos que

$$\cos^2(x)\sin^3(x) = \cos^2(x)\sin^2(x)\sin(x) = \cos^2(x)(1-\cos^2(x))\sin(x).$$

Então definimos $u = \cos x$, e então $du = -\sin x dx$. Como $u(0) = \cos(0) = 1$ e $u(\pi/6) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/6} \cos^2(x)\sin^3(x)\,dx = -\int_1^{\sqrt{3}/2} u^2(1-u^2)\,du &= -\left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5}\right)\bigg]_1^{\sqrt{3}/2} \\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{24} + \frac{9\sqrt{3}}{160} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{-11\sqrt{3}}{160} + \frac{2}{15}.\end{aligned}$$

Para integrais indefinidas, não se esquecer de substituir novamente "o valor de u", como no exemplo abaixo.

Exemplo 8.4. Para calcular $\int \frac{\sin(\ln(x))}{x}\,dx$, usamos a substituição $u = \ln(x)$, e como $du = (1/x)dx$, obtemos

$$\int \frac{\sin(\ln(x))}{x}\,dx = \int \sin(u)\,du = -\cos(u) + C = -\cos(\ln(x)) + C.$$

8.2. Áreas planas

Como as integrais definidas dão a área (com sinal) sob determinadas curvas, nada mais natural que usar integrais para cálculo de áreas [**10**].

Exemplo 8.5. Por exemplo, para calcular a área entre a curva $f(x) = 2x$, os pontos $x = 0$ e $x = 3$, e o eixo dado por $y = 0$, há duas maneiras. Podemos usar a fórmula da área do triângulo (base $\times$ altura/2) e ver que $A = 3 \times 6/2 = 9$. Usando integrais,

$$A = \int_0^3 2x\,dx = x^2\Big|_0^3 = 9,$$

como era de se esperar.

É claro que nem todos cálculos de áreas são tão simples como o do exemplo acima. Podemos por exemplo, calcular áreas determinadas por curvas mais sofisticadas.

Exemplo 8.6. Para calcular a área A determinada pela curva $f(x) = \sin x$ e os pontos $x = \pi$ e $x = 2\pi$ e o eixo dado por $y = 0$, basta ver que

$$\int_\pi^{2\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_\pi^{2\pi} = \cos\pi - \cos 2\pi = -2.$$

É claro que uma área não pode ser negativa. O que dá “errado” neste exemplo é que a função $\sin x$ é sempre negativa entre π e 2π. A área determinada então é simplesmente o negativo da integral, i.e., $A = 2$.

Um cuidado extra tem que ser tomado se a função tomar valores positivos e negativos no intervalo de interesse. Por exmplo, no exemplo acima, para achar a área de sin entre $x = 0$ e $x = 2\pi$, não se pode simplesmente calcular

$$\int_\pi^{2\pi} \sin x\,dx = 0.$$

Tem que se dividir o domínio que se quer integrar nas partes onde a função é positiva e onde é negativa. A área é dada na verdade por

$$A = \int_0^\pi \sin x\,dx - \int_\pi^{2\pi} \sin x\,dx = 4.$$

Observação 8.1. A área dada pela integral sem considerar os sinais é chamada às vezes de *área algébrica*, que pode ser negativa ou nula. A área que é sempre postiva, como as determinadas acima, é por vezes chamada *área geométrica*.

Outro problema mais interessante relacionado a áreas é o de *áreas entre curvas* (na verdade, os exemplos acima já são deste tipo, mas uma das curvas é dada por $y = 0$). Considere as funções reais f e g, definidas em $\mathbb{R}$. Pode-se perguntar qual é a área entre as curvas $f(x)$, $g(x)$, $x = a$ e $x = b$. Neste caso, se $f(x) \geq g(x)$ entre a e b, então a área é dada por

$$A = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx.$$

Se f for maior que g apenas em parte do domínio, a integral tem que ser "quebrada" em partes para que não surjam "áreas negativas". Uma forma geral de se escrever a área é

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx.$$

Neste caso, não precisamos nos preocupar se $f(x) \geq g(x)$ ou não.

Exemplo 8.7. Seja $f(x) = 2x + 3$, e $g(x) = x^2$. Determine a área compreendida entre f e g e entre $x = 1$ e $x = 3$. Note que em $[1, 3]$, temos $f(x) \geq g(x)$, e portanto podemos integrar $f - g$ para calcular a área:

$$A = \int_1^3 (2x + 3 - x^2)\,dx = \left(x^2 + 3x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^3 = 9 + 9 - 9 - 1 - 3 + \frac{1}{3} = \frac{16}{3}.$$

Exemplo 8.8. Considere a seguinte questão Anpec 2016, que envolvia calcular a área entre as curvas $y = -x^2 + 6$ e $y = x$. Para resolver temos que achar os pontos de interseção entre as curvas, i.e., resolver $-x^2 + 6 = x$, i.e., $x \in \{2, -3\}$. Note que no intervalo $(-3, 2)$ temos $-x^2 + 6 > x$ (para ver isto, basta calcular o valor das duas funçõesnum ponto; $x = 0$ por exemplo). A área é então dada por

$$\int_{-3}^2 -x^2 + 6 - x\,dx = (-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x)]_{-3}^2 = (-\frac{8}{3} - \frac{8}{2} + 12) - (9 - \frac{9}{2} - 18)$$

$$= -\frac{8}{3} + 8 + 9 + \frac{9}{2} = -\frac{16}{6} + \frac{102}{6} + \frac{27}{6} = \frac{103}{6}.$$

8.3. Integrais impróprias

Integrais impróprias são integrais de funções ilimitadas, ou em domínios ilimitados, e seus valores são dados através de limites, se estes existirem. Nestes casos, dizemos que as integrais *existem*, ou *convergem*.

Em domínios ilimitados, as integrais podem ser

$$\int_a^\infty f\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f\,dx, \qquad \int_{-\infty}^b f\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^\infty f\,dx = \int_{-\infty}^0 f\,dx + \int_0^\infty f\,dx.$$

É importante atentar para um detalhe nas integrais em $(-\infty,\infty)$. Para esta existir, tem que existir o limite $\lim_{b\to\infty}\int_0^b f\,dx$ e o limite $\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f\,dx$, *separadamente*. Note que isto é diferente de escrever

$$\int_{-\infty}^\infty f\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^a f\,dx.$$

Integrais de funções com assíntotas verticais são definidas de forma análoga. Seja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ e suponha f integrável em $[a+\delta,b]$ para todo $\delta>0$. Definimos então

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{\delta\to 0}\int_{a+\delta}^b f\,dx$$

quando este limite existir. Quando a função é ilimitada numa vizinhança de b, a definição é análoga:

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{\delta\to 0}\int_a^{b-\delta} f\,dx$$

O último caso é quando a singularidade fica no interior do intervalo. Por exemplo, seja $c\in(a,b)$ tal que f seja integrável em $(a,c-\delta)$ e em $(c+\delta,b)$. Definimos então

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx = \lim_{\delta\to 0^+}\int_a^{c-\delta} f\,dx + \lim_{\delta\to 0^+}\int_{c+\delta}^b f\,dx.$$

Novamente, no caso acima, os dois limites têm que existir. Por exemplo, a função dada em $[-1,1]$ por $f(0)=0$ e, se $x\neq 0$ por $f(x)=\operatorname{sgn}(x)/x$ não é integrável, apesar de termos

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\int_{-1}^{-\delta}\frac{-1}{x}\,dx + \int_\delta^1 \frac{1}{x}\,dx\right) = 0.$$

EXEMPLO 8.9. A integral imprópria $\int_0^1 1/\sqrt{x}\,dx$ está bem definida pois

$$\lim_{\delta\to 0}\int_\delta^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\delta\to 0} 2\sqrt{x}\Big|_\delta^1 = 2.$$

EXEMPLO 8.10. As integrais impróprias $\int_0^1 1/x\,dx$ e $\int_1^\infty 1/x\,dx$ não existem pois

$$\lim_{\delta\to 0}\int_\delta^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\delta\to 0}\log x\Big|_\delta^1 = +\infty, \qquad \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\log x\Big|_1^b = +\infty.$$

Vemos neste exemplo que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ não garante que f seja integrável.

EXEMPLO 8.11. Considere agora a função $f(x) = 1/x^p$. Veremos que o caso $p = 1$ é o "caso limite". Vamos calcular

$$\text{a)}\ \int_0^1 x^p\,dx, \qquad \text{b)}\ \int_1^\infty x^p\,dx.$$

Note que a primitiva de x^{-p} é dada por $\ln x$ se $p = 1$, e $x^{1-p}/(1-p)$ se $p \neq 1$, e portanto

$$\int_a^b \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \ln(b/a) & \text{se } p = 1, \\ \frac{b^{1-p}-a^{1-p}}{1-p} & \text{se } p \neq 1. \end{cases}$$

Primeiro, considerando integrais entre 0 e 1, temos que

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{a\to 0}\begin{cases} \ln(b/a) & \text{se } p = 1 \\ \frac{1-a^{1-p}}{1-p} & \text{se } p \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} +\infty & \text{se } p \geq 1, \\ \frac{1}{1-p} & \text{se } p < 1. \end{cases}$$

Para integrais no intervalo $(1, +\infty)$ temos

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to\infty}\begin{cases} \ln(b) & \text{se } p = 1 \\ \frac{b^{1-p}-1}{1-p} & \text{se } p \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} +\infty & \text{se } p \leq 1, \\ \frac{1}{p-1} & \text{se } p > 1. \end{cases}$$

EXEMPLO 8.12. Calcule $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$.

Solução: observe que a integral é imprópria pois o integrando tem uma assíntota vertical em $x = 1$. Usando a definição, temos

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{a\to 1^+}\int_a^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx.$$

como

$$\int_a^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = 2(x-1)^{1/2}|_a^3 = 2(\sqrt{2}-\sqrt{a-1}),$$

temos

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{a\to 1^+}\int_a^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{a\to 1^+} 2(\sqrt{2}-\sqrt{a-1}) = 2\sqrt{2}.$$

Integrais impróprias envolvendo assíntotas verticas *têm* que ser calculadas tomando limites, *mesmo que pareça desnecessário*. Considere o exemplo abaixo.

EXEMPLO 8.13. Calcule $\int_0^2 \frac{1}{x-1}\,dx$, se possível.

Solução: Note que como existe uma assíntota vertical em $x = 1$, temos que calcular

$$\int_0^2 \frac{1}{x-1}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x-1}\,dx,$$

e a integral à esquerda só existirá se *ambas* integrais à direita forem convergentes. Note entretanto que

$$\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{a\to 1^-}\int_0^a \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{a\to 1^-}(\ln|x-1|)\Big|_0^a = \lim_{a\to 1^-}(\ln|a-1|-\ln 1) = -\infty.$$

Logo, a integral não converge, e não é nem necessário calcular $\int_1^2 \frac{1}{x-1}\,dx$.

Note entretanto que se tentássemos calcular $\int_0^2 \frac{1}{x-1}\,dx$ diretamente, o resultado seria errado:

$$\int_0^2 \frac{1}{x-1}\,dx = \ln|x-1|)\Big|_0^2 = \ln 1 - \ln 1 = 0.$$

A exemplo de séries, dizemos que uma integral imprópria de uma função f *converge absolutamente* se $|f|$ for integrável. Temos então o seguinte resultado.

TEOREMA 8.3.1. *Suponha f contínua. Se a integral de f converge absolutamente, então a integral de f converge. Em outras palavras, $|f|$ integrável implica em f integrável.*

Um resultado importante é dado pelo Teorema da Comparação abaixo. O resultado pode auxiliar na decisão de quando uma integral imprópria converge ou diverge, mesmo sem o cálculo de seu valor.

Teorema 8.3.2 (Teorema da Comparação). *Sejam $f \geq 0$ e $g \geq 0$, com $f \leq g$ no domínio de integração. Então, $\int g$ convergente implica em $\int f$ convergente. e $\int f$ divergente implica em $\int g$ divergente.*

Exemplo 8.14. Decida se $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ é ou não integrável.

Solução: Note que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$. Como e^{-x^2} é contínua, basta analisar a integral entre 1 e ∞. Neste caso, como $x \geq 1$ implica em $x^2 \geq x$, temos $e^{-x^2} \leq e^{-x}$, e

$$0 \leq \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx \leq \int_1^\infty e^{-x}\,dx$$

Mas $\int_1^\infty e^{-x}\,dx$ é convergente pois

$$\lim_{a\to+\infty} \int_1^a e^{-x}\,dx = -\lim_{a\to+\infty} e^{-x}|_1^a = -\lim_{a\to+\infty} (e^{-a} - \frac{1}{e}) = \frac{1}{e}.$$

Então, como $\int_1^\infty e^{-x}\,dx$ é convergente, então $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ também o é.

Exemplo 8.15. A integral $\int_0^\infty (1+\sin^2 x)x^{-1/2}\,dx$ é divergente pelo Teorema da Comparação, pois $\int_0^\infty x^{-1/2}\,dx$ diverge.

CAPíTULO 9

Revisão de Sequências e Séries

[1] Neste capítulo veremos sequências e séries, que nada mais é que um caso particular de sequências.

9.1. Sequências

Uma *sequência* nos reais nada mais é que uma função que associa, para cada inteiro $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, um ponto na reta. Por exemplo,

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

onde $x_i \in \mathbb{R}$ para todo i inteiro, é uma sequência. Normalmente denotamos sequência por $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ ou $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ou $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ ou simplesmente (x_i).

EXEMPLO 9.1. Como primeiro exemplo, considere a sequência definida por $x_i = (-1)^i/i$. Esta sequência é $\big((-1)^i/i\big)_{i=1}^{\infty}$, i.e., é dada por $(-1, 1/2, -1/3, 1/4, \dots)$. Ver como a sequência se comporta na Figura 1.

EXEMPLO 9.2. $x_n = (-1)^n$ define a sequência $(-1, 1 - 1, 1, -1, 1, -1, \dots)$.

[1]Última Atualização: 16/03/2022

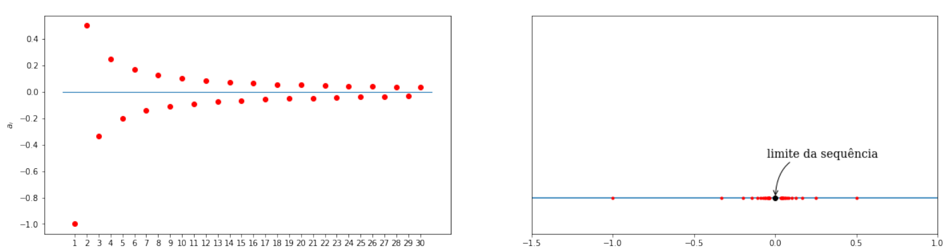


FIGURA 1. Sequência dada por $\big((-1)^i/i\big)_{i=1}^{\infty}$, e seu comportamento na reta.

EXEMPLO 9.3. A sequência de Fibonacci é definida recursivamente por $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, e $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ para $n \geq 2$. Portanto temos $(x_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$.

A pergunta mais importante em relação a uma sequência (x_n) é se esta converge ou não, isto é, se quando n aumenta, os termos x_n se aproximam de algum valor real. Note que para isto, não importa o que acontece com finitos termos da sequência, mas sim seu comportamento assintótico com respeito a n. Em outras palavras queremos determinar o comportamento das sequências no "limite".

Dizemos que uma sequência $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ converge para um número real L se para todo intervalo contendo L, existe um "momento" em que a sequência "entra" neste intervalo e não sai mais. De forma mais rigorosa (e mais satisfatória), temos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 9.1.1. *Dizemos que* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge para* $L \in \mathbb{R}$ *se para todo* $\epsilon > 0$ *existir* $N^* \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$n > N^* \implies x_n \in (L - \epsilon, L + \epsilon).$$

Note que escrever $x_n \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$ *é o mesmo que escrever* $\left|x_n - L\right| < \epsilon$. *Quando a sequência* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge para* $L \in \mathbb{R}$, *escrevemos* $x_n \to L$ *quando* $i \to \infty$, *ou ainda,*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = L.$$

EXEMPLO 9.4. Se $x_n = 1$, então $\lim x_n = 1$. De fato, dado $\epsilon > 0$, para todo $n \geq 1$ temos $|x_n - 1| = 0 < \epsilon$.

EXEMPLO 9.5. $\lim(1/n) = 0$. De fato, dado $\epsilon > 0$, seja N tal que $1/N < \epsilon$. Logo, para todo $n > N$ temos $|1/n - 0| = 1/n < 1/N < \epsilon$.

Observe que diferentes situações ocorrem nos exemplos acima. No primeiro, a sequência é constante, e a escolha de N^* independe de ϵ. Já no exemplo seguinte, N^* claramente depende de ϵ.

EXEMPLO 9.6. $(0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, 2, \dots)$ não converge para 0. De fato, tome $\epsilon = 1$. Então para todo $N \in \mathbb{N}$ temos $2N > N$ e $x_{2N} = 2$. Portanto $|x_{2N} - 0| = 2 > \epsilon$.

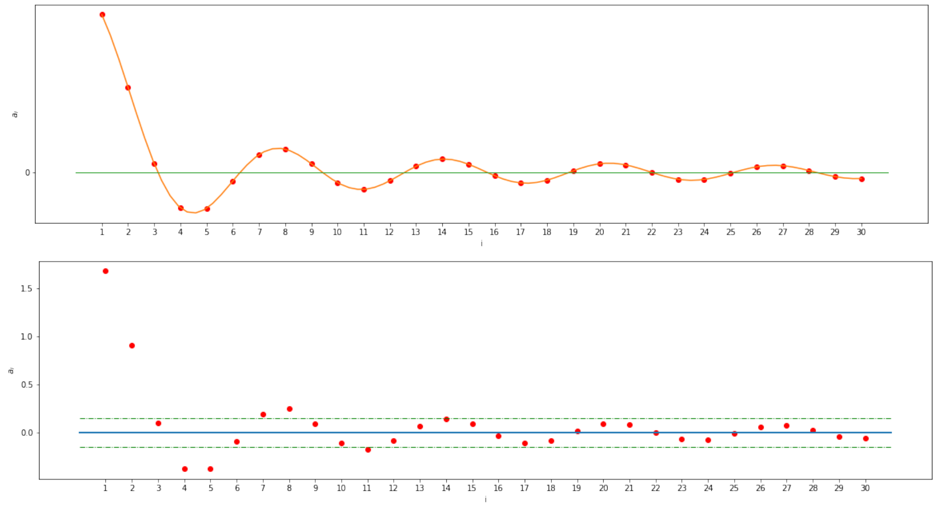


Figura 2. Sequência dada por $\big((2\sin i)/i\big)$. No topo vemos que a sequência é definida via $f(x) = (2\sin x)/x$ para x número natural. Na figura de baixo, ilustramos a convergência. Dada uma faixa de raio $\epsilon > 0$, se i for suficientemente grande, a sequência "entra" na faixa e não sai mais.

No exemplo 9.6 o objetivo é mostar que um certo valor x *não* é o limite da sequência (x_n). Mostramos então que existe pelo menos um certo $\epsilon > 0$ tal que para todo N, conseguimos achar $n > N$ tal que $|x_n - x| > \epsilon$. O que fizemos foi *negar* a convergência.

Exemplo 9.7. Muitas vezes as sequências são definidas por "funções", i.e., dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, é possível definir a sequência $\big(f(i)\big)_{i=1}^{\infty}$. Por exemplo, considere a sequência definida por $x_i = (2\sin i)/i$. Note que $x_i \to 0$, pois dado $\epsilon >$, se $i^* > 1/\epsilon$ for um um número natural, então $x_i \in (-\epsilon, \epsilon)$ para todo $i > i^*$ (mostre os detalhes). Ver os gráficos na Figura 2.

Talvez a segunda pergunta mais natural em relação aos limites de sequências é quanto a unicidade destes, quando existirem. A resposta é afirmativa, como mostra o resultado abaixo.

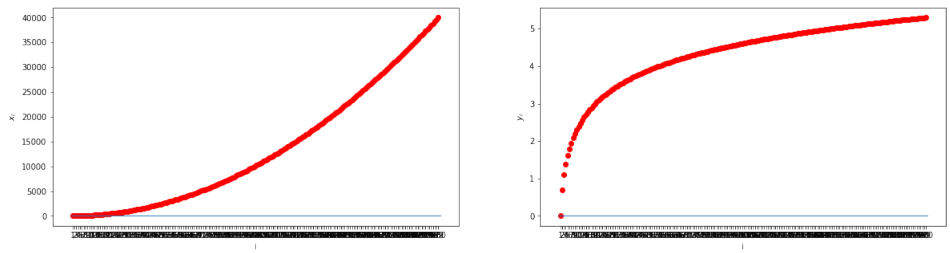


FIGURA 3. Gráficos das sequências (i^2) e $(\log i)$. Ambas vão para infinito.

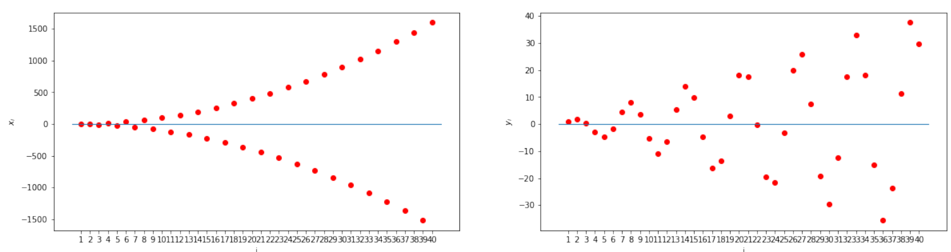


FIGURA 4. Gráfico das sequências $x_i = (-1)^i i^2$ e $x_i = i \sin i$. Elas não convergem nem vão para $-\infty$ ou $+\infty$.

TEOREMA 9.1.2 (Unicidade de limite). *Uma sequência pode ter no máximo um limite.*

Nem sempre sequências convergem. Em particular, assim como no caso de limites de funções, sequências não convergentes podem "divergir" para $+\infty$ ou $-\infty$. Por exemplo, este são os casos das sequências definidas por $x_i = i^2$ ou $x_i = \log i$; ver Figura 3. Formalmente, dizemos que $\lim_{i\to\infty} x_i = +\infty$ se para todo número C, existe um índice i^* tal que

$$i > i^* \implies x_i > C.$$

Definição análoga vale para $\lim_{i\to\infty} x_i = -\infty$.

Note que as sequências definidas por $x_i = (-1)^i i^2$ e $x_i = i \sin i$ não convergem nem "vão para infinito" quando $i \to \infty$, como mostram os gráficos da Figura 4.

Relação entre limites de sequências e funções. Note que a definiçãode convergência de sequências é semelhante à de limites de funções. De fato, suponha que $a_i = f(i)$ para alguma função$f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$. Então as definições $\lim_{i\to\infty} a_i = \lim_{i\to\infty} f(i)$, que é um caso particular de $\lim_{t\to\infty} f(t)$. Logo, se $\lim_{t\to\infty} f(t) = L$, então

$$\lim_{i\to\infty} a_i = \lim_{i\to\infty} f(i) = \lim_{t\to\infty} f(t) = L.$$

Esta relação com funções pode possibilitar o cálculo de limites via, por exemplo, regra de L'Hôpital. A regra não se aplica a sequências, mas pode ser aplicada a funções. Tome cuidado entretanto pois $\lim_{n\to\infty} a_n$ pode existir mesmo que $\lim_{n\to\infty} f(n)$ não exista.

Exemplo 9.8. Considere a sequência

$$\big(\sin(2\pi n)\big)_{n\in\mathbb{N}} = \big(0, 0, 0, \dots\big).$$

Então, a sequência claramente converge. Entretanto, $\lim_{x\to\infty} \sin(2\pi x)$ não existe.

Graficamente, na Figura 2, considere novamente a sequência $x_i = (2\sin i)/i$, e $f(t) = (\sin t)/t$ para $t \geq 1$.

Operações com sequências. Note que dadas sequências $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ e $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ podemos definir a soma e produto de sequências, dadas por $\{x_i + y_i\}_{i=1}^{\infty}$ e $\{x_i y_i\}_{i=1}^{\infty}$. Se $y_i \neq 0$ para todo i, então podemos definir também $\{x_i/y_i\}_{i=1}^{\infty}$. Finalmente, se c é uma constante, definimos $\{cx_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Exemplo 9.9. Se $x_n = (2, 4, 6, 8, \dots)$ e $(y_n) = (1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots)$, então $x_n \cdot y_n = (2, 2, 2, \cdots)$.

Supondo agora que $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ e $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ convergem, temos que

$$\lim_{i\to\infty}(x_i + y_i) = \lim_{i\to\infty} x_i + \lim_{i\to\infty} y_i, \qquad \lim_{i\to\infty}(x_i y_i) = \lim_{i\to\infty} x_i \lim_{i\to\infty} y_i,$$
$$\lim_{i\to\infty}(x_i/y_i) = (\lim_{i\to\infty} x_i)/(\lim_{i\to\infty} y_i) \quad \text{caso } \lim_{i\to\infty} y_i \neq 0.$$

Observe que as propriedades acima valem somente se as sequências forem convergentes. Por exemplo, se $x_i = 1 + i$ e $y_i = -i$, então a sequência constante dada por $x_i + y_i = 1$ está bem definida e converge $\lim_{i\to\infty}(x_i + y_i) = 1$ Entretanto não faz sentido calcular

$$\lim_{i\to\infty} x_i + \lim_{i\to\infty} y_i.$$

Exemplo 9.10. $\lim_{n\to\infty}\big((2n+1)/n\big) = 2$. De fato,

$$\frac{2n+1}{n} = (2) + \big(\frac{1}{n}\big).$$

Como $\lim_{n\to\infty}(2) = 2$ e $\lim_{n\to\infty}(1/n) = 0$, nós obtemos o resultado.

Exemplo 9.11. $\lim_{n\to\infty}\big(2n/(n^2+1)\big) = 0$, pois

$$\frac{2n}{n^2+1} = \frac{2/n}{1+1/n^2}.$$

Como $\lim_{n\to\infty}(2/n) = 0$ e $\lim_{n\to\infty}(1+1/n^2) = 1 \neq 0$, podemos aplicar o resultado sobre quociente de sequências.

Outros resultados.

Confronto. Vale para sequências o resultado análogo ao do teorema do confronto para funções. Aprendemos que se temos uma sequência "sanduichadas" entre outras duas sequências convergentes que tem o mesmo limite, então a sequência do meio converge e tem também o mesmo limite.

Lema 9.1.3 (sanduíche de sequências). Sejam (x_n), (y_n) e (z_n) sequências tais que $x_n \le y_n \le z_n$ para todo $n > N$, para algum $N \in \mathbb{N}$. Assuma ainda que (x_n) e (z_n) convergem com $\lim x_n = \lim z_n$. Então (y_n) converge e $\lim y_n = \lim x_n = \lim z_n$.

Em particular, temos o seguinte resultado.

Lema 9.1.4. Seja (a_n) sequência em $\mathbb{R}$ convergente para 0. Se para (x_n) sequência em $\mathbb{R}$ existir $c > 0$ tal que

$$|x_n - x| \le c|a_n| \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

então $x_n \to x$.

Exemplo 9.12. Seja $x_n = (2/n)\sin(1/n)$. Então $\lim_{n\to\infty}\big((\sin n)/(2n)\big) = 0$, pois $-1 \le \sin n \le 1$ e então

$$-2/n \le 2(\sin n)/n \le 2/n,$$

e o resultado segue do lema 9.1.3. Outra forma de se olhar é usando

$$|x_n - 0| \le 2\frac{1}{n}.$$

Como $1/n \to 0$, podemos usar o Lema 9.1.4 para garantir que $\lim[(2/n)\sin(1/n)] = 0$.

Outro resultado interessante nos diz que se a_n é sequência de números positivos, então $x_n \to 0$ se e somente se $1/x_n \to \infty$ (resultado análogo vale trocando-se $+\infty$ por $-\infty$). Ver exercício 9.8.

Outro resultado importante refere-se à convergência do valor absoluto de sequências: se uma sequência converge, entao a sequência de valores absolutos também converge. A reciproca *não* é verdadeira. Basta considerar como contra-exemplo a sequência $\big((-1)^n\big)$. Neste caso a sequência diverge mas a sequência de seus valores absolutos converge.

LEMA 9.1.5. Se (x_n) for convergente, então $(|x_n|)$ também o é. Mas a recíproca não é verdadeira.

DEMONSTRAÇÃO. Exercício. □

Outros resultados importantes para tentar achar um "candidato" limite vêm a seguir. O primeiro nos diz que se temos uma sequência de números positivos, então o limite, se existir, tem que ser não negativo, podendo ser zero.

LEMA 9.1.6. Seja (x_n) convergente com $\lim x_n = x$. Se $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $x \geq 0$.

COROLÁRIO 9.1.7. Se (x_n) e (x_n) são convergentes com $\lim x_n = x$ e $\lim y_n = y$, e se existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \geq y_n$ para todo $n > N$, então $x \geq y$.

Limite do módulo. Considere a sequência $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Então vale que $\lim_{i\to\infty} x_i = 0$ se e somente se $\lim_{i\to\infty} |x_i| = 0$.

Limites de funções contínuas. Se $x_i \to L$ e $f(\cdot)$ for uma função contínua em L, então vale

$$\lim_{i\to\infty} f(x_i) = f(\lim_{i\to\infty} x_i) = f(L).$$

Dizemos neste caso que "podemos passar o limite para dentro da função".

Teste da Razão.

LEMA 9.1.8 (teste da razão). Seja (x_n) sequência de números positivos tal que (x_{n+1}/x_n) converge e $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}/x_n) < 1$. Então (x_n) converge e $\lim_{n\to\infty}(x_n) = 0$.

COROLÁRIO 9.1.9. Seja (x_n) tal que $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$$

existe e $L > 1$. Então $|x_n| \to \infty$.

EXEMPLO 9.13. Seja $(x_n) = n/2^n$. Então

$$\lim_{n\to\infty}\big(\frac{x_{n+1}}{x_n}\big) = \lim_{n\to\infty}\big(\frac{n+1}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n}\big) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\big(\frac{n+1}{n}\big) = \frac{1}{2}.$$

Pelo teste da razão temos $\lim_{n\to\infty}(x_n) = 0$

EXEMPLO 9.14. Note que para $x_n = 1/n$, temos $\lim_{n\to\infty} x_{n+1}/x_n = 1$ e (x_n) converge. Entretanto, para $x_n = n$, temos $\lim_{n\to\infty} x_{n+1}/x_n = 1$ mas (x_n) *não convergente*. Portanto o teste não é conclusivo quando o limite da razão entre os termos é um.

Sequências monótonas (crescentes/decrescentes)e limitadas. Um classe muito especial de sequências é a de sequências monótonas. Uma sequência monótona é tal que seus valores não "oscilam", i.e., eles ou nunca diminuem ou nunca aumentam. Pode-se ver que a definição de sequência monótona é restritas a uma dimensão.

Dizemos que uma sequência (x_i) é crescente se $x_i < x_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, i.e.,

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots .$$

Ela é dita decrescente se $x_i > x_{i+1}$. Em qualquer um dos dois casos, dizemos que a sequência é monótona.

OBSERVAÇÃO 9.1. A nomenclatura do que é crescente, não-decrescente, etc, não é uniforme. Ver [**4**, **8**, **16**, **26**, **34**].

EXEMPLO 9.15. $(1, 2, 3, 4, \dots)$ é crescente, e $(1, 2, 3, 3, 3, 3, \dots)$ não decrescentes.

Exemplo 9.16. $(1/n)$ é decrescente.

Exemplo 9.17. $(-1, 1, -1, 1, -1, \dots)$ não é monótona.

Outro conceito importante é o de sequências limitadas. Dizemos que (x_i) é limitada superiormente se existir número real $\overline{C}$ tal que $x_i \leq \overline{C}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. De forma análoga, ela será limitada inferiormente se existir número real $\underline{C}$ tal que $x_i \leq \underline{C}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Se (x_i) for limitada superiormente e inferiormente, dizemos que é limitada. Note que (x_i) será limitada se e somente se $(|x_i|)$ for limitada superiormente.

Por exemplo, $\big((-1)^i\big)_{i\in\mathbb{N}}$, $(\sin i)_{i\in\mathbb{N}}$ são limitadas; a sequência $(i)_{i\in\mathbb{N}}$ é limitasdo inferiormente mas não superiormente, e portanto não é limitada; finalmente $(i \sin i)_{i\in\mathbb{N}}$ não é limitada nem inferiormente nem superiormente.

Os seguintes resultados parecem naturais:

- Toda sequência convergente é limitada (é razoável pensar que se a sequência converge, ela não pode ter elementos arbitrariamente grandes em valor absoluto)
- Nem toda sequência limitada é convergente. Por exemplo $(-1, 1, -1, 1, \dots)$, ou $(\sin i)$.

Para sequências monótonas, vale o seguinte resultado.

Teorema 9.1.10. *Uma sequência monótona é convergente se e somente se é limitada.*

Exemplo 9.18. (n) diverge pois não é limitada.

Exemplo 9.19. (a^n) diverge se $a > 1$ pois é ilimitada.

Exemplo 9.20. (a^n) converge se $0 < a \leq 1$ pois é monótona decrescente e limitada. Além disso, $\lim_{n\to\infty}(a^n) = 0$.

9.2. Séries

Sejam $c_1, c_2 \ldots$ números reais. Uma série

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \tag{9.2.1}$$

pode ser compreendida através da sequência s_n definida pela *somas parciais*

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} c_i. \tag{9.2.2}$$

Dizemos que uma série $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ converge se a sequência s_n acima definida converge. Em geral, a expressão (9.2.1) nem sempre faz sentido, enquanto (9.2.2) está sempre bem-definida.

A definição de convergência para séries é análoga à de sequências.

Definição 9.2.1. *Dizemos que $s \in \mathbb{R}$ é* limite de uma série $\sum_{i=1}^{\infty} c_n$ *se for o limite da sequência s_n das somas parciais* (9.2.2).

De forma equivalente, $s \in \mathbb{R}$ é limite de uma série $\sum_{i=1}^{\infty} c_n$, *se para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\left| s - \sum_{i=1}^{n} c_n \right| < \epsilon \quad \textit{para todo } n \geq N.$$

Escrevemos neste caso que que $s = \sum_{i=1}^{\infty} c_n$. Se uma série não tem limite, dizemos que ela diverge ou é divergente.

Exemplo 9.21. Seja $S_n = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \cdots + 1/n$. Mostraremos que (S_n) não é limitada, e portanto divergente. Note que

$$x_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \sum_{i=3}^{4} \frac{1}{n} + \sum_{i=5}^{8} \frac{1}{n} + \cdots + \sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{2} + \sum_{i=3}^{4} \frac{1}{4} + \sum_{i=5}^{8} \frac{1}{8} + \cdots + \sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{1}{2^n}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}.$$

Logo (S_n) não é limitada, e portanto diverge.

Outra forma de ver que a sequência acima diverge é por indução. Quero mostrar que $S_{2^n} \geq 1 + n/2$. Note que $S_2 = 1 + 1/2$. Assumindo que $S_{2^{n-1}} \geq 1 + (n-1)/2$ temos

$$S_{2^n} = S_{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n} > 1 + \frac{(n-1)}{2} + \frac{1}{2} > 1 + \frac{n}{2},$$

como queríamos demonstrar. Mais uma vez a conclusão é que (S_n) não é limitada, logo diverge.

Exemplo 9.22. A sequência

$$x_n = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

converge. Primeiro note que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2+n}{2}. \tag{9.2.3}$$

Temos então que

$$x_n = \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2n}\right).$$

Logo (x_n) é soma de duas sequências convergentes, $(1/2)$ e $(1/2)(1/n)$ e

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Devido às suas peculiaridades, as séries possuem algumas propriedades próprias. Um resultado importante em se tratando de séries versa sobre o comportamento assintótico dos termos que a compõem. Temos o seguinte resultado.

Lema 9.2.2. Seja a série dada por $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ convergente. Então $\lim_{i\to\infty} c_i = 0$.

Observação 9.2. Do resultado acima, concluimos que se c_i não tem limite, ou se seu limite não é zero, a série não converge.

Exemplo 9.23. Considere as séries de termos alternados $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i$. Como a sequência $(-1)^i$ não converge, a série não é convergente. O mesmo vale para $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\pi)$.

Uma classe de séries especial é dada pelas *séries geométricas*. Para $r \in \mathbb{R}$, esta série é dada por

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^i.$$

Note que as somas parciais $S_n = \sum_{i=0}^{n} r^i$ divergem se $|r| \geq 1$, e convergem se $|r| < 1$. De fato, se $|r| \geq 1$, então r^i não converge a zero, e portanto a série não converge. Para $|r| < 1$, temos

$$S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r},$$

e portanto a série converge para $\lim_{n\to\infty} S_n = 1/(1-r)$.

Detalharemos abaixo a questão de convergência absoluta e condicional, e testes de convergência próprios para séries. Dizemos que a série $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ converge *absolutamente* se a série $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|$ converge. E dizemos que $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ converge *condicionalmente* se $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ converge, mas não converge absolutamente, i.e., $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|$ diverge. O resultado abaixo nos garante que a convergência absoluta é suficiente para uma série convergir.

TEOREMA 9.2.3. *Toda série que converge absolutamente é convergente.*

OBSERVAÇÃO 9.3. Uma pergunta natural é o que aconteceria se trocássemos a ordem em que se soma a série. Se a série for absolutamente convergente, então a ordem da soma pode ser trocada e a série ainda converge para o mesmo valor. Entretanto, se a série for condicionalmente convergente, o seguinte surpreendente resultado vale: é possível trocar a ordem da soma tal que a série convirja para *qualquer* número real.

OBSERVAÇÃO 9.4. Note que se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge absolutamente. Mas a recíproca não é verdadeira.

Prosseguimos agora descrevendo alguns testes que podem ser usados para definir convergências de séries.

LEMA 9.2.4 (Teste da razão). Suponha que $\lim_{i\to\infty} |c_{i+1}/c_i| = L$. Então se $L < 1$, a série $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ converge absolutamente, e se $L > 1$, a série diverge.

LEMA 9.2.5 (Teste da raiz). Suponha que $\lim_{i\to\infty} \sqrt[i]{|c_i|} = L$. Então se $L < 1$, a série $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ converge absolutamente, e se $L > 1$, a série diverge.

OBSERVAÇÃO 9.5. Tanto o teste da razão como a da raiz são inconclusivo caso $L = 1$, como os exemplos $\sum_{i=1}^{\infty} 1/i$ e $\sum_{i=1}^{\infty} 1/i^2$ ilustram.

LEMA 9.2.6 (Teste da integral). Seja $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ não negativa e monótona decrescente. Então $\sum_{i=1}^{\infty} f(i)$ converge se e somente se $\int_1^{\infty} f(x)\, dx < +\infty$.

LEMA 9.2.7 (Série de termos positivos). Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, onde (a_n) é sequência de números positivos. Então a série converge se e somente se a sequência das somas parciais é limitada.

Uma aplicação importante do Lema 9.2.7 é na determinação da convergência da série harmônica alternada, como mostramos a seguir.

EXEMPLO 9.24 ([**4**]). Considere a *série harmônica alternada* $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}/i$. Então a série converge pelo seguinte argumento. Considere a série "par" das somas parciais

$$S_{2n} = (1 - 1/2) + (1/3 - 1/4) + \cdots + (1/(2n - 1) - 1/(2n)),$$

e "ímpar"

$$S_{2n+1} = 1 - (1/2 - 1/3) - (1/4 - 1/5) - \cdots - (1/(2n) - 1/(2n + 1)).$$

Como cada termo entre parênteses nas séries acima são positivos, temos que a série par é monótona crescente e a ímpar monótona decrescente. Note a seguir que

$$0 < S_{2n} < S_{2n} + 1/(2n + 1) = S_{2n+1} < 1, \tag{9.2.4}$$

e portanto ambas são limitadas e convergem. Por (9.2.4), concluimos que convergem para o mesmo valor, e que toda a série converge.

O Exemplo 9.24 é caso particular do seguinte resultado, cuja demonstração segue os mesmos passos dos do exemplo.

LEMA 9.2.8 ([**8**]). Seja a_n sequência reais não negativos e não crescente, i.e.,

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0.$$

Suponha ainda que $\lim a_i = 0$. Então, a série alternada $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i a_i$ converge.

LEMA 9.2.9 (Teste da comparação). Sejam $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{i=1}^{\infty} b_n$ duas séries de termos não negativos tais que $a_n \leq cb_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então

- Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge
- Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge

LEMA 9.2.10 (Teste da comparação "no limite"). Suponha que $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{i=1}^{\infty} b_n$ sejam séries de termos positivos tais que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0.$$

Então $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ converge se e somente se $\sum_{i=1}^{\infty} b_n$ convergir.

Muitas vezes é possível calcular o valor exato da série, como nos exemplos abaixo

EXEMPLO 9.25. Considere a série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Note que $1/[n(n+1)] = 1/n - 1/(n+1)$, e portanto a n-ésima soma parcial s_n é dada por

$$s_n = (1 - 1/2) + (1/2 - 1/3) + \cdots + (1/n - 1/(n+1)) = 1 - 1/(n+1).$$

Logo a série converge para $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$.

Da mesma forma, podemos calcular o valor de séries envolvendo termos como

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+2)}.$$

A seguinte lista de recomendações sobre qual teste usar em qual situação pode ser útil [**28**]:

- Se a série for da forma $\sum 1/n^p$, ela é uma série p, convergente se $p > 1$ e divergente se $p < 1$

- Se a série tiver a forma $\sum ar^n$, é uma série geométrica que converge se $|r| < 1$ e diverge de $|r| \geq 1$.
- Se a série tiver uma forma similar a uma série p ou a uma série geométrica, então um dos testes de comparação deve ser considerado. Em particular, se a_n for uma função racional ou uma função algébrica de n, a série deve ser comparada com uma série p.
- Se $lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, o Teste para Divergência deve ser usado.
- Se a série for da forma $(-1)^n a_n$, então o Teste da Série Alternada é recomendado.
- Séries que envolvem fatoriais ou outros produtos (incluindo uma constante elevada à n-ésima potência) são com frequência testadas convenientemente usando-se o Teste da Razão. Tenha em mente que $|a_{n+1}/a_n| \to 1$ para todas as séries p e, portanto, todas as funções racionais ou algébricas de n. Então, o Teste da Razão não deve ser usado.
- Se a_n for da forma $(b_n)^n$, o Teste da Raiz pode ser útil.
- Se $a_n = f(n)$ e $\int_1^\infty f(x)\,dx$ é fácil de ser calculada, então o Teste da Integral é recomendado.

9.3. Exercícios

Exercício 9.1. Calcule

(1) $\lim_{n\to\infty} \ln n/n$
(2) $\lim_{n\to\infty} n!/n^n$

Exercício 9.2. Mostre que $\big((1+1/n)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercício 9.3. Determine para quais valores de a a sequência $(n^3 a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Faça o mesmo para $(a^n/n!)_{n\in\mathbb{N}}$. Calcule os limite.

Exercício 9.4. Seja $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = (1 + a_n)/3$. Mostre que a sequência é crescente e limitada (e portanto converge). Calcule seu limite.

Exercício 9.5. Determine se as séries $\sum_{n=1}^\infty (\sin n)/n^2$ e $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n/\ln n$ convergem. O motivo é o mesmo?

Exercício 9.6. Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} n^n/n!$ converge.

Exercício 9.7. Demonstrar o Teorema 9.1.5.

Exercício 9.8. Mostre que se x_n é sequência de números positivos, então $x_n \to 0$ se e somente se $1/x_n \to \infty$.

Exercício 9.9. Seja (x_n) tal que $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$$

existe e $L > 1$. Mostre que para todo $C \in \mathbb{R}$ existe $N^* \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N^* \implies |x_n| > C.$$

Exercício 9.10. Mostre o resultado da Observação 9.4.

CAPíTULO 10

Equações Diferenciais Ordinárias

[1] Neste capítulo discutiremos aspectos relacionados a soluções de equações diferenciais ordinárias (EDOs).

10.1. Equações lineares de primeira ordem

10.1.1. Equações separáveis. Uma EDO é dita *separável* quando é da forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p(x)}{q(y)}.$$

Manipulando formalmente a equação acima, vemos que $q(y)dy = p(x)dx$. Integrando em ambos os lados temos que

$$\int_{y_0}^{y(x)} q(y)dy = \int_{x_0}^{x} p(x)dx$$

onde $y_0 = y(x_0)$.

10.1.2. Fatores integrantes. Considere a equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$y' + p(x)y = g(x), \tag{10.1.1}$$

$$y(x_0) = y_0,. \tag{10.1.2}$$

Se f e g forem continuas, então existe um única solução para o problema acima num intervalo aberto contendo x_0. Esta solução é dada como $y = y_h + y_p$, soma de uma solução homogenea y_h com uma solucao particular Y_p. Uma solução homogênea é dada por qualquer função que satisfaça $y_h' + p(x)y_h = 0$. Por outro lado, uma solução particular tem que satisfazer (10.1.1).

[1] Última Atualização: 18/08/2022

Para encontrar uma solução particular, usamos *fatores de integração*. Seja $\mu(x)$ tal que

$$\mu'(x) = p(x)\mu(x). \tag{10.1.3}$$

Suponha por um momento que saibamos resolver a equação acima. Neste caso, multiplicando (10.1.1) por μ, obtemos

$$y'\mu + p(x)y\mu = g(x)\mu.$$

Porém, $(y\mu)' = y'\mu + y\mu'$, e portanto

$$(y\mu)' = -p(x)y\mu + g(x)\mu + y\mu' = [-p(x)y + g(x) + yp(x)]\mu = g(x)\mu.$$

Then

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int_{x_0}^{x} g(s)\mu(s)\, ds + y_0.$$

Falta ainda resolver (10.1.3). Suponha por um momento que μ seja estritamente positiva. Então, de

$$\big(\ln(\mu(x))\big)' = \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = p(x)$$

temos

$$\mu(x) = \exp\left(\int p(s)\, ds\right).$$

Exemplo 10.1 ([**6**]). Considere o problema de achar $y(t)$ tal que

$$ty' + 2y = 4t^2, y(1) = 2. \tag{10.1.4}$$

Reescrevendo a equação acima na sua forma usual, vemos que $y' + 2y/t = 4t$. Seja $\mu(t)$ tal que

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{2}{s}\, ds\right) = \exp\big(2\ln t\big) = t^2.$$

Multiplicando a equação (10.1.4) por μ, obtemos

$$y't^2 + 2yt = 4t^3,$$

e então $(yt^2)' = 4t^3$. Integrando, vemos que

$$yt^2 = \int 4s^3\, ds = t^4 + c.$$

Da condição inicial $y(1) = 1$, concluímos que $c = 1$ e

$$y(t) = t^2 + \frac{1}{t}.$$

10.2. Equações de segunda ordem com coeficientes constantes

Considere agora uma equação da forma

$$ay'' + by' + cy(t) = g(t). \tag{10.2.1}$$

Novamente note que se y_h resolve a equação homogênea $ay_h'' + by_h' + cy_h(t) = 0$, e se y_p é uma solução particular, i.e., resolve (10.2.1), então $y_h + y_p$ também é solução de (10.2.1).

Consideraremos primeiro o problema homogêneo

$$ay'' + by' + cy(t) = g(t). \tag{10.2.2}$$

supondo $g = 0$ e buscando soluções *linearmente independentes* y_1^h e y_2^h (i.e., se existirem constantes c_1 e c_2 tais que $c_1 y_1^h(t) + c_2 y_2^h(t)$ para todo t, então $c_1 = c_2 = 0$). Por substituição, veja que se y_1^h e y_2^h são soluções de (10.2.2), então $c_1 y_1^h(t) + c_2 y_2^h(t)$ também o são.

Substituindo $y(t) = e^{rt}$ na equação, onde r é constante, obtemos

$$(ar^2 + br + c)e^{rt} = 0$$

para todo x. Como e^{rx} não se anula, temos que r é raiz de

$$ar^2 + br + c = 0, \tag{10.2.3}$$

são a chamada *equação característica* de equação diferencial (10.2.2). Note que se (10.2.3) tiver raízes r_1, r_2 diferentes (independente de serem reais ou não), temos que $e^{r_1 t}$ e $e^{r_2 t}$ serão soluções linearmente independentes da equação homogênea (10.2.2). A solução geral para (10.2.2) é dada por $y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$, e para determinar as constantes são necessárias duas condições, normalmente dadas por

$$y(0) = y_0, \qquad y'(0) = y_0'.$$

Substituindo, temos

$$y(0) = c_1 + c_2 = y_0, \qquad y(0) = c_1 r_1 + c_2 r_2 = y_0'.$$

As duas condições acima determinam de forma única c_1 e c_2, quaisquer que sejam os valores de y_0 e y_0'.

No caso em que as raízes da equação característica(10.2.3) sejam complexas conjugadas, i.e., $r_1 = \lambda + i\mu$ e $r_2 = \lambda - i\mu$, com $\mu \neq 0$ onde $i^2 = -1$, temos pela fórmula de Euler que

$$e^{r_1 t} = e^{\lambda t}\big(\cos(\mu t) + i\sin(\mu t)\big), \qquad e^{r_2 t} = e^{\lambda t}\big(\cos(\mu t) - i\sin(\mu t)\big).$$

Somando e subtraindo as soluções acima obtemos novas soluções linearmente independentes, i.e.,

$$e^{r_1 t} + e^{r_2 t} = 2e^{\lambda t}\cos(\mu t), \qquad e^{r_1 t} - e^{r_2 t} = 2ie^{\lambda t}\sin(\mu t).$$

Como 2 e $2i$ são constantes, podemos buscar a solução geral como combinação linear das funções reais

$$u(t) = e^{\lambda t}\cos(\mu t), \qquad v(t) = e^{\lambda t}\sin(\mu t).$$

Estas serão também linearmente independentes, desde que $\mu \neq 0$.

Então, dados y_0 e y_0', buscamos $y(t) = c_1 u(t) + c_2 v(t)$ onde

$$y(0) = c_1 u(0) + c_2 v(0) = c_1 \mu = y_0, \qquad y'(0) = c_1 u'(0) + c_2 v'(0) = y_0'.$$

Note que $c_1 = y_0/\mu$. Para determinar c_2, é preciso determinar o valor de $u'(0)$ e $v'(0)$.

O último caso de interesse é quando $r = r_1 = r_2$, neste caso tentamos soluções da forma e^{rt} e te^{rt}, i.e., $y(t) = c_1 e^{rt} + c_2 te^{rt}$, onde c_1 e c_2 são determinadas pelas condições iniciais.

10.3. Sistemas homogêneos lineares de duas equações com coeficientes constantes

Considere o sistema de equações

$$x_1' = ax_1 + bx_2,$$

$$x_2' = cx_1 + dx_2,$$

com condições iniciais $x_1(0) = x_1^0$ e $x_2(0) = x_2^0$. O sistema pode ser escrito na forma matricial

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \tag{10.3.1}$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}.$$

Há duas formas possíveis de se resolver o sistema acima. A primeira é por substituição. Se $b = c = 0$, então na verdade temos duas equações desacopladas, simples de serem resolvidas. Se $b \neq 0$ (o caso $c \neq 0$ é análogo), então

$$x_2 = \frac{1}{b}x_1' - \frac{a}{b}x_1,$$

e então

$$x_2' = \frac{1}{b}x_1'' - \frac{a}{b}x_1'.$$

Portanto

$$\frac{1}{b}x_1'' - \frac{a}{b}x_1' = cx_1 + dx_2$$

e obtemos o sistema de segunda ordem para x_1:

$$\frac{1}{b}x_1'' - \frac{a}{b}x_1' - cx_1 - d(\frac{1}{b}x_1' - \frac{a}{b}x_1) = 0.$$

A segunda maneira de se estudar sistemas é usando álgebra linear. Considere $\mathbf{x} = e^{\alpha t}\mathbf{v}$. Então

$$A\mathbf{x} = \mathbf{x}'(t) \iff A(e^{\alpha t}\mathbf{v}) = \alpha e^{\alpha t}\mathbf{v}.$$

Dividindo ambos os lados por $e^{\alpha t}$ obtemos que $\mathbf{x}(t) = e^{\alpha t}\mathbf{v}$ é uma solução para (10.3.1) se e somente se $A\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}$, i.e., $\mathbf{v}$ é autovetor de A com autovalor α. Considere as seguintes situações:

(1) Autovalores reais e diferentes. Sejam $\alpha_1 \neq \alpha_2$ autovalores reais, e sejam $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ autovetores correspondentes. Então estes são linearmente independentes, e podemos buscar soluções da forma $c_1 e^{\alpha_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\alpha_2 t}\mathbf{v}_2$. As constantes c_1, c_2 são calculadas tomando-se $t = 0$ e obtendo-se

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_0. \tag{10.3.2}$$

(2) Autovalores complexos. Sejam $\alpha_1 \neq \alpha_2$ autovalores complexos de A. Como A é real, temos que os autovalores são conjugados, i.e., podem ser escritos como $\lambda \pm i\mu$. Além disto, os autovetores também são conjugados. De fato, se $(A - \alpha I)\mathbf{v} = 0$, então $(A - \bar{\alpha} I)\bar{\mathbf{v}} = 0$.

Suponha $\mu \neq 0$, considere o autovalor $\lambda + i\mu$ e o autovetor correspondente $\mathbf{v}_r + i\mathbf{v}_i$, onde $\mathbf{v}_r$ e $\mathbf{v}_i$ são vetores reais. Então

$$e^{(\lambda+i\mu)t}(\mathbf{v}_r + i\mathbf{v}_i) = e^{\lambda t}(\cos\mu t + i\sin\mu t)(\mathbf{v}_r + i\mathbf{v}_i) = e^{\lambda t}(\mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2),$$

onde $\mathbf{v}_1 = \cos\mu t\mathbf{v}_r - \sin\mu t\mathbf{v}_i$ e $\mathbf{v}_2 = \sin\mu t\mathbf{v}_r + \cos\mu t\mathbf{v}_i$. Pode-se mostrar que $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são linearmente independentes e podemos tomar $e^{\lambda t}\mathbf{v}_1$ e $e^{\lambda t}\mathbf{v}_2$ como soluções independentes e buscar uma solução geral da forma $c_1 e^{\alpha_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\alpha_2 t}\mathbf{v}_2$ resolvendo (10.3.2).

(3) Autovalores repetidos. Se λ é autovalor duplo com dois autovalores linearmente independentes $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, então a solução geral é dada por $e^{\alpha t}(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2)$ e (10.3.2). Caso o autoespaço associado a λ seja unidimensional (com autovetor $\mathbf{v}$), então a solução geral é dada por

$$c_1 e^{\alpha t}\mathbf{v} + c_2 e^{\alpha t}(t\mathbf{v} + \mathbf{u}),$$

onde $(A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Observação 10.1. Ver questões ANPEC 06 (2021), 10 (2020), 09 (2018), 10 (2017)

CAPíTULO 11

Equações de Diferenças

[1] Neste capítulo discutiremos aspectos relacionados a soluções de equações de diferenças (EDs).

11.1. Introdução e caso geral

Equações de diferenças, também chamadas de relação de recorrência ou equações a tempo discreto, são equação do tipo

$$x_{n+p} = f(n, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+p-1}).$$

envolvendo a função $x : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ (denotamos $x_t = x(t)$, para $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$). A equação acima é dita de ordem p. Estudaremos as equações de primeira ordem ($p = 1$):

$$x_{n+1} = f(n, x_n),$$

e equações de segunda ordem ($p = 2$):

$$x_{n+2} = f(n, x_n, x_{n+1}).$$

Estas equações são complementadas por uma condição inicial no caso da de primeira ordem e por duas condições iniciais no caso da de segunda ordem.

A equação de recorrência de ordem n linear homogênea discreta com coeficientes constantes consiste em achar $y : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que

$$y_t = c_1 y_{t-1} + c_2 y_{t-2} + \cdots + c_d y_{t-d}, \tag{11.1.1}$$

onde $c_d \neq 0$, $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Para determinar de forma única soluções para equações deste tipo, as condições iniciais $y_0, \ldots, y_{d-1}$ têm que ser dadas. Note que o conjunto de soluções de 11.1.1 forma um espaço vetorial.

[1] Última Atualização: 30/08/2021

Buscando soluções do tipo $y_t = r^t$, substituimos em 11.1.1, obtendo

$$r^t = c_1 r^{t-1} + c_2 r^{t-2} + \cdots + c_{d-1} r^{t-d+1} + c_d r^{t-d} = r^{t-d}(c_1 r^{d-1} + c_2 r^{d-2} + \cdots + c_{d-1} r + c_d).$$

Concluímos então que $y_t = r^t$ é solução se e somente se r é raiz do polinômio de ordem d:

$$r^d - c_1 r^{d-1} - c_2 r^{d-2} + \cdots - c_{d-1} r - c_d = 0, \tag{11.1.2}$$

chamado de *polinômio característico*. Se todas as d raízes $r_1, \ldots, r_n$ forem distintas, então a solução geral é dada por

$$y_t = a_1 r_1^t + \cdots + a_d r_d^d.$$

onde as constantes $a_1, \ldots, a_d$ são determinadas pelas condições iniciais. Suponha agora que haja uma raíz repetida, por exemplo, suponha que r_1 tenha multiplicidade 3. Então a expressão $a r_1^t + b t r_1^t + c t^2 r_1^t$ também será solução.

11.2. Equações de diferenças de primeira ordem, lineares homogêneas

No caso de equações lineares homogêneas

$$x_{n+1} = k x^n,$$

notamos que

$$x_1 = k x_0, \qquad x_2 = k x_1 = k^2 x_0, \qquad x_3 = k x_2 = k^3 x_0, \ldots, \qquad x_n = k x_{n-1} = k^n x_0.$$

A solução é dada portanto por

$$x_n = k^n x_0.$$

Para checar que isto é verdade, basta substituir na relação de recorrência:

$$x_{n+1} = k^{n+1} x_0 = k k^n x_0 = k x_n.$$

Como a relação é satisfeita com $x_n = k^n x_0$, esta é a solução.

11.3. Relações recursivas de segunda ordem, lineares homogêneas

Considere uma relação da forma

$$y_t = Ay_{t-1} + By_{t-2}.$$

Note que se (x_t) e (y_t) forem soluções, então $\alpha x_t + \beta y_t$ também é solução, para quaisquer constantes α e β. De fato,

$$(11.3.1) \quad a(\alpha x_{t+2} + \beta y_{t+2}) + b(\alpha x_{t+1} + \beta y_{t+1}) + c(\alpha x_t + \beta y_t)$$
$$= \alpha(a x_{t+2} + b x_{t+1} + c x_t) + \beta(a y_{t+2} + b y_{t+1} + c y_t) = 0,$$

pois tanto (x_t) como (y_t) são soluções. A fim de buscarmos soluções, e baseados no que vimos no caso unidimensional, tentamos soluções do tipo k^t, onde k é constante desconhecida. Substituindo na equação, obtemos

$$0 = a x_{t+2} + b x_{t+1} + c x_t = a k^{t+2} + b k^{t+1} + c k^t = k^t(ak^2 + bk + c).$$

Supondo $k \neq 0$ (o caso $k = 0$ implicaria na solução constante $x_t = 0$, que será caso particular do que vamos obter), obtemos

$$ak^2 + bk + c = 0.$$

Esta é a chamada *equação auxiliar* ou *característica* e determina os possíveis valores de k. A forma exata da solução dependerá de como são as raízes da equação auxiliar: distintas, repetidas ou compĺexas.

11.3.1. Raízes reais e distintas. No caso de raízes $r_1 \neq r_2$ distintas, então a solução geral é da forma $y_t = c_1 r_1^t + c_2 r_2^t$, onde c_1 e c_2 são constantes a serem determinadas pelas condições iniciais.

EXEMPLO 11.1. Considere a sequência de Fibonacci

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

com condições iniciais $x_1 = x_0 = 1$.

Para achar uma fórmula explícita para x_n, consideramos uma solução da forma k^n, e subsituímos na equação, obtendo

$$k^{n+2} = k^{n+1} + k^n.$$

Dividindo por k^n, obtemos

$$k^2 - k - 1 = 0,$$

que tem $(1 \pm \sqrt{5})/2$ como raízes. Logo, a solução geral é dada por

$$x_n = \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Para determinar as constantes α e β, usamos as condições iniciais $x_1 = x_0 = 1$:

$$n = 0 \implies 1 = x_0 = \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 = \alpha + \beta.$$

Similarmente,

$$n = 1 \implies 1 = x_1 = \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1.$$

Resolvendo o sistema de equações acima, obtemos

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5}\right), \qquad \beta = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{5}\right).$$

Com isto, obtemos que a solução da relação de Fibonacci é dada por

$$x_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{5}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

11.3.2. Raízes reais repetidas. Considere agora o caso em que a equação auxiliar

$$ak^2 + bk + c = 0$$

possui uma única raiz k_*, repetida. Note então que a equação é dada por

$$ak^2 + bk + c = a(k - k_*)^2.$$

Uma solução da relação de recorrência ainda será dada por k_*^n. Como no caso de raízes diferentes, precisamos achar uma outra solução. A tentativa é da forma nk_*^n. Substituindo na equação, obtemos

$$
\begin{aligned}
(11.3.2)\quad ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n &= a[(n+2)k_*^{n+2}] + b[(n+1)k_*^{n+1}] + cnk_*^n \\
&= ank_*^{n+2} + bnk_*^{n+1} + cnk_*^n + 2ak_*^{n+2} + bk_*^{n+1} \\
&= nk_*^n\big(ak_*^2 + bk_* + c\big) + k_*^{n+1}\big(2ak_* + b\big) = 0.
\end{aligned}
$$

O primeiro termo entre parênteses se anula pois k_* é raiz da equação auxiliar, e o segundo termo se anula pois como k_* é raiz repetida, ela é dada por $-b/(2a)$. Portanto, nk_*^n resolve a equação de recorrência.

Logo, a solução geral do problema é

$$\alpha k_*^n + \beta n k_*^n,$$

onde α e β são constantes, a serem determinadas pelas condições iniciais.

Exemplo 11.2. Seja $x_n - 4x_{n-1} + 4x_{n-2} = 0$. Tentando solução da forma k^n, e substituindo no sistema, vemos que

$$k^n - 4k^{n-1} + 3k^{n-2} = 0 \implies k^{n-2}(k^2 - 4k + 4) = 0,$$

e portanto

$$k^2 - 4k + 4 = 0$$

é a equação auxiliar. Como $k^2 - 4k + 4 = (k-2)^2$, então $k = 2$ é raiz dupla. Logo, a solução geral será dada por

$$x_n = \alpha 2^n + \beta n 2^n.$$

Se $x_0 = 1$ e $x_1 = 4$, então

$$1 = x_0 = \alpha \cdot 2^0 + 0 \cdot \beta \cdot 2^0 \implies \alpha = 1, 4 = x_1 = \alpha \cdot 2^1 + 1 \cdot \beta \cdot 2^1 \implies \beta = 1.$$

A solução é portanto

$$x_n = 2^n + n2^n.$$

11.3.3. Raízes complexas. No caso de $ak^2 + bk + c$ possuir duas raízes complexas, elas serão conjugadas (pois a, b e c são reais). Baseado na fórmula de Euler, podemos escrever essas raízes como $k_1 = re^{i\theta}$ e $k_2 = \bar{k}_1 = re^{-i\theta}$ (aqui, a barra sobre um número complexo denota seu conjugado). Como, pela fórmula de Moivre, $k_1^n = r^n e^{in\theta}$ e $k_2^n = r^n e^{-in\theta}$, a solução geral do problema de recorrência é dada por

$$x_n = c_1 r^n e^{in\theta} + c_2 r^n e^{-in\theta},$$

onde $c_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ e $c_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ são constantes complexas. Note que,

$$\begin{aligned}
x_n &= c_1 r^n e^{in\theta} + c_2 r^n e^{-in\theta} \\
&= (\alpha_1 + i\beta_1) r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) + (\alpha_2 + i\beta_2) r^n (\cos n\theta - i \sin n\theta) \\
&= r^n [\alpha_1 \cos n\theta - \beta_1 \sin n\theta + \alpha_2 \cos n\theta + \beta_2 \sin n\theta] \\
&\quad + i r^n [\alpha_1 \sin n\theta + \beta_1 \cos n\theta - \alpha_2 \sin n\theta + \beta_2 \cos n\theta] \\
&= r^n [(\alpha_1 + \alpha_2) \cos n\theta + (-\beta_1 + \beta_2) \sin n\theta] + i r^n [(\alpha_1 - \alpha_2) \sin n\theta + (\beta_1 + \beta_2) \cos n\theta].
\end{aligned}$$

Se as condições iniciais da equação de diferença forem reais, então x_n será real. Neste sentido impomos que sua parte imaginária se anule, i.e., impomos

$$\alpha_1 = \alpha_2, \qquad \beta_1 = -\beta_2.$$

Isto faz com que $c_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ e $c_2 = \alpha_2 + i\beta_2 = \alpha_1 - i\beta_1$ sejam conjugados. Concluímos então que

$$x_n = r^n [(\alpha_1 + \alpha_2) \cos n\theta - (\beta_1 - \beta_2) \sin n\theta] = r^n (2\alpha_1 \cos n\theta - 2\beta_1 \sin n\theta)$$

Chamando $\gamma = 2\alpha_1$ e $\eta = -2\beta_1$, temos que

$$x_n = r^n (\gamma \cos n\theta + \eta \sin n\theta),$$

onde constantes reais γ e η podem determinadas pelas condições iniciais.

Exemplo 11.3. Para achar a solução geral da equação de diferença

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0,$$

Começamos buscando uma solução do tipo $x_n = k^n$, onde k é raíz de

$$k^2 - 2k + 2 = 0.$$

Neste caso as raízes são $1 \pm i$. A fim de escrever $k = 1 + i$ no forma $re^{i\theta}$, calculamos $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ e depois vemos que

$$k = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

implica em $\theta = \pi/4$. A solução geral é dada então por

$$x_n = 2^{n/2}\left(\gamma\cos\frac{n\pi}{4} + \eta\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

11.4. Equações não homogêneas e soluções particulares

Consideraremos agora relações de recorrência do tipo

$$ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = f_n.$$

A diferença para o caso anterior é que o lado direito não é mais nulo. Note que se calcularmos a solução geral x_n^h do problema *homogêneo*, i.e., x_n^h resolve

$$x_{n+2}^h + ax_{n+1}^h + bx_n^h = 0,$$

e se conhecermos uma solução *particular* qualquer x_n^p do problema não homogêneo, então $x_n^h + x_n^p$ também será solução. De fato,

$$\begin{aligned}(11.4.1)\quad & a(x_{n+2}^h + x_{n+2}^p) + b(x_{n+1}^h + x_{n+1}^p) + c(x_n^h + x_n^p) \\ &= (ax_{n+2}^h + bx_{n+1}^h + cx_n^h) + (ax_{n+2}^p + bx_{n+1}^p + cx_n^p) = 0 + f_n = f_n.\end{aligned}$$

As contas acima valem também quando $a = 0$, portanto os mesmos resultados valem para equações de primeira ordem.

Como já sabemos como calcular soluções homogêneas, "basta"saber como calcular soluções particulares. Esta tarefa é difícil em geral, mas possível em alguns casos que estudamos a seguir.

11.4.1. Quando o lado direito é um polinômio em n. No caso em que

$$ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = f_n,$$

e f_n é um polinômio em n, a ideia geral é tentar achar uma solução particular x_n^p que seja também polinômio em n, e da mesma ordem que f_n. Se x_n^p for solução da equação homogênea, então deve-se multiplicar x_n^p por n.

Exemplo 11.4. Ache a solução geral de

$$x_{n+1} = kx_n + a,$$

onde k é dado.

Resolução. A solução da equação homogênea $x_{n+1} = kx_n$ é $x_n = \alpha k^n$, onde α é uma constante. Para achar uma solução particular tentamos $x_n^p = c$. Substituindo na equação, temos que

$$c = kc + a,$$

Temos então duas situações possíveis. Se $k \neq 1$ então $c = a/(1-k)$, e a solução geral é dada por

$$x_n = \alpha k^n + \frac{a}{1-k}.$$

No caso de $k = 1$, então a solução do problema homogêneo $x_{n+1} = x_n$ é $x_n = \alpha$. Neste caso, a solução particular tem que ter "uma ordem a mais", i.e., tentamos $x_p = \beta n$. Substituindo,

$$\beta(n+1) = \beta n + a,$$

i.e, $\beta = a$. Logo, quando $k = 1$, temos que $x_p = an$ é uma solução particular e

$$x_n = \alpha + an$$

é a solução geral. A constante α pode ser determinada pela condição inicial.

Exemplo 11.5. Ache a solução geral de

$$x_n - x_{n-1} - 6x_{n-2} = -36n.$$

Resolução. Resolvendo o problema homogêneo $x_n - x_{n-1} - 6x_{n-2} = 0$, obtemos $x_n^h = \alpha 3^n + \beta(-2)^n$ como solução, onde α e β são constantes a serem determinadas.

Para achar uma solução particular tentamos algo como $x_n^p = an+b$. Substituindo na equação, obtemos que

$$an + b - [a(n-1) + b] - 6[a(n-2) + b] = -36n.$$

Rearranjando os termos:

$$-6an + 13a - 6b = -36n,$$

e portanto $a = 6$ e $b = 13$. Uma solução particular é portanto $x_n^p = 6n + 13$ e a solução geral é dada por

$$\alpha 3^n + \beta(-2)^n + 6n + 13.$$

Exemplo 11.6 (Amortização de dívidas). Suponha que você tenha um dívida de total p_n e que vá amortizando seu total com pagamentos g_n. Suponha que os juros r sejam constantes. Então a dinâmica da dívida é dada por

$$p_{n+1} = p_n + rp_n - g_n,$$

isto é, no período $n+1$, o valor da dívida cresce em rp_n devido aos juros e diminui g_n devido ao pagamento efetuado. Suponha conhecida a dívida inicial p_0. Suponha, para simplificar as contas, que os pagamentos sejam constantes, $g_n = T$. Temos então que

$$p_{n+1} = (1+r)p_n - T.$$

Assim como anteriormente, buscamos uma solução geral para o caso homogêneo

$$p_{n+1}^h = (1+r)p_n^h,$$

dada por $p_n^h = \alpha(1+r)^n$. Como solução particular, supomos que $p_n^p = c$ e substituimos na equação para obter

$$c = (1+r)c - T,$$

i.e., $c = T/r$. A solução geral é então dada por

$$p_{n+1} = p_n^h + p_n^p = \alpha(1+r)^n + \frac{T}{r}.$$

A fim de que p_n satisfaça a condição inicial em $n = 0$,

$$\alpha = p_0 - \frac{T}{r}.$$

Então

$$p_{n+1} = (p_0 - \frac{T}{r})(1+r)^n + \frac{T}{r} = p_0(1+r)^n + \frac{T}{r}[1-(1+r)^n].$$

Agora, se quisermos pagar toda a dívida em n parcelas, i.e., $p_n = 0$, então

$$0 = p_0(1+r)^n + \frac{T}{r}[1-(1+r)^n]$$

i.e.,

$$T = \frac{p_0 r}{1-(1+r)^{-n}}.$$

EXEMPLO 11.7 (Renda de uma nação: Modelo multiplicador-acelerador). Este modelo, também chamado de modelo de Hansen–Samuelson, diz que a atividade econômica Y_k de uma país é a soma do consumo C_k das famílias, dos gastos governamentais G_k e dos investimentos I_k das firmas, i.e.,

$$Y_k = C_k + I_k + G_k$$

O consumo das famílias é proporcional à riqueza da nação, com atraso:

$$C_k = \alpha Y_{k-1},$$

e o investimento é proporcional ao aumento do consumo:

$$I_k = \beta(C_k - C_{k-1}).$$

Outra hipótese é que os gastos do governo é constante ao longo do tempo, sem perda de generalidade, $G_k = G$. Então

$$Y_k = \alpha Y_{k-1} + \beta(C_k - C_{k-1}) + G = \alpha Y_{k-1} + \beta\alpha(Y_{k-1} - Y_{k-2}) + G$$

Portanto,

$$Y_k = \alpha(1+\beta)Y_{k-1} - \beta\alpha Y_{k-2} + G.$$

No artigo "Interactions between the Multiplier Analysis and the Principle of Acceleration", de Paul A. Samuelson (The Review of Economics and Statistics Vol. 21, No. 2, pp. 75-78, 1939), Samuelson analisa vários comportamentos da economia, dependendo dos valores de α e β.

Considere por exemplo, $\alpha(1+\beta) = \beta\alpha = 1$ e $G = 100$. Então

$$Y_k - Y_{k-1} + Y_{k-2} = G.$$

A equação auxiliar é dada por

$$K^2 - K + 1 = 0,$$

e tem raízes $(1 \pm i\sqrt{3})/2$. Escrevendo $(1 + i\sqrt{3})/2$ na forma polar, $re^{i\theta}$, temos

$$r = \sqrt{(1+3)/4} = 1$$

e $\cos\theta + i\sin\theta = (1 + i\sqrt{3})/2$. Então $\theta = \pi/3$. A solução homogênea é dada então por

$$Y_k^h = c_1 \cos(k\theta) + c_2 \sin(k\theta).$$

Como solução particular, a tentativa é $Y_k^p = c_3$ constante:

$$Y_k - Y_{k-1} + Y_{k-2} = 100 \implies c_3 - c_3 + c_3 = 100,$$

e então $Y_k^p = c_3 = 100$. A solução geral é então dada por

$$Y_k = Y_k^h + Y_k^p = c_1 \cos(k\pi/3) + c_2 \sin(k\pi/3) + 100.$$

Se dermos como condições iniciais $Y_0 = 100$ e $Y_1 = 101$, então

$$100 = c_1 + 100 \implies c_1 = 0,$$

e

$$101 = c_2(\sqrt{3})/2 + 100 \implies c_2 = 2(\sqrt{3})/3.$$

A solução é portanto

$$Y_k = 2(\sqrt{3})/3 \sin(k\pi/3) + 100.$$

Note que neste caso, a economia exibe um comportamento cíclico.

11.4.2. Quando o lado direito é da forma $c\lambda^n$. Considere agora o caso onde

$$ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = f_n$$

é dada com $f_n = c\lambda^n$, onde c é uma constante. A forma de solução particular dependerá se λ é ou não raíz da equação auxiliar. A primeira tentativa seria buscar uma solução particular da seguinte forma:

(1) Se λ não for raíz da equação auxiliar tente $x_n^p = \alpha\lambda^n$

(2) Se λ for raíz *não repetida* da equação auxiliar tente $x_n^p = \alpha n\lambda^n$

(3) Se λ for raíz *repetida* da equação auxiliar tente $x_n^p = \alpha n^2 \lambda^n$

Exemplo 11.8. Ache a solução geral de

$$x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = 12(-2)^n.$$

Resolução. Note que neste caso, a equação auxiliar é

$$k^2 + k - 6 = 0,$$

que tem raízes $k = 2$ e $k = -3$. Como -2 não é raíz, podemos tentar $x_n^p = \alpha(-2)^n$. A fim de determinar o valor dde α, substituimos x_n^p na equação, obtendo

$$\alpha(-2)^{n+2} + \alpha(-2)^{n+1} - 6\alpha(-2)^n = 12(-2)^n.$$

Dividindo por $(-2)^n$,

$$4\alpha - 2\alpha - 6\alpha = 12.$$

Logo, $\alpha = -3$. A solução particular é $x_n^p = -3(-2)^n$, e a solução geral para o problema é

$$c_1 2^n + c_2(-3)^n - 3(-2)^n - 3(-2)^n,$$

onde as constantes c_1, c_2 são determinadas pelas condições iniciais.

Exemplo 11.9. Ache a solução geral de

$$x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = 30(2)^n.$$

Resolução. Note que a equação auxiliar é igual à do caso anterior, e tem raízes $k = 2$ e $k = -3$. Como $\lambda = 2$ é raíz, mas não é raíz dupla, tentamos $x_n^p = \alpha n 2^n$. Subsituindo na equação, obtemos

$$\alpha(n+2)2^{n+2} + \alpha(n+1)2^{n+1} - 6\alpha n 2^n = 30 \cdot 2^n.$$

Simplificando a expressão, obtemos

$$\alpha(n+2)4 + \alpha(n+1)2 - 6\alpha n = 30,$$

i.e., $\alpha = 3$. A solução geral é então da forma

$$x_n = c_1 2^n + c_2(-3)^n + 3n2^n.$$

OBSERVAÇÃO 11.1. Ver questões ANPEC 12 (2021), 10 (2020), 02, 07 (2018), 09 (2017)

Parte 2

Tópicos Principais

CAPíTULO 12

Conjuntos e Funções

[1]

12.1. Questões ANPEC Trabalhadas

ANPEC 2022, Questão 1. Consideremos a questão (ANPEC 2022, Questão 1) envolvendo cardinalidade de conjuntos, funções injetivas e sobrejetivas, e conjunto das partes. Lembrando que, dado um conjunto X:

- a cardinalidade de X é o número de elementos de X (ver Definição 1.3.1):

$$\text{card}(\{1, 3, 6\}) = 3.$$

- o conjunto das partes de X é o conjunto contendo todos os subconjuntos de X (ver Definição 1.1.1). Para $X = \{1, 2, 3\}$, então

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\}.$$

Resultados importantes:

- $\text{card}(\mathcal{P}(X)) = 2^{\text{card}(X)}$
- Se $\text{card}(A) < \text{card}(B)$ então não existe $f : A \to B$ sobrejetiva
- Se $\text{card}(A) > \text{card}(B)$ então não existe $f : A \to B$ injetiva

O primeiro item da questão afirma o seguinte:

> ⓪ Dados dois subconjuntos finitos $A, B \subseteq \mathbb{R}$, se $B \subseteq A$, então $\text{card}(B) \leq \text{card}(A)$.

A afirmativa é verdadeira pois um subconjunto contido em outro não pode ter mais elementos.

O segundo item também é simples:

[1] Última Atualização: 22/04/2022

> ① Dados dois subconjuntos finitos $A, B \subseteq \mathbb{R}$, se $\operatorname{card}(B) \leq \operatorname{card}(A)$, então $B \subseteq A$.

A afirmativa é falsa, pois o fato dum conjunto ter menos elementos que outro, não o faz ser subconjunto.

O terceiro item é mais interessante:

> ② Dados dois subconjuntos finitos $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tais que $B \subseteq A$. Tomando $C = A \setminus B = \{a \in \mathbb{R} : a \in A \text{ e } a \notin B\}$ e sendo $\mathcal{P}(C)$ o conjunto das partes de C, então vale a igualdade
>
> $$\operatorname{card}(\mathcal{P}(C)) = \frac{2^{\operatorname{card}(A)}}{2^{\operatorname{card}(B)}}.$$

Note que $\operatorname{card}(C) = \operatorname{card}(A) - \operatorname{card}(B)$, pois $B \subseteq A$ (e os conjuntos são finitos). A conta então fica fácil:

$$\operatorname{card}(\mathcal{P}(C)) = 2^{\operatorname{card}(C)} = 2^{\operatorname{card}(A) - \operatorname{card}(B)} = \frac{2^{\operatorname{card}(A)}}{2^{\operatorname{card}(B)}}.$$

A afirmativa é, portanto, verdadeira.

O quarto item envolve injetividade de funções:

> ③ Dados dois subconjuntos finitos A ,$B \subseteq \mathbb{R}$ e uma função $f : A \to B$, se $\operatorname{card}(A) > \operatorname{card}(B)$, então f não é injetora.

Tem que ser verdadeira, pois como A tem mais elementos que B, então não pode existir função injetiva.

Finalmente, o quinto item toca no mesmo assunto:

> ④ Dados dois subconjuntos finitos $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tais que $\operatorname{card}(A) < \operatorname{card}(B)$, é possível encontrar uma função sobrejetora $f : A \to B$.

A afirmativa é falsa, pois B tem mais elementos que A.

ANPEC 2018, Questão 1. A questão de existência de funções sobrejetoras/injetoras dependendo da cardinalidade de conjuntos aparece com "alguma" freqência. Veja o quarto item desta questão:

> ③ Considere os conjuntos $A = \{\{0\}, \{1\}\}$ e $B = \{\{5\}, \{8\}, \{9\}\}$. Neste caso, é possível construir uma função $f : A \to B$ sobrejetiva.

A afirmativa é falsa, pois A tem dois elementos e B tem três. Não pode haver função sobrejetiva de A para B.

ANPEC 2017, Questão 13. É muito comum questões envolvendo sobrejetividade e injetividade. Por exemplo, no primeiro item desta questão:

> ⓪ Se $f : B \to C$ e $g : A \to B$ são duas funções injetoras, então $(f \circ g)^{-1}$ definida em $D = \{z \in C : \exists x \in A \text{ tal que} f(g(x)) = z\}$ é uma função sobrejetora.

A afirmativa é verdadeira. De fato, g e f são injetoras, e portanto levam elementos distintos em elementos distintos. Se $x_1 \neq x_2$ são elementos de A, então

$$x_1 \neq x_2 \implies g(x_1) \neq g(x_2) \implies f(g(x_1)) \neq f(g(x_2)).$$

Logo, $f \circ g$ é injetiva. Como $f \circ g : A \to D$ também é sobrejetora (por definição de D), então $f \circ g$ é invertível. Note que sua inversa $(f \circ g)^{-1}$ também é invertível, e portanto é sobrejetora.

Considerer o item seguinte:

> ① Se $f : B \to C$ e $g : A \to B$ são duas funções tais que $f \circ g$ é bijetora, então g é sobrejetora e f é injetora;

A afirmativa é falsa: tome $A = C = \{0\}$ e $B = \{1, 2\}$. Seja $g(0) = 1$ e $f(1) = 0$. Então g não é sobrejetora, mas $f \circ g : A \to C$ é bijeção.

Finalmente, considere o último item:

> ④ Seja $f : [0, 16] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^{1/2}$. O valor máximo do contradomínio de $f^{(5)}(x)$ é 2, em que $f^{(5)}(x) = (f \circ f \circ f \circ f \circ f)(x)$.

Para ver que a afirmativa é falsa, basta perceber que se $x > 2$ então $f(x) > 2$. Então $f(f(x)) > 2$, e assim sucessivamente.

ANPEC 2015, Questão 2. O item a seguir foi anulado:

> ⓪ A função que a cada candidato da prova da ANPEC associa a nota que obteve é uma função sobrejetora

De fato, resposta pode ser verdadeira ou falsa dependendo do contradomínio, que não foi especificado.

Note a quase repetição da questão 13 de 2017, item 1:

> ④ Dadas as funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$, se $g \circ f$ é bijetora, então f é injetora e g é sobrejetora.

Note que f tem que ser injetora, pois se $a_1 \neq a_2 \in A$ com $f(a_1) = f(a_2)$, então $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$, e $g \circ f$ não seria injetora. De forma análoga, g tem que ser sobrejetora, caso contrário $g \circ f$ não poderia ser sobrejetora. Portanto a afirmativa está correta.

ANPEC 2013, Questão 1. Apesar de constar na ementa da ANPEC, quest'oes sobre relações são raras. Talvez a questão abaixo seja o único caso.

> Considere o seguinte conjunto:
>
> $$C = \left\{(x, y) \in R^2 / |x| + |y| < 2\right\}.$$
>
> Podemos afirmar o seguinte:
>
> ③ C define uma relação simétrica, mas não transitiva em R^2.

Uma *relação* entre dois conjuntos A e B é tão somente um subconjunto $C \subseteq A \times B$. No caso de $A = B$, dizemos que C estabelece uma relação em A^2. No caso da questão acima, $A = \mathbb{R}$ e $C \subseteq \mathbb{R}^2$.

Dizemos que uma relação C é *simétrica* se

$$(x, y) \in C \implies (y, x) \in C.$$

No caso, se $(x, y) \in C$ então $|x| + |y| < 2$. Logo, $|y| + |x| < 2$ e portanto $(y, x) \in C$. Então C é simétrica.

Uma relação é *transitiva* se

$$(x, y) \in C \text{ e } (y, z) \in C \implies (x, z) \in C.$$

Note que isto não ocorre neste caso, pois $(2, 0) \in C$ e $(0, 2 \in C$, mas $(2, 2 \notin C$. Portanto, C não é simétrica, e a afirmação do item é verdade.

ANPEC 2008, Questão 3. Normalmente, questões envolvendo conjuntos são simples do ponto de vista teórico. A questão abaixo foge um pouco desta regra. A questão começa lembrando algumas definições:

> Seja $f : X \to Y$ uma função qualquer. Para cada subconjunto $H \subset Y$, seja $f^{-1}(H) = \{x \in X : f(x) \in H\}$ a imagem inversa de H por f.

A questão agora supõem que

> A, $B \subseteq Y$ são subconjuntos quaisquer de Y.

A seguir é necessário decidir quais afirmativas são verdadeiras ou falsas. A primeira delas segue abaixo:

> ⓪ $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

A afirmativa é verdadeira. Para mostrar isto, temos que mostrar que

$$f^{-1}(A \cup B) \subseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \quad \text{e} \quad f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A \cup B).$$

Vamos mostrar a primeira inclusão. Seja $x \in f^{-1}(A \cup B)$. Então $f(x) \in A \cup B$, i.e., $f(x) \in A$ ou $f(x) \in B$. Se $f(x) \in A$, então $x \in f^{-1}(A)$. Da mesma forma, se $f(x) \in B$, então $x \in f^{-1}(B)$. Portanto, $x \in f^{-1}(A)$ ou $x \in f^{-1}(B)$, i.e., $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Logo $f^{-1}(A \cup B) \subseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Agora mostremos a segunda inclusão. Seja $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Então $x \in f^{-1}(A)$ ou $x \in f^{-1}(B)$. Se $x \in f^{-1}(A)$ então $f(x) \in A \subseteq A \cup B$. Logo $x \in f^{-1}(A \cup B)$. Se $x \in f^{-1}(B)$ então $f(x) \in B \subseteq A \cup B$. Logo $x \in f^{-1}(A \cup B)$.

Das duas inclusões acima, concluímos que os conjuntos são iguais, i.e.,

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

O segundo item é semelhante, e pede para determinar se

① $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

é verdadeiro ou falso em geral. A afirmativa é verdadeira, e para verificar, temos que proceder de forma análoga ao item anterior, verificando duas inclusões.

Mostremos primeiro que $f^{-1}(A \cap B) \subseteq f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Seja $x \in f^{-1}(A \cap B)$. Logo $f(x) \in A \cap B$, e então $f(x) \in A$ e $f(x) \in B$. Assim temos $x \in f^{-1}(A)$ e $x \in f^{-1}(B)$. Portanto $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Agora para mostrar que $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A \cap B)$, considere $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Então $x \in f^{-1}(A)$ e $x \in f^{-1}(B)$, i.e., $f(x) \in A \cap B$. Segue daí que $x \in f^{-1}(A \cap B)$.

Das duas inclusões, $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Considere agora o terceiro item:

② se $A \subseteq B$, então $f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A)$.

Este item é falso, e basta um contra-exemplo simples. Tome $A = \varnothing$ e $B = f(X)$ toda imagem de f. Então $A \subseteq B$, e, por definição de f^{-1}, temos $f^{-1}(A) = \varnothing$ e $f^{-1}(B) \neq \varnothing$. Portanto $f^{-1}(B) \not\subseteq f^{-1}(A)$.

③ $f^{-1}(A^c) \neq [f^{-1}(A)]^c$, em que o superescrito c denota o complementar do conjunto subjacente.

A afirmativa é falsa, i.e., os conjuntos são iguais:

$$f^{-1}(A^c) = [f^{-1}(A)]^c.$$

Mostremos que $f^{-1}(A^c) \subseteq [f^{-1}(A)]^c$. Seja $x \in f^{-1}(A^c)$. Então $f(x) \in A^c$, i.e., $f(x) \notin A$. Da definição de f^{-1} temos $x \notin f^{-1}(A)$, e, consequentemente, $x \in [f^{-1}(A)]^c$.

Para ver que $[f^{-1}(A)]^c \subseteq f^{-1}(A^c)$, seja $x \in [f^{-1}(A)]^c$. Logo $x \notin f^{-1}(A)$, e então $f(x) \notin A$. Logo $f(x) \in A^c$, de modo que $x \in f^{-1}(A^c)$.

Portanto $f^{-1}(A^c) = [f^{-1}(A)]^c$.

④ $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$

Segue da definição

$$f^{-1}(\varnothing) = \{x \in X : f(x) \in \varnothing\}.$$

que $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$. Logo, a afirmativa é verdadeira.

12.2. Questões ANPEC Resolvidas

Exercício 1 (ANPEC 2022, Questão 1)

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Dado um subconjunto finito $A \subseteq \mathbb{R}$, denote por $\text{card}(A)$ a sua cardinalidade (ou seja, o número de elementos em A). Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas:

(0) Dados dois subconjuntos finitos A, $B \subseteq \mathbb{R}$, se $B \subseteq A$, então $\text{card}(B) \leq \text{card}(A)$.

(1) Dados dois subconjuntos finitos $A, B \subseteq \mathbb{R}$, se $\text{card}(B) \leq \text{card}(A)$, então $B \subseteq A$.

(2) Dados dois subconjuntos finitos $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tais que $B \subseteq A$. Tomando $C = A \setminus B = \{a \in \mathbb{R} : a \in A \text{ e } a \notin B\}$ e sendo $\mathcal{P}(C)$ o conjunto das partes de C, então vale a igualdade $\text{card}(\mathcal{P}(C)) = \frac{2^{\text{card}(A)}}{2^{\text{card}(B)}}$.

(3) Dados dois subconjuntos finitos $A, B \subseteq \mathbb{R}$ e uma função $f : A \to B$, se $\text{card}(A) > \text{card}(B)$, então f não é injetora.

(4) Dados dois subconjuntos finitos $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tais que $\text{card}(A) < \text{card}(B)$, é possível encontrar uma função sobrejetora $f : A \to B$.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

De fato, um subconjunto *próprio* de um conjunto finito tem sempre a cardinalidade menor.

(1) **Falso.**

Basta tomar um contraexemplo como $A = \{1, 2\}$ e $B = \{3\}$.

(2) **Verdadeiro.**

Note que $\text{card}(C) = \text{card}(A) - \text{card}(B)$. Então

$$\text{card}(\mathcal{P}(C)) = 2^{\text{card}(C)} = 2^{\text{card}(A)-\text{card}(B)} = \frac{2^{\text{card}(A)}}{2^{\text{card}(B)}}.$$

(3) **Verdadeiro.**

Correto, pois A tem mais elementos que B, e portanto ao menos dois elementos de A são levados no mesmo elemento de B.

(4) **Falso.**

Da mesma forma que no subitem anterior, como B tem mais elementos que A, ao menos um elemento de B "ficará sobrando".

Exercício 2 (ANPEC 2021, Questão 1)

Sejam A e B dois conjuntos não vazios, e considere duas funções: $f : A \to B$ e $g : B \to A$. Defina os conjuntos $C = \{f(a) : a \in A\}$ e $D = \{b \in B : g(b) \in A\}$. Julgue as seguintes afirmativas:

(0) A função $h : A \to C$ que satisfaz $h(a) = f(a)$ para todo $a \in A$ é uma sobrejeção.

(1) $D = B$ somente se g é injetora.

(2) Se f e g são bijeções, então a função $j : A \to B$ definida por $j(a) = f(g(f(a)))$ também é uma bijeção.

(3) Se $g(f(a)) = a$ para todo $a \in A$, então f é injetora.

(4) Se a função $k : C \times A \to B \times A$ definida por $k(b, a) = (f(g(b)), g(f(a)))$ satisfizer $k(b, a) = (b, a)$, então as funções f e g são ambas bijeções.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

Seja $b = f(a) \in C$. Então, da definição do conjunto C, existe um $a \in A$ tal que $h(a) = f(a) = b$.

(1) **Falso.**

Mostremos que $D = B$. Primeiro mostramos que $D \subset B$. Seja $b \in D$, então pela definição de D, temos $b \in B$. Agora mostramos que $B \subset D$.

Seja $b \in B$, então $g(b) \in A$, logo da definição de D obtemos $b \in D$. Assim, $B = D$. Portanto, para qualquer função g, temos $D = B$.

2 **Verdadeiro.**

Dado que $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são bijeção, então $g \circ f : A \to A$ é bijeção. Assim, as funções f e $g \circ f$ são bijeção, então $j = f \circ g \circ f : A \to B$ é bijeção.

3 **Verdadeiro.**

Sejam a_1 e $a_2 \in A$ tal que $f(a_1) = f(a_2)$. Logo $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$, da hipótese temos $a_1 = a_2$. Portanto f é injetora.

4 **Falso.**

Considere o seguinte contraexemplo. Sejam os conjuntos $A = \{1\}, B = \{1, 2\}$ e $C = \{1\}$. A função $f : A \to B$ é definida por $f(1) = 1$. A função $g : B \to A$ é definida por $g(1) = g(2) = 1$. Finalmente, a função $k : C \times A \to B \times A$ é definida por $k(1, 1) = \Big(f(g(1)), g(f(1)\Big) = (1, 1)$. Note que as funções f e g não são bijeção.

Exercício 3 (ANPEC 2020, Questão 1)

Seja $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \cdots\}$ o conjunto dos números inteiros positivos e denote por $A_n = \{1, \cdots, n\}$ o conjunto dos n primeiros números inteiros positivos. Julgue as seguintes afirmativas:

0 Se $n > m$, então $A_n \subseteq A_m$.

1 O produto cartesiano $A_2 \times A_3$ é igual ao conjunto

$$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}.$$

2 Seja $B_n = A_n^c \cap \mathbb{N}^*$, é verdade que para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n \cap A_{2n}$ tem n elementos.

3 Existe um número inteiro positivo $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $m \in B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

4 $(A_1 \cup B_3)^c \cap \mathbb{N}^* = \{2, 3\}$ e $(B_1 \cap A_3)^c \cap \mathbb{N}^* = \{n \in \mathbb{N}^* : n \geq 4\}$.

Solução

0 **Falso.**
Considere $n = 2$ e $m = 1$, então temos $A_1 = \{1\}$ e $A_2 = \{1, 2\}$. Assim, temos $A_2 \subseteq A_1$.

1 **Verdadeiro.**
O produto cartesiano de A_2 e A_3 é

$$A_2 \times A_3 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}.$$

2 **Verdadeiro.**
Consideremos que o conjunto universo é $U = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.
Notei que $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$ e $A_n^c = \{0, n+1, n+2, n+3, ...\}$.
Então, obtemos $B = \{n+1, n+2, n+3, ...\}$. Também, temos que $A_{2n} = \{1, 2, 3, ..., n, n+1, ..., 2n\}$. Portanto, o conjunto $B_n \cap A_{2n}$ tem $\cap$ elementos.

3 **Falso.**
Suponhamos que o enunciado é verdadeiro. Assim, como é para todo $n \in \mathbb{N}^*$, consideremos $n = m$. Então, $m \in B_m = \{m+1, m+2, ...\}$ (contradição).

4 **Falso.**
Os conjuntos $A_1 = \{1\}, B_3 = \{4, 5, ...\}, B_1 = \{2, 3, ...\}$ e $A_3 = \{1, 2, 3\}$.
Logo $(A_1 \cup B_3)^c = \{0, 2, 3\}$, então

$$(A_1 \cup B_3)^c \cap \mathbb{N}^* = \{2, 3\} \text{ (Verdadeiro).}$$

Também temos $B_1 \cap A_3 = \{2, 3\}$, então $(B_1 \cap A_3)^c \cap \mathbb{N}^* = \{1, 4, 5, \dots\}$, que é diferente de $\{n \in \mathbb{N}^* : n \geq 4\}$.
Portanto, Verdadeiro e Falso, então Falso.

Exercício 4 (ANPEC 2019, Questão 1)

Considere os conjuntos $A = \{1, 2\}$, $B = \{10, 11, 12\}$ e $C = \{2, 12, 30, 40\}$ dos números naturais. $P = A \times B$ é produto cartesiano entre os conjuntos A e B, A^c é o complementar de A e $D = A - C$ é a diferença entre dois conjuntos. Julgue como verdadeiras ou falsas as seguintes afirmativas:

(0) $A^c \cap C = \{12, 30, 40\}$.

(1) Existe una função bijetiva cujo domínio seja $A \times B$ e o contradomínio seja C.

(2) $A \times B = \{1, 2, 10, 11, 12\}$.

(3) Se $x \in A$, então $x \in C$.

(4) $D \cup A = A$.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

Consideremos o seguinte conjunto universal $U = \{1, 2, ...\} = \mathbb{N}$.

$$A^c \cap C = (\{1, 2\})^c \cap \{2, 12, 30, 40\} = \{3, 4, 5, ...\} \cap \{1, 12, 30, 40\} = \{12, 30, 40\}.$$

(1) **Falso.**

O produto artesiano $A \times B = \{(1, 10), (1, 11), (1, 12), (2, 10), (2, 11), (2, 12)\}$ tem 6 elementos. O conjunto C tem 4 elemento. Uma condição necessária, para que exista bijeção, em uma função discreta, é que o número de elementos do domínio tem que ser igual ao número de elemento do contradomínio.

(2) **Falso.**

O produto cartesiano

$$A \times B = \{(1, 10), (1, 11), (1, 12), (2, 10), (2, 11), (2, 12)\}$$

(3) **Falso.**

Seja $1 \in A$ então $1 \notin C$. Portanto $A \not\subset C$.

4 **Verdadeiro.**
O conjunto $D = A - C = \{1, 2\} - \{2, 12, 30, 40\} = \{1\}$. Logo $D \cup A = \{1\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2\} = A$.

Exercício 5 (ANPEC 2019, Questão 2)
Suponha que temos dois conjuntos não vazios (A e B) de números reais. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to A$ duas funções que satisfazem $g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$. Julgue as seguintes afirmativas:

(1) A função g é injetora.
(2) A função f é sobrejetora.
(3) Se f é sobrejetora, então $f(g(x)) = x$ para todo $x \in B$.
(4) A função $q : A \to A \times B$ definida por $q(x) = (x, h(x))$ é injetora para qualquer $h : A \to B$.
(5) Se definimos $p : A \times B \to A$ como $p(x, y) = x$, então p é sobrejetora.

Solução

(1) **Falso.**
Considere o seguinte contraexemplo.
Sejam os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. Definamos a função $f : A \to B$, tal que $f(1) = 1$ e $f(2) = 2$. Também, definamos a função $g : B \to A$, tal que $g(1) = 1,\ g(2) = 2,\ g(3) = 2$. Então, a função composta $g \circ f : A \to B$ é dada por $g(f(1)) = g(1) = 1$ e $g(f(2)) = g(2) = 2$, isto é $g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$.
Notei que a função g não é injetora, dado que $g(2) = g(3) = 2$.

(2) **Falso.**
Consideremos o contraexemplo do item 0, então a função f não é sobrejetora.

(3) **Verdadeiro.**

Seja $x \in B$, então existe $y \in A$ tal que

$$f(y) = x \tag{12.2.1}$$

Assim, (12.2.1) e da hipótese

$$g(f(y)) = g(x) = y$$
$$f(g(x)) = f(y)$$

Logo, da equação (12.2.1), temos $f(g(x)) = x$. Portanto, para todo $x \in B$, temos $f(g(x)) = x$.

(4) **Verdadeiro.**

Sejam $a_1, a_2 \in A$, tal que

$$q(a_1) = q(a_2),$$
$$(a_1, h(a_1)) = (a_2, h(a_2)).$$

Assim, $a_1 = a_2$ e $h(a_1) = h(a_2)$. Logo, para qualquer função h, a aplicação q é injetora.

(5) **Verdadeiro.**

Seja $x \in A$, então da definição $p(x, y) = x$. Logo existe $x \in A$ tal que $p(x, y) = x$.

Exercício 6 (ANPEC 2018, Questão 1)

Analise a veracidade das afirmações abaixo: (Note que $C = A \times B$) significa que C é o produto cartesiano entre os conjuntos A e B, e que A^c é o complementar de A.

0. Seja $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\}$. O ponto $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ pertence a $A \times B$;
1. Considere dois conjuntos quaisquer A e B. Se $A \subseteq B$, então é verdade que $B^c \subseteq A^c$.

(2) Dados dois conjuntos A e B quaisquer. Temos que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

(3) Considere os conjuntos $A = \{\{0\}, \{1\}\}$ e $B = \{\{5\}, \{8\}, \{9\}\}$. Neste caso, é possível construir uma função $f : A \to B$ sobrejetiva.

(4) Se $A = B$, então $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Solução

(0) **Falso.**

Suponhamos que o enunciado seja verdadeiro, então $(3/2, 1/2) \in A \times B$, logo $3/2 \in A$ e $1/2 \in B$. Assim, temos que $0 \leq 1.5 \leq 1$ e $1 \leq 0.5 \leq 2$ (contradição).

Portanto, $(3/2, 1/2 \notin A \times B)$.

(1) **Verdadeiro.**

Seja $x \in B^c$, então $x \notin B$. Logo $x \notin A$, já que $A \subset B$, assim obtemos que $x \in A^c$. Portanto $B^c \subseteq A^c$.

(2) **Verdadeiro.**

Da figura abaixo temos $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

FALTA FIGURA

(3) **Falso.**

Para construir uma função sobrejetiva o número de elementos de B não pode ser maior que o número de elementos de A. Neste exercício, o número de elementos de B é 3 e o número de elementos de A é 2.

(4) **Verdadeiro.**

Seja $x \in A$, então $x \in B$, já que $A = B$, logo $A \subset B$. Agora, seja $x \in B$, então $x \in A$, já que $A = B$, logo $B \subset A$.

Exercício 7 (ANPEC 2017, Questão 13)

Analisar a veracidade das seguintes afirmações:

(0) Se $f : B \to C$ e $g : A \to B$ são duas funções injetoras, então $(f \circ g)^{-1}$ definida em $D = \{z \in C : \exists x \in A \text{ tal que} f(g(x)) = z\}$ é uma função sobrejetora;

(1) Se $f : B \to C$ e $g : A \to B$ são duas funções tais que $f \circ g$ é bijetora, então g é sobrejetora e f é injetora;

(2) Se $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ definida em $R - \{1\}$, então $f^{-1}(x) = f(x)$;

(3) Se $f : B \to C$ é sobrejetora e $g : A \to B$ é injetora, então $f \circ g$ é sobrejetora;

(4) Seja $f : [0, 16] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^{1/2}$. O valor máximo do contradomínio de $f^{(5)}(x)$ é 2, em que $f^{(5)}(x) = (f \circ f \circ f \circ f \circ f)(x)$.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

Mostremos que $f \circ g : A \to C$ é injetora. Sejam x_1 e $x_2 \in A$, tal que $f \circ g(x_1) = f \circ g(x_2)$, então $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$, dado que f e g são injetoras, temos $x_1 = x_2$. Já que $f \circ g$ é injetora, então existe $(f \circ g)^{-1} : D \to A$. Seja $x \in A$, logo existe $y \in D$ tal que $f(g(x)) = y$. Assim $(f \circ g)^{-1}(f \circ g)(x) = (f \circ g)^{-1}(y)$, portanto $(f \circ g)^{-1}(y) = x$.

(1) **Falso.**

Considere o seguinte contraexemplo. Sejam $g : [0, 2] \to [-1, 1]$, definida por $g(x) = x - 1$, e $f[-1, 1] \to [0, 1]$, definida por $f(x) = 1$ se $x < 0$ ou $f(x) = x$ se $x \geq 0$. Note que $f \circ g : [0, 2] \to [0, 1]$ é definida por $f(g(x)) = x$, esta função é bijetora, mas f não é injetora, dado que para $-1/2 \neq -1$ temos $f(-1/2) = f(-1)$.

(2) **Verdadeiro.**

Primeiro mostremos que f é bijetora. Sejam x_1 e $x_2 \in R - \{1\}$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$, assim temos que f é injetora. Denotemos

$f(x) = y = (x+1)/(x-1)$, logo $x = (y+1)/(y-1)$, então para todo $y \in \mathbb{R} - \{1\}$ existe $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ tal que $f(x) = y$, assim temos que f é sobrejetora.

Dado que f é bijetora então existe f^{-1} definida por $f^{-1}(x) = (x+1)/(x-1)$, portanto $f^{-1}(x) = f(x)$.

(3) **Falso.**

Considere o seguinte contraexemplo. Sejam $g : [0,2] \to [0,4]$ sobrejetora, definida por $g(x) = x^2$, e $f : [0,4] \to [0,4]$ injetora, definida por $f(x) = x$. A função composta $f \circ g : [0,2] \to [0,4]$, definida por $f \circ g(x) = x$, não é sobrejetora dado que para $3 \in [0,4]$ não existe $x \in [0,2]$ tal que $f \circ g(x) = 3$.

(4) **Falso.**

Basta perceber que se $x > 2$ então $f(x) > 2$. Então $f(f(x)) > 2$, e assim sucessivamente.

Exercício 8 (ANPEC 2015, Questão 2)

Analisar as seguintes afirmações:

(0) A função que a cada candidato da prova da ANPEC associa a nota que obteve é uma função sobrejetora;

(1) A função $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$ é uma bijeção de R, no intervalo $(-1,1)$;

(2) Para que uma função de R em R seja sobrejetora, as retas horizontais devem interceptar o gráfico dela em no máximo um ponto;

(3) A soma de funções de R em R, ambas injetoras, é uma função injetora;

(4) Dadas as funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$, se $g \circ f$ é bijetora, então f é injetora e g é sobrejetora.

Solução

(0) **Falso.**

Considere o seguinte contraexemplo.

Definamos a função $F : A \to B$, onde A são os candidato e $B =$

$\{0, 1, ..., 10\}$ são as notas. Suponha que todos os candidatos tiraram mais do que 5. Então, a função f não é sobrejetiva, já que para cada $y < 5$ não existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

1 **Verdadeiro.**

Mostremos que f é injetora. Notei que se $x_1 < 0$ e $x_2 > 0$ ou $x_1 > 0$ e $x_2 < 0$ então $f(x_1) \neq f(x_2)$. Então sejam x_1 e $x_2 \in (-1, 1)$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$, onde $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$, ou $x_1 < 0$ e $x_2 < 0$.
Sem perda de generalidade, considere $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$, então $x_1 = x_2$.
Mostremos que f é sobrejetora. Seja $y = x/(|x| + 1)$, note que se $x > 0$ então $y > 0$, e se $x < 0$ então $y < 0$. Logo temos $x = y/(1 - |y|)$. Portanto para cada $y \in (-1, 1)$ existe $x \in (-1, 1)$ tal que $f(x) = y$.

2 **Falso.**

Um contraexemplo simples é uma função cúbica. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3 - x$, esta função é sobrejetora, mas a reta $y = 0$ corta a função em $\{-1, 0, 1\}$.

3 **Falso.**

Considere o seguinte contraexemplo.
Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções injetoras, tal que $g = -f$.
Então $f + g = 0$, logo $f + g$ não é injetora.

4 **Verdadeiro.**

Mostremos que g é sobrejetiva.
Seja $y \in C$, da hipótese $g \circ f : A \to C$ é bijeção, então existe $x \in A$ tal que $g \circ f(x) = g(f(x)) = y$, logo para cada $y \in C$ existe $f(x) \in B$ tal que $g(f(x)) = y$.
Mostremos que f é injetora. Sejam x_1 e $x_2 \in A$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$, logo $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, dado que $g \circ f$ é bijeção temos $x_1 = x_2$. Portanto f é injetora.

Exercício 9 (ANPEC 2013, Questão 1)

Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \left\{ x \in R / \frac{x-3}{x-2} \geq 1 \right\}$$
$$B = \left\{ x \in R / \ln(x+3) > 0 \right\} \text{ e}$$
$$C = \left\{ (x,y) \in R^2 / |x| + |y| < 2 \right\}.$$

Podemos afirmar o seguinte:

(0) $A \cap B$ é o conjunto vazio.

(1) $A \cup B = R$.

(2) $A \times B \subseteq C$.

(3) C define uma relação simétrica, mas não transitiva em R^2.

(4) $C \subseteq (A\text{x}B) \cap (B \times A)$.

Solução

Preliminares

Determinemos o intervalo do conjunto A.

$$\frac{x-3}{x-2} = 1 - \frac{1}{x-2} \geq 1,$$
$$\frac{1}{x-2} \leq 0.$$

Da desigualdade anterior obtemos $x \in (-\infty, 2)$. Logo, $A = (-\infty, 2)$

Agora, determinemos o conjunto B. Se $\ln(x+3) > 0$, então $x+3 > 1$, assim $x \in (-2, +\infty)$. Logo $B = (-2, +\infty)$.

Finalmente, o conjunto C está representada na seguinte figura

FALTA FIGURA

(0) **Falso.**

Sabemos que $A = (-\infty, 2)$ e $B = (-2, +\infty)$, então $A \cap B = (-2, 2)$.

(1) **Verdadeiro.**
A união de A e B é $A \cup B = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

(2) **Falso.**
O conjunto $A \times B$ é representado na seguinte figura

$$FALTA\ \ FIGURA$$

Das figuras 1 e 2, temos $C \subset A \times B$, mas $A \times B \not\subset C$.

(3) **Verdadeiro.**
A reta horizontal é um eixo de s
Da figura 1, a reta horizontal é um eixo de simetria. Então, o conjunto C é simétrica. A relação não é transitiva em R^2, já que para $(2,0) \in C$ e $(2,0) \in C$, temos $(2,2) \notin C$.

(4) **Verdadeiro.**
Representamos o conjunto $B \times A$ na seguinte figura

$$FALTA\ \ FIGURA$$

A interseção da figura 2 e 3 é

$$FALTA\ \ FIGURA$$

Das figuras 2 e 4, temos que $C \subseteq (A \times B) \cap (B \times A)$.

Exercício 10 (ANPEC 2013, Questão 3)
Julgue as seguintes afirmativas:

(0) Toda função $f : R \to R$ não decrescente é injetora.

(1) Sejam f e g funções definidas em R e com valores em R tal que $g(f(x)) = x$, para todo $x \in R$, então f é injetora.

(2) Seja $f : R \to R$ uma função tal que, para todo $a \in R$, a equação $f(x) = a$ tem pelo menos uma solução, então f é sobrejetora.

(3) Seja $f : A \to B$ uma função bijetora sendo A e B dois intervalos de R. Então A e B tem o mesmo comprimento.

(4) O conjunto dos números inteiros positivos ímpares é um subconjunto próprio dos inteiros positivos. Então não pode existir uma função bijetora entre estes dois conjuntos.

Solução

(0) **Falso.**
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$, onde f é uma função não decrescente. Esta função não é injetora, ja que para todo $x \in \mathbb{R} f(x) = 1$.

(1) **Verdadeiro.**
Seja $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tal que $f(x_1) = f(x_2)$. O valor $f(x_1) = f(x_2) \in \mathbb{R}$, então aplicando a função g, temos $g(f(x_1) = g(f(x_2))$. Assim, da hipótese obtemos $x_1 = x_2$.

(2) **Verdadeiro.**
Seja $a \in \mathbb{R}$, então da hipótese existe pelo menos um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = a$. Podemos concluir que f é sobrejetora.

(3) **Falso.**
Considere uma função $f : [1, 2] \to [1, 4]$, dado por $f(x) = x^2$. Agora, mostremos que f é bijetora.

(i) Função injetora
Sejam $x_1, x_2 \in [1, 2]$, tal que $f(x_1) = f(x_2)$. Logo, obtemos $x_1^2 = x_2^2$, então $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$. Já que x_1 e x_2 são positivos, temos $x_1 + x_2 > 0$ e $x_1 - x_2 = 0$.

(ii) Função sobrejetora
Seja $y \in [1, 4]$ tal que $y = x^2$, assim $x = \pm\sqrt{y}$. Logo, para todo $y \in [1, 4]$ existe $x \in [1, 2]$, tal que $f(x) = y$.

O comprimento de $A = [1, 2]$ é 1 e o comprimento de $B = [1, 4]$ é 3.

4 **Falso.**
Denote o conjunto dos números inteiros positivos ímpares e o conjunto dos números inteiros positivos por, $A = \{1, 3, 5, ...\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ respectivamente.
Definamos a função $f : B \to A$, dada por $f(x) = 2x - 1$.
Está função é bijetora.

Exercício 11 (ANPEC 2012, Questão 1)
Sejam A e B conjuntos. A diferença entre A e B é o conjunto $A - B = \{x : x \in A\ e\ x \notin B\}$.
Julgue as afirmativas:

0 $(A \cup B) - C = (A - C) \cap (B - C)$, quaisquer que sejam os conjuntos A, B e C.

1 Se $A - B = B - A$, então $A = B$.

2 Seja N o conjunto dos inteiros positivos. Se $A = \{x \in N : x|12\}$ e $B = \{x \in N : 4|x\}$, então $A \cap B$ é um conjunto unitário, em que $x|y$ significa que existe $c \in N$, tal que $y = cx$.

3 Se $A = \{x \in R : x - 2x^2 < 0\}$ e $B = \{x \in R : |x| \leq 3\}$, então $A \cap B \subset (0, 3)$.

4 Se $A = \{(x, y) \in R^2 : |x| + |y| > 3\}$ e $B = \{(x, y) \in R^2 : |x + y| > 3\}$, então $A \supset B$.

Solução

0 **Falso.**
Das figura abaixo, temos $(A \cup B) - C \neq (A - C) \cap (B - C)$.

FALTA FIGURAS

(1) **Verdadeiro.**

Da figura abaixo, obtemos $A = B$, ja que $A - B = B - A$.

$FALTA\ FIGURA$

(2) **Falso.**

Os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ e $B = \{4, 8, 12, ...\}$. Logo, a interseção $A \cap B = \{4, 12\}$.

(3) **Falso.**

Os conjuntos $A = (-\infty, 0) \cup (1/2, +\infty)$ e $B = [-3, 3]$, então $A \cap B = [-3, 0) \cup (1/2, 3]$.

(4) **Verdadeiro.**

Os conjuntos A e B estão representados na figura abaixo notei que $B \subset A$.

$FALTA\ FIGURAS$

Exercício 12 (ANPEC 2012, Questão 2)

Julgue as afirmativas:

(0) Seja $f : Z \to Z$, tal que $f(x) = \frac{x}{2}$ se x é par e $f(x) = \frac{x-1}{2}$ se x é ímpar. Então f é bijetiva.

(1) Se $f : Q \to Q, f(x) = x^2$, então f é sobrejetiva.

(2) Se $f(x) = x + 1$, então $(f \circ f \circ f)(x) = f^3(x) = \frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 1$.

(3) Se $f(x - 8) = 2x - 5$, então $f(4x + 1) = 8x + 13$.

(4) Seja $A \subset R$ e $h : A \to R$, tal que $\sqrt{2x - 1}h(x) = \ln(3 - 3x) \in R$. Então $A \subset \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Solução

(0) **Falso.**

Para $x = 2$, temos $f(2) = 1$, e para $x = 3$, obtemos $f(3) = 1$. Assim, a função f não é injetora. Portanto, concluímos que f não é bijetora.

1 **Falso.**
Para $y = -1 \in Q$ não existe um $x \in Q$ tal que $f(x) = x^2 = -1$.
Portanto, a função f não é sobrejetiva.

2 **Falso.**
Da hipótese, juntamos

$$(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(x+1)) = f(x+2) = x+3.$$

3 **Verdadeiro.**
Dado que $f(x-8) = 2x-5$, então $f(x-8) = 2(x-8)+11$, logo $f(x) = 2x+11$.
Agora, $f(4x+1) = 2(4x+1)+11 = 8x+13$.

4 **Verdadeiro.**
Da função

$$h(x) = \frac{\ln(3-3x)}{\sqrt{2x-1}},$$

obtemos $3-3x > 0$ e $2x-1 > 0$, então $1 > x$ e $x > 1/2$.
Portanto o $Dom(h) = (1/2, 1) = A$. Também se cumpre que $A \subset (1/2, 1)$.

Exercício 13 (ANPEC 2010, Questão 1)
Considere os conjuntos
$A = \{x \in \mathbb{R}/|x-3| + |x-2| = 1\}; B = \{x \in \mathbb{R}/3 + 2x - x^2 > 0\}$;
$C = \{x \in \mathbb{R}/1 < \frac{1}{x} < 2\}$ e $D = \{x \in \mathbb{R}_+/4 \leq x^2 \leq 9\}$. Julgue as afirmativas:

0 A é um intervalo aberto;
1 Se $X \subset A$ e $X \not\subset B$, então X é um conjunto unitário;
2 $2 \in (A \cap C)$;

③ $A = D$;

④ $\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n+2}\right) / n \in \mathbb{N}^*\right\} \subset B \times C$.

Solução

⓪ **Falso.**

Considere o seguinte intervalo

FALTA FIGURA

temos três casos

(i) Se $x < 2$, então

$$|x-3| + |x-2| = 1,$$
$$-x+3-x+2 = 1,$$
$$x = 2.$$

Logo $x < 2$ e $x = 2$. Portanto, para $x < 2$ a igualdade $|x-3| + |x-2| = 1$ não é verdade.

(ii) Se $2 \leq x \leq 3$, então

$$|x-3| + |x-2| = 1$$
$$-x+3+x-2 = 1$$
$$1 = 1.$$

Logo para todo $x \in [2,3]$ a igualdade é verdade.

(iii) Se $x > 3$, então

$$|x-3| + |x-2| = 1$$
$$x-3+x-2 = 1$$
$$x = 3.$$

Logo $x > 3$ e $x = 3$. Portanto para $x > 3$ a igualdade $|x-3| + |x-2| = 1$ não é verdade.

Assim, de (**i**), (**ii**) e (**iii**) temos $x \in [2,3]$. Portanto $A = [2,3]$.

1 **Falso.**

Do item 0, temos $A = [2,3]$. Agora determinemos o intervalo para o conjunto B.

$$
\begin{aligned}
&0 < -x^2 + 2x + 3, \\
&0 > x^2 - 2x - 3, \\
&0 > (x-3)(x+1).
\end{aligned}
$$

Considere os seguinte intervalo

$$FALTA\ \ FIGURA$$

Se $x < -1$, então a ultima desigualdade é falsa. Se $x \in (-1,3)$, então a desigualdade é verdadeira. Finalmente, se $x > 3$, então a desigualdade é falsa. Portanto o conjunto $B = (-1,3)$.
Consideramos o conjunto $x = \{2,3\}$. Notei que $x \subset A$ e $x \not\subset B$.

2 **Falso.**

Do item 1, temos $A = [2,3]$. Determinemos o intervalo para o conjunto C.

$$
\begin{aligned}
&1 < \frac{1}{x} < 2, \\
&\frac{1}{2} < x < 1.
\end{aligned}
$$

Logo o conjunto $C = (0.5,1)$. A interseção $A \cap C = c = (0.5,1)$. Então $2 \notin A \cap C$.

3 **Verdadeiro.**

Do item 1, obtemos $A = [2,3]$. Determinemos o intervalo para o conjunto D.

$$4 \leq x^2 \leq 9$$

$$2 \leq |x| \leq 3$$

$$-3 \leq x \leq -2 \qquad \vee \qquad 2 \leq x \leq 3$$

Assim, o conjunto $D = ([-3,-2] \cup [2,3]) \cap \mathbb{R}_+ = [2,3] = A$.

4 **Verdadeiro.**

Do item 1 e 2, temos $B = (-1,3)$ e $C = (0.5,1)$, logo $B \times C = \{(x,y)/x \in (-1,3) \text{ e } y \in (0.5,1)\}$.

Agora determinemos o intervalo para o conjunto

$$M = \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n+2}\right)/n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Dado que $n \in \mathbb{N}^* = \{1,2,3,...\}$, então $n \geq 1$, logo $0 < 1/n < 1$.

Agora determinemos o intervalo $(n+1)/(n+2)$, então

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{n+2-1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}.$$

Já que $n \geq 1$, então $n+2 \geq 3$. Assim

$$0 < \frac{1}{n+2} < \frac{1}{3},$$
$$\frac{-1}{3} < \frac{-1}{n+2} < 0,$$
$$\frac{3}{3} < \frac{n+1}{n+2} < 1.$$

Logo

$$M = \{(x,y)/x \in (0,1) \text{ e } y \in (2/3,1)\}.$$

Portanto $M \subset B \times C$.

Exercício 14 (ANPEC 2008, Questão 3)

Seja $f : X \to Y$ uma função qualquer. Para cada subconjunto $H \subset Y$, seja $f^{-1}(H) = \{x \in X : f(x) \in H\}$ a imagem inversa de H por f. Se $A, B \subset Y$ são subconjuntos quaisquer de Y, então julgue as afirmativas:

(0) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

(1) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

(2) se $A \subset B$, então $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A)$.

(3) $f^{-1}(A^c) \neq [f^{-1}(A)]^c$, em que o superescrito c denota o complementar do conjunto subjacente.

(4) $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

Notei que se $A, B \subset Y$, então $A \cup B \subset Y$. Da hipótese $f^{-1}(A \cup B) = \{x \in X : f(x) \in A \cup B\}$.

Mostremos $f^{-1}(A \cup B) \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Seja $x \in f^{-1}(A \cup B)$, então $f(x) \in A \cup B$, logo $f(x) \in A$ ou $f(x) \in B$, assim temos $x \in f^{-1}(A)$ ou $x \in f^{-1}(B)$. Portanto $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Agora mostremos que $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$. Seja $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, então $x \in f^{-1}(A)$ ou $x \in f^{-1}(B)$. Se $x \in f^{-1}(A)$ então $f(x) \in A \subset A \cup B$ logo $x \in f^{-1}(A \cup B)$. Se $x \in f^{-1}(B)$ então $f(x) \in B \subset A \cup B$, logo $x \in f^{-1}(A \cup B)$.

Portanto $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

(1) **Verdadeiro.**

Notei que se $A, B \subset Y$, então $A \cap B \subset Y$. Da hipótese $f^{-1}(A \cap B) = \{x \in X : f(x) \in A \cap B\}$.

Mostremos que $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Seja $x \in f^{-1}(A \cap B)$, então $f(x) \in A \cap B$, logo $f(x) \in A$ e $f(x) \in B$, assim temos $x \in f^{-1}(A)$ e $x \in f^{-1}(B)$. Portanto $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Agora mostremos que $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cap B)$. Seja $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, então $x \in f^{-1}(A)$ e $x \in f^{-1}(B)$ logo $x \in f^{-1}(A \cap B)$, logo $f(x) \in A$ e $f(x) \in B$. Dado que $f(x) \in A \cap B$, então $x \in f^{-1}(A \cap B)$.

Portanto $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

(2) **Falso.**
Um contraexemplo é o caso em que $A = \varnothing$ e $B \neq \varnothing$, note que $A \subset B \subset Y$. Por definição de f^{-1} temos $f^{-1}(A) = \varnothing$ e $f^{-1}(B) \neq \varnothing$. Portanto $f^{-1}(B) \not\subset f^{-1}(A)$.

(3) **Falso.**
Mostremos que $f^{-1}(A^c) \subset [f^{-1}(A)]^c$. Seja $x \in f^{-1}(A^c)$, então $f(x) \in A^c$, logo $f(x) \notin A$, da definição de f^{-1} temos $x \notin f^{-1}(A)$, consequentemente $x \in [f^{-1}(A)]^c$.
Mostremos que $[f^{-1}(A)]^c \subset f^{-1}(A^c)$. Seja $x \in [f^{-1}(A)]^c$ então $x \notin f^{-1}(A)$, por isso $f(x) \notin A$, logo $f(x) \in A^c$, de modo que $x \in f^{-1}(A^c)$.
Portanto $f^{-1}(A^c) = [f^{-1}(A)]^c$.

(4) **Verdadeiro.**
Da definição de f^{-1} temos $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.

Exercício 15 (ANPEC 2006, Questão 6)
Avalie as opções
(0) Seja $f : [0, \pi] \to R, f(x) = \cos(x)$, então f é injetora.
(1) O conjunto $\{x \in R; x^2 - x - 2 > 0\}$ é um intervalo aberto de R.
(2) Defina a imagem de D sob f como $\{f(x); x \in D\}$ com notação $f(D)$. Então para dois conjuntos D e D' quaisquer $f(D \cap D') = f(D) \cap f(D')$.
(3) Defina a imagem de D sob f como $\{f(x); x \in D\}$ com notação $f(D)$. Então para dois conjuntos D e D' quaisquer, $f(D \cap D')$ é um subconjunto de $f(D) \cap f(D')$.
(4) Defina a imagem inversa de D sob f como $\{x \in dom(f); f(x) \in D\}$ com notação $f^{-1}(D)$. Então, tem-se $f^{-1}(D \cap D') = f^{-1}(D) \cap f^{-1}(D')$.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

O gráfico da função $cos(x)$ no intervalo $[0, \pi]$ é dada por

$$FALTA\ \ FIGURA$$

O gráfico é uma função injetora, já que toda reta horizontal toca em apenas um ponto do gráfico.
portanto a função f é injetora.

(1) **Falso.**

O conjunto

$$\{x \in R; x^2 - x - 2 > 0\} = \{x \in R; (x-2)(x+1) > 0\}.$$

Logo

$$FALTA\ \ FIGURA$$

Portanto o intervalo aberto é $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

(2) **Falso.**

Definamos $D = \{1, 2\}, D' = \{-1, 2\}$ e $f(x) = x^2$. As imagens $f(D) = \{1, 4\}, f(0') = \{1, 4\}$ e $f(D \cap D') = f(\{2\}) = \{4\}$. Então $f(D \cap D') \neq f(D) \cap f(D')$.

(3) **Verdadeiro.**

Seja $f(x_0) \in F(D \cap D') = f\{f(x); x \in D\}$, então $x_0 \in D$ e $x_0 \in D'$. Logo $f(x_0) \in f(D)$ e $f(x_0) \in f(D')$, assim $f(x_0) \in f(D) \cap f(D')$.

(4) **Verdadeiro.**

Mostremos que :

$$f^{-1}(D \cap D') \subset f^{-1}(D) \cap f^{-1}(D') \ \text{ e } \ f^{-1}(D) \cap f^{-1}(D') \subset f^{-1}(D \cap D')$$

(i) $f^{-1}(D \cap D') \subset f^{-1}(D) \cap f^{-1}(D')$

Seja $x \in f^{-1}(D \cap D')$, então $f(x) \in D \cap D'$, logo $f(x) \in D$

e $f(x) \in D'$. Da definição da imagem inversa, temos que $x \in F^{-1}(D)$ e $x \in f^{-1}(D')$. Portanto, obtemos $x \in f^{-1}(D) \cap f^{-1}(D')$.

(ii) $f^{-1}(D) \cap f^{-1}(D') \subset f^{-1}(D \cap D')$
Seja $x \in f^{-1}(D) \cap f^{-1}(D')$, então $x \in f^{-1}(D)$ e $x \in f^{-1}(D')$, logo $f(x) \in D$ e $f(x) \in D'$, assim $f(x) \in D \cap D'$. Da definição da imagem inversa, juntamos que $x \in f^{-1}(D \cap D')$.

Podemos concluir, de (**i**) e (**ii**), que

$$f^{-1}(D \cap D') = f^{-1}(D) \cap f^{-1}(D')$$

.

Exercício 16 (ANPEC 2005, Questão 4)
Dadas as funções $f(x) = \frac{x^2-3}{x-1}$ e $g(x) = \sqrt{x-1}$, avalie as afirmativas:

0. $g \circ f(x) = \sqrt{\frac{x^2-x-1}{x-1}}$.
1. O domínio da função composta $h = g \circ f$ é $[-1, 1) \cup [2, +\infty)$.
2. A função f é injetora.
3. O domínio da função $u = f + g$ é $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.
4. O domínio da função g está contido na imagem dela.

Solução

0 **Falso.**
A função

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x^2-3}{x-1}\right) = \sqrt{\frac{x^2-3}{x-1} - 1} = \sqrt{\frac{x^2-x-2}{x-1}}$$

1 **Verdadeiro.**
Do item 0, obtemos

$$g \circ f(x) = \sqrt{\frac{x^2-x-2}{x-1}}.$$

Logo

$$\frac{x^2-x-2}{x-1} = \frac{(x-2)(x+1)}{x-1} \geq 0$$
$$(x-2)(x+1)(x-1) \geq 0$$

FALTA FIGURA

Assim, temos $x \in [-1,1) \cup [2,+\infty)$.

2 **Falso.**
Para $x=0$ e $x=3$, temos $f(0)=f(3)=3$.

3 **Falso.**
Os domínios $Dom(f)=\mathbb{R}-\{1\}$ e $Dom(g)=\{1,+\infty\}$. Logo, $Dom(f+g)=Dom(f)\cap Dom(g)=\{1,+\infty\}$.

4 **Verdadeiro.**
$Dom(g)=\{1,+\infty\}$ e $Im(g)=[0,+\infty)$. Então $Dom(g)\subset Im(g)$.

Exercício 17 (ANPEC 2003, Questão 1)

A respeito dos conjuntos A, B, C e D definidos abaixo, no $\Re$, assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

0 $A \cup B = B \cup C$ em que, $A=\{x; |x|<3\}$
1 $(A\cap B)\cup(A\cap C)=A$ $B=\{x; x^2+2x<3\}$
2 $(B\cap C)=\emptyset$ $C=\{x; 1<e^{\ln\, x}<3\}$
3 $(B\cup C)\supset A$ $D=\{(x,y); |x|<4, |y|>1\}$
4 $B\times C\subset D$.

Solução

(0) **Falso.**

Determinemos o conjunto A. Já que $|x| < 3$, então $-3 < x < 3$, logo $A = (-3, 3)$. Agora determinemos o conjunto B, então $x^2 + 2x < 3$, logo $x^2 + 2x - 3 < 0$, assim $(x + 3)(x - 1) < 1$, considere o seguinte intervalo

FALTA FIGURA

Logo $x \in (-3, 1)$, isto é $B = (-3, 1)$. Finalmente, determinemos o conjunto C.

$$1 < e^{\ln x} < 3,$$
$$1 < x < 3.$$

Assim, obtemos $c = (1, 3)$. Os conjuntos $A \cup B = (-3, 3)$ e $B \cup C = (-3, 3) - \{1\}$. Portanto $A \cup B \neq B \cup C$.

(1) **Falso.**

Do item (0), temos $A = (-3, 3), B = (-3, 1)$ e $C = (1, 3)$. Logo

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = (-3, 3) - \{1\} \neq A.$$

(2) **Verdadeiro.**

Do item (0), temos $B = (-3, 1)$ e $C = (1, 3)$, logo $B \cap C = \emptyset$.

(3) **Falso.**

A união $B \cup C = (-3, 3) - \{1\}$, logo $A \not\subset B \cup C$.

(4) **Verdadeiro.**

O produto cartesiano dos conjuntos B e C é

$$B \times C = \{(x, y)/x \in (-3, 1) \text{ e } y \in (1, 3)\}.$$

Agora determinemos os intervalos para o conjunto D. Já que $|x| < 4$ e $|y| > 1$, então $x \in (-4, 4)$ e $y \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Logo

$$D = \{(x, y)/x \in (-4, 4) \text{ e } y \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)\}.$$

Portanto $B \times C \not\subset D$.

Exercício 18 (ANPEC 2003, Questão 3)

Considere as funções f e g dadas por $f(x) = (10-x)^{1/2}$ e $g(x) = (x-5)^{1/2}$.

Assinale V (Verdadeiro) ou F (Falso):

0. O domínio de $(f+g)$ é $[5, 10]$.
1. O domínio de (g/f) é $[5, 10]$.
2. O domínio de (f/g) é $(5, 10]$.
3. O domínio da função composta $(g \circ f) = [5, +\infty)$.
4. Seja $k > 0$. O domínio da função (kf) é $[10k, +\infty)$.

Solução

0 **Verdadeiro.**

Os domínios $Dom(f) = (-\infty, 10]$ e $Dom(g) = [5, +\infty)$, então

$$Dom(f+g) = Dom(f) \cap Dom(g) = (-\infty, 10] \cap [5, +\infty) = [5, 10].$$

1 **Falso.**

O domínio

$$Dom(g/f) = Dom(g) \cap Dom(f) \cap \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$$

$$Dom(g/f) = [5, +\infty) \cap (-\infty, 10] \cap (-\infty, 10) = [5, 10).$$

2 **Verdadeiro.**

$$Dom(f/g) = Dom(f) \cap Dom(g) \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$$

$$Dom(f/g) = (-\infty, 10] \cap [5, +\infty) \cap (5, +\infty) = (5, 10].$$

3 **Falso.**

As funções f e g são definidas como

$$f : (-\infty, 10] \to [0, +\infty) \quad \text{e} \quad g : [5, +\infty) \to [0, +\infty).$$

Para que a função composta $g \circ f$ esteja bem definida a imagem de f tem que ser igual ao domínio de g. Dado que

$$Dom(g) = [5, +\infty) \subset \pm m(f) = [0, +\infty),$$

podemos definir as funções

$$f : A \to [5, +\infty) \quad \text{e} \quad g : [5, +\infty) \to [0, +\infty).$$

Agora, temos que achar o conjunto A. Então

$$\begin{aligned} 5 &\le f(x) = \sqrt{10 - x}, \\ 25 &\le 10 - x, \\ x &\le -15, \end{aligned}$$

logo $A = (-\infty, -15]$, isto é que o domínio da função $g \circ f$ é $(-\infty, -15]$.

4 **Falso.**
A função (kf) é definida por $(kf)(x) = kf(x) = k\sqrt{10 - x}$. Logo, o domínio de (kf) é $(-\infty, 10]$.

Exercício 19 (ANPEC 1999, Questão 5)
Se $f(x) = 2x$ e $g(x) = 2x - 2$, calcular

$$f(g(x)) - g(g(x)) + g^{-1}(f(x)) \text{ para } x = -3.$$

Solução

Para $x = -3$, temos $g(-3) = -8$ e $f(-3) = -6$. Logo

$$f(g(-3)) - g(g(-3)) + g^{-1}(f(-3)) = f(-8) - g(-8) + g^{-1}(-6) = 2 + g^{-1}(-6).$$

Da função $g(x) = y = 2x - 2$, temos $x = y/2 + 1$. Assim, a função inversa $g^{-1}(y) = y/2 + 1$. Portanto, $2 + g^{-1}(-6) = 0$. A resposta é zero.

Exercício 20 (ANPEC 1996, Questão 12)
Identifique as afirmativas verdadeiras e falsas.
seja:
I = conjunto de todas as pessoas inteligentes.
R = conjunto de todas as pessoas ricas.

RJ = conjunto das pessoas que moram no Rio de Janeiro.

Então:

0. $\mathrm{I}^c \cap \mathrm{R}$ = Conjunto de pessoas ricas porém não inteligentes.
1. $\mathrm{RJ}^c \cap \big(\mathrm{I} \cup \mathrm{R}\big)$ = Conjunto das pessoas ricas fora de Rio de Janeiro ou das pessoas inteligente fora de Rio de Janeiro.
2. $\mathrm{RJ} \cup \mathrm{R}$ = Conjunto das pessoas ricas ou das pessoas que moram no Rio de Janeiro ou das pessoas ricas que moram no Rio de Janeiro.
3. $(\mathrm{I} \cup \mathrm{RJ})^c \cap \mathrm{R}^c$ = Conjunto das pessoas não inteligentes, não ricas e que não moram no Rio de Janeiro.
4. $(\mathrm{RJ} \cup \mathrm{RJ}^c)^c = \varnothing$.

Solução

0. **Verdadeiro.**
1. **Falso.**
2. **Verdadeiro.**
3. **Verdadeiro.**
4. **Verdadeiro.**

Exercício 21 (ANPEC 1996, Questão 13)

Sejam A, B, C e D conjuntos contidos em um conjunto universo U. Indique si as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas:

0. Se $A^c \cap B^c = \varnothing$ então $A \cup B = U$.
1. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (b - c)$.
2. Se A e B são finitos então o número de elementos das partes de $A \cup B$ é igual ao número de elementos das partes de A mais o número de elementos das partes de B.
3. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
4. $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$.

Solução

0. **Verdadeiro.**
1. **Verdadeiro.**

(2) **Falso.**
(3) **Verdadeiro.**
(4) **Falso.**

Exercício 22 (ANPEC 1995, Questão 9)

A respeito das três subconjuntos de $\Re$ definidos por

A $= \{(x, y)$ tal que $x^2 + y^2 = 1\}$

B $= \{(x, y)$ tal que $(x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 1\}$

C $= \{(x, y)$ tal que $|x| + |y| \leq 1\}$

Indique se as afirmativas abaixo são verdadeirasou falsas:

(0) O conjunto B $\cap$ C tem área inferior a 1/3.
(1) O conjunto A $\cap$ B $\cap$ C é vazio.
(2) O conjunto A $\cap$ B tem área igual a zero.
(3) O conjunto A $\cap$ C possui o dobro de elemento do conjunto A $\cap$ B.

Solução

(0) **Verdadeiro.**
(1) **Falso.**
(2) **Verdadeiro.**
(3) **Falso.**

Exercício 23 (ANPEC 1994, Questão 1)

Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Indique se as afirmativas são verdadeiras ou falsas:

(0) $A = B$ se e somente se para todo $x \in A$ tem-se que, $x \in B$ e para todo $x \in B$ tem-se que $x \in A$.
(1) $A - B = A \cap B^c$.
(2) $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = (A \cup B) \cap (A^c \cup B)$.
(3) Seja A $= \{1, 2, 3, 4\}$ e B $= \{1, 2, 3, 4\}$. Então A $\subset$ B.
(4) Seja A $= \{x : 0 \leq x \leq 10\}$ e B $= \{x : 5 \leq x \leq 15\}$.
logo A - B $= \{x : 0 \leq x < 5$ e $10 < x \leq 15\}$.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Falso.**

(3) **Verdadeiro.**

(4) **Falso.**

Exercício 24 (ANPEC 1994, Questão 6)

Determine o grau de homogeneidade da função abaixo:

$$f(x,y) = x \ln \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

Solução

A função f é homogênea de grau k se:

$$\begin{aligned}
f(t(x,y)) &= t^k f(x,y) \\
tx \ln \frac{\sqrt{tx}-\sqrt{ty}}{\sqrt{tx}+\sqrt{ty}} &= t^k x \ln \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \\
tx \ln \frac{\sqrt{t}\sqrt{x}-\sqrt{t}\sqrt{y}}{\sqrt{t}\sqrt{x}+\sqrt{t}\sqrt{y}} &= t^k x \ln \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \\
tx \ln \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} &= t^k x \ln \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \\
t &= t^k.
\end{aligned}$$

Portanto, o grau é $k = 1$.

Exercício 25 (ANPEC 1991, Questão 2)

Dados os conjuntos

$$A = \{(x,y) \mid y \leq 3 + 2x, x \in R\},$$

$$B = \{(x,y) \mid y \leq 3 + 3x, x \in R\},$$

$$C = \{(x,y) \mid y \leq 2 + 2x, x \in R\}.$$

0 Todo elemento de C pertence a B.

1 Todo elemento de C pertence a A.

2 $A \cap B$ é um conjunto convexo.

3 $A \cup B$ é um conjunto convexo.

4 $C \cap B$ é um subconjunto de A.

Solução

0 **Falso.**

Seja $(-2,-2) \in C$. Então o ponto $(-2,-2) \notin B$.

1 **Verdadeiro.**

Seja $(x, y) \in C$, então $y \leq 2 + 2x$, logo $y \leq 2 + 2x \leq 3 + 2x$. Portanto $(x, y) \in B$.

2 **Verdadeiro.**

Primeiro calculamos a interseção das retas $y = 3 + 2x$ e $y = 3 + 3x$. Então a interseção é o ponto $(0, 3)$.

$FALTA\ \ FIGURA$

A interseção $A \cap B$ é convexo da figura acima.

3 **Falso.**

$FALTA\ \ FIGURA$

Da figura, $A \cup B$ não é convexo.

4 **Verdadeiro.**

Do item 1, temos $C \subset A$, logo $B \cap C \subset A$.

Exercício 26 (ANPEC 1990, Questão 1)

Dados os conjuntos

$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad B = \{1, 3, 5\} \quad C = \{0\}$

determine quais das seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.

(0) A X C tem 0 elementos.

(1) P(P(B)) tem mais de 200 elementos [nota: se x é um conjunto, P(x) é um conjunto das suas partes].

(2) $(A \cap B)$X A tem mais de 5 e menos de 10 elementos.

(3) $(A \cup B)$X$(A \cap B) = (A \cap B)$X$(A \cup B)$.

(4) $(A \cap B) \cap C = (A \cup B) \cap C$.

Solução

(0) **Falso.**

O produto de $A \times C = \{(1, 0); (2, 0); (3, 0); (4, 0)\}$ tem 4 elementos.

(1) **Verdadeiro.**

O conjunto de partes de B tem $P(B) = 2^3 = 8$ elementos. Então, o conjunto de partes de $P(B)$ tem $P(P(B)) = 2^8 = 256$.

(2) **Verdadeiro.**

O conjunto $A \cap B = \{1, 3\}$, logo

$$(A \cap B) \times A = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4)\}.$$

Portanto $(A \cap B) \times A$ tem 8 elementos.

(3) **Falso.**

Os conjuntos $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $A \cap B = \{1, 3\}$.

$(5, 1) \in (A \cup B) \times (A \cap B)$, mas $(5, 1) \notin (A \cap B) \times (A \cup B)$.

(4) **Verdadeiro.**

Como

$$(A \cap B) \cap C = \emptyset, \qquad (A \cup B) \cap C = \emptyset,$$

então $(A \cap B) \cap C = (A \cup B) \cap C$.

CAPíTULO 13

Geometria Analítica

[1]

13.1. Questões ANPEC Trabalhadas

13.1.1. Retas no plano. Vamos começar olhando para questões que envolvem retas em $\mathbb{R}^2$ (ver Seção 2.4). Uma reta na direção (u, v) é ortogonal ao vetor $(-v, u)$. Se a reta passa por (x_0, y_0) conhecido, então um ponto (x, y) qualquer da reta satisfaz

$$[(x, y) - (x_0, y_0)] \cdot (-v, u) = 0.$$

Logo,

$$-vx + uy + (vx_0 - y_0u) = 0.$$

Concluímos que se a reta é dada pela equação

$$ax + by + c = 0,$$

então ela é ortogonal ao vetor (a, b).

Considere as seguintes questões.

ANPEC 2017, Questão 11.

0 Para que as retas $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ sejam perpendiculares deve-se cumprir $a_1a_2 + b_1b_2 = 1$;

Sabemos que a primeira reta é ortogonal a (a_1, b_1), e portanto tem a direção $(-b_1, a_1)$. Da mesma forma, a segunda reta tem a direção $(-b_2, a_2)$. Para serem ortogonais, estas direções teriam que ser ortogonais:

$$(-b_1, a_1) \cdot (-b_2, a_2) = 0.$$

Logo, a afirmativa é falsa.

[1]Última Atualização: 27/04/2022

1 Para que as retas $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ se interceptem em um único ponto deve-se cumprir $a_1b_2 \neq a_2b_1$.

As duas retas se interseptam num só ponto se e somente se não são paralelas, i.e., se as direções $(-b_1, a_1)$ e $(-b_2, a_2)$ não estão alinhadas. Se as direções forem alinhadas, existe $\alpha \neq 0$ tal que

$$(-b_1, a_1) = \alpha(-b_2, a_2),$$

i.e., $b_1 = \alpha b_2$ e $a_1 = \alpha a_2$. Supondo $b_2 \neq 0$ e $a_2 \neq 0$, temos

$$\alpha = \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1}{a_2}.$$

Logo, para não haver alinhamento, temos que ter $a_1b_2 \neq a_2b_1$.

Observação 13.1. para não ter a restrição $b_2 \neq 0$ e $a_2 \neq 0$, basta ver que

$$a_1 = \alpha a_2 \implies a_1b_2 = \alpha a_2b_2 = a_2(\alpha b_2) = a_2b_1.$$

Outra solução (talvez mais simples) é apresentada na página 200.

ANPEC 2013, Questão 2. As seguintes retas são dadas:

$$L_1 : 4x + 3y - 12 = 0, \qquad L_2 : 3x + y - 6 = 0.$$

Considere agora a seguinte afirmativa:

2 A equação da bissetriz do maior ângulo que formam L_1 e L_2 é $10x - 25y + 48 = 0$.

A reta L_1 tem direção $\mathbf{d}_1 = (-3, 4)$, e a reta L_2 tem direção $\mathbf{d}_2 = (-1, 3)$. A reta L_3 tem direção $\mathbf{d}_3 = (-25, 10)$ (podemos até dividir por 5 e simplificar as contas e afirmar que L_3 tem direção $(-5, 2)$). Se L_3 é bissetriz, então o módulo do cosseno dos ângulo entre as retas L_1, L_3 e L_2, L_3 é o mesmo. Fazendo as contas

$$\left|\frac{\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_3}{\|\mathbf{d}_1\|\|\mathbf{d}_3\|}\right| = \left|\frac{\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{d}_3}{\|\mathbf{d}_2\|\|\mathbf{d}_3\|}\right|$$

obtemos

$$\left|\frac{-75+40}{5}\right| = \left|\frac{-25+30}{\sqrt{10}}\right|,$$

que é uma contradição. Portanto a afirmativa é falsa. Para uma solução alternativa, ver página 188.

Uma outra solução baseia-se no fato da reta bissetriz ter que ser equidistante tanto de L_1 como de L_2. Usando que a distância de um ponto (p_1, p_2) à uma reta $ax + by + c = 0$ ser dado por (2.4.3), i.e., a distância é dada por

$$\frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Basta então checar que um ponto da reta L_3 não será equidistante de L_1 e L_2.

ANPEC 2011, Questão 2. Nesta questão, as seguintes informações são dadas:

> Considere as retas r_1 e r_2, no plano, definidas por
>
> $$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$
>
> em que $n_1 = (a_1, b_1)$ e $n_2 = (a_2, b_2)$ são vetores não nulos ortogonais à r_1 e r_2, respectivamente. Denotamos por $d(P, r)$ a distância de um ponto P à uma reta r do plano.

Um dos ítens da questão pede ára determinar se a afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa:

> 2 Considere em r_1 os valores $c_1 = 0$ e $n_1 = (1, -1)$. Se pontos distintos $P = (3, y_1)$ e $Q = (3, y_2)$ são tais que $d(P, r_1) = d(Q, r_1) = \sqrt{2}$, então $y_1 + y_2 = 6$.

Como $c_1 = 0$ e $n_1 = (1, -1)$, a reta r_1 é dada por $x - y = 0$, e a distância dos pontos $P = (3, y_1)$ e $Q = (3, y_2)$ até r_1 são

$$\frac{|3 - y_1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|3 - y_2|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2}.$$

Logo, $|3-y_1| = |3-y_2| = 2$ e então y_1 e y_2 tomam os valores 1 e/ou 5. Como eles são distintos, então y_1 e y_2 têm que tomar valores distintos, resultando em $y_1 + y_2 = 6$. Logo, a afirmativa é verdadeira.

13.1.2. Planos e retas no espaço. Boa parte das questões da ANPEC em geometria analítica envolve planos, retas ortogonais ou neles contidas. Vale lembrar que um plano P é definido por um ponto a ele pertencente e um vetor normal a P (ver Seção 2.6): seja $\hat{\mathbf{x}} \in P$ e $\mathbf{n}$ vetor ortogonal a P. Então

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \ (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{n} = 0\},$$

i.e.,

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0,$$

com $a = n_1$, $b = n_2$, $c = n_3$, $d = -\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n}$.

Outra forma de se definir um plano P é dando três pontos em P que não sejam colineares. Pode-se então definir um vetor normal ao plano via produto vetorial; ver página21.

A equação vetorial da reta passando por um ponto (p_1, p_2, p_3) e ortogonal a P é

$$(p_1, p_2, p_3) + t(a, b, c),$$

onde $t \in \mathbb{R}$.

A distância de um ponto $\hat{\mathbf{p}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ ao plano dado por $ax + by + cz + d = 0$ é dada por (ver (2.6.1))

$$\frac{|a\hat{x} + b\hat{y} + c\hat{z} + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

ANPEC 2019, Questão 3. Por exemplo, nesta questão, dois planos são dados:

> Sejam P e Q dois planos cujas equações cartesianas são
>
> $$x + 2y - 3z = 1, \qquad 2x - y + 2z = 3,$$
>
> respectivamente.

Com estas informações, podemos responder ao primeiro ítem

0 A equação vetorial da reta ortogonal ao plano P, que passa pelo ponto $(-2, 0, z_0) \in P$, é $(x, y, z) = (-2, 0, 1) + t(1, 2, -3)$, para todo t real.

Pela equação que define P, sabemos que $(1, 2, -3)$ é ortogonal a P. Como $z_0 \in P$, então $z_0 = -1$. A reta então é dada por

$$(-2, 0, -1) + t(1, 2, -3),$$

e não corresponde à reta da afirmativa. Esta é portanto falsa.

2 Um vetor ortogonal ao plano gerado pelas retas ortogonais aos planos P e Q é $(1, -8, -5)$.

Pelas equações temos que $(1, 2, -3)$ e $(2, -1, 2)$ são ortogonais a P e Q. Como estes vetores não são colineares, então eles geram um plano, ortogonal a

$$\begin{aligned}(1, 2, -3) \times (2, -1, 2) &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 4\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 - 6\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3 - 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 = (1, -8, -5).\end{aligned}$$

A afirmativa é portanto verdadeira (veja uma solução alternativa na página 196).

3 Sejam L_P a reta ortogonal a P passando pelo ponto $(-2, 0, z_0) \in P$ e L_Q a reta ortogonal a Q passando pelo ponto $(1, y_0, 2) \in Q$. L_P e L_Q têm um ponto em comum.

Já vimos no primeiro ítem que $(-2, 0, z_0) \in P$ implica em $z_0 = -1$. Se $(1, y_0, 2) \in Q$ então $y_0 = 3$. As retas ortogonais são

$$(-2, 0, -1) + t(1, 2, -3), \qquad (1, 3, 2) + s(2, -1, 2),$$

onde t, $s \in \mathbb{R}$. Para que estas duas retas tenham ponto em comum, tem que existir t, $s \in \mathbb{R}$ tais que $(-2,0,-1)+t(1,2,-3)=(1,3,2)+s(2,-1,2)$, i.e.,

$$\begin{cases} t-2s=3, \\ 2t+s=3 \\ -3t-2s=3 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por -2 e somando à segunda, temos $5s=-3$. Da primeira equação temos $t=9/5$. Note que estes valores não satisfazem a terceira equação, e portanto tal solução não existe. A afirmativa é, portanto, falso.

4 A equação cartesiana do plano gerado pelas retas L_P e L_Q do ítem (3) e que contém o ponto $(1,1,1)$ é $x-8y-5z+12=0$.

Já vimos no ítem 2 que o vetor ortogonal a estas retas é $(1,-8,-5)$. Portanto, o plano é dado por

$$x-8y-5z+d=0.$$

Para determinar d, basta impor que $(1,1,1)$ pertença ao plano, i.e., $d=-1+8+5=12$. Logo, a equação do plano é

$$x-8y-5z+12=0,$$

e a afirmativa é verdadeira.

ANPEC 2018, Questão 3.

Seja $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}\cdot\ \vec{u}}$. Então, se $\vec{u}$ e $\vec{\nu}$ são perpendiculares, temos que $\|\vec{u}-\vec{\nu}\|^2=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{\nu}\|^2$.

Note que

$$\|\vec{u}-\vec{\nu}\|^2=(\vec{u}-\vec{\nu})\cdot(\vec{u}-\vec{\nu})=\vec{u}\cdot\vec{u}-2\vec{u}\cdot\vec{\nu}+\vec{\nu}\cdot\vec{\nu}=\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{\nu}=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2.$$

Portanto, a afirmativa é falsa. Note que a conta acima nem precisaria ser feita, pois $\|\vec{u}-\vec{\nu}\|^2=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{\nu}\|^2$ não pode ser verdade. De fato, o lado direito da “igualdade” pode ser negativo, o que nunca acontece com uma norma (basta tomar $\vec{u}=\vec{0}$ e $\vec{\nu}\neq\vec{0}$).

13.1.3. Cônicas. Estas são as questões ANPEC envolvendo cônicas, que não são "apenas" questões de cálculo.

ANPEC 2013, Questão 2.

> Dadas as retas $L_1 : 4x + 3y - 12 = 0$ e $L_2 : 3x + y - 6 = 0$, analise as seguintes afirmativas:
>
> 4 A hipérbole equilátera, que tem como assíntotas os eixos coordenados e é tangente a L_1 e L_2, é $xy = 3$.

Uma hipérbole equilátera tem a forma $X^2 - Y^2 = a^2$, com $a \neq 0$. Ou, de forma equivalente, $(X+Y)(X-Y) = a^2$. Introduzindo as variáveis $x = X+Y$ e $y = X-Y$, temos que

$$xy = a^2.$$

Note que as assíntotas de uma hipérbole deste tipo são dadas pelos eixos coordenados. A hipérbole sugerida pelo ítem tem $a = \sqrt{3}$.

Para descobrir se L_1 e L_2 a tangenciam, temos que descobrir se só existe um ponto pertencendo às retas e à hipérbole. Note que, como $y = 3/x$, a reta que tangencia a hipérbole num ponto (x, y) tem que ter inclinação da derivada $-3/x^2$.

A inclinação de L_1 é $-4/3$, e para um ponto (x, y) da hipérbole ter a mesma inclinação, temos que ter

$$-\frac{3}{x^2} = -\frac{4}{3}.$$

Portanto $x = -3/2$ ou $x = 3/2$. Os pontos pertencentes à L_1 seriam $(-3/2, 6)$ ou $(3/2, 6)$. Note que $(-3/2, 6)$ não pertence à hipérbole, o pode portanto ser descartado. Por outro lado, o ponto $(3/2, 6)$ pertence à reta e à hipérbole, e tanto a reta como a hipérbole têm a mesma inclinação neste ponto. Então é um ponto de tangente.

De forma análoga, podemos ver que L_2 tangencia a hipérbole. Como L_2 tem inclinação -3, então um ponto de tangente (x, y) tem que satisfazer

$$-\frac{3}{x^2} = -3,$$

i.e., $x = -1$ ou $x = 1$. Como $(-1, 9)$ pertence à reta mas não à hipérbole, podemos descartá-lo. Já o ponto $(1, 3)$ pertence à reta e à hipérbole, e neste ponto a reta e a hipérbole têm a mesma inclinação. Este é portanto um ponto tangente.

A afirmativa é verdadeira.

ANPEC 1993, Questão 2. Considere as seguinte afirmativas a respeito da equação $y^2 - x^2 = 1$:

0 A equação dada representa uma hipérbole.

Verdade. Um conjunto de pontos (x, y) do plano caracterizados por uma equação da forma $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, será uma hipérbole se $b^2 - 4ac > 0$. No exemplo, $a = -1$, $b = 0$ e $c = 1$. Logo $b^2 - 4ac = 1 > 0$.

1 O gráfico da equação dada intercepta o eixo Ox nos pontos $(0, 0)$ e $(0, -2)$.

Falso: $(0, 0)$ nem pertence à hipérbole.

2 O gráfico da equação dada possui dois focos, nos pontos $(2, 3)$ e $(2, -5)$.

A afirmativa é falsa. Na verdade, os focos da hipérbole dada são os pontos $(0, -1)$ e $(0, 1)$. Mas, supondo que tal informação não fosse conhecida, note que a propriedade que caracteriza hipérboles é que um ponto (x, y) a ela pertencente tem constante o módulo da diferença entre as distâncias até os focos $\boldsymbol{f}_1$ e $\boldsymbol{f}_2$, i.e.,

$$|d(\mathbf{x}, \boldsymbol{f}_1) - d(\mathbf{x}, \boldsymbol{f}_2)| = r.$$

Ver (2.7.1). Como os pontos $(0, -1)$ e $(0, 1)$ pertencem à hipérbole da questão, basta checar se as diferenças das distâncias até $(2, 3)$ e $(2, -5)$ são constantes.

Primeiro, consideramos o ponto $(0, 1)$:

$$\big|\|(0,1)-(2,3)\|-\|(0,1)-(2,-5)\|\big| = \big|\|(-2,-2)\|-\|(-2,6))\|\big| = \big|\sqrt{8}-\sqrt{40}\big| = \sqrt{40}-\sqrt{8}$$

Fazendo as contas agora para o ponto $(0, -1)$:

$$\big|\|(0,-1)-(2,3)\|-\|(0,-1)-(2,-5)\|\big| = \big|\|(-2,-4)\|-\|(-2,4))\|\big| = \big|\sqrt{20}-\sqrt{20}\big| = 0$$

Como os valores são diferentes, os pontos $(2, 3)$ e $(2, -5)$ não são focos.

ANPEC 1992, Questão 2. Esta questão começa definindo duas esferas por

$$x^2+y^2+z^2-6x-8y-4z+20 = 0 \text{ e } x^2+y^2+z^2-6x-8y-10z+41 = 0.$$

Completando quadrados, temos que as esferas são dadas por

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 3^2, \qquad (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 3^2.$$

0 Ambas se situam inteiramente no primeiro octante.

Note que o ponto $(3, 4, 2)$ pertence à segunda esfera, apesar de não estar no primeiro octante. Logo, a afirmativa é falsa.

1 Sua interseção define um círculo situado num plano horizontal. (paralelo a OXY).

A afirmativa é verdadeira. Tirando a diferença entre as equações, vemos que

$$(z-2)^2 - (z-5)^2 = 0 \implies z = \frac{7}{2}.$$

Portanto, os pontos (x, y, z) da intersação têm $z = 7/2$ constante, e satisfazem

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 9 - \frac{9}{4}$$

2 O segmento de reta definido pelos seus centros é ortogonal ao eixo vertical. (OZ).

Os centros são $(3, 4, 2)$ e $(3, 4, 5)$. Logo, o segmento definido por este pontos é *paralelo* ao eixo OZ, e não ortogonal.

3 As esferas não se interceptam.

Falso. Ver solução do ítem 1.

4 As esferas são concêntricas.

Falso. Os centros são $(3, 4, 2)$ e $(3, 4, 5)$.

13.2. Questões ANPEC Resolvidas

Exercício 1 (ANPEC 2019, Questão 3)

Sejam P e Q dois planos cujas equações cartesianas são $x + 2y - 3z = 1$ e $2x - y + 2z = 3$, respectivamente.

Classifique as afirmações abaixo segundo a sua veracidade:

0. A equação vetorial da reta ortogonal ao plano P, que passa pelo ponto $(-2, 0, z_0) \in P$, é $(x, y, z) = (-2, 0, 1) + t(1, 2, -3)$, para todo t real.
1. A equação paramétrica da reta ortogonal ao plano Q, que passa pelo ponto $(1, y_0, 2) \in Q$, é $x = 1 + t; y = 3 + 2t; z = 3 - 2t$; para todo t real.
2. Um vetor ortogonal ao plano gerado pelas retas ortogonais aos planos P e Q é $(1, -8, -5)$.
3. Sejam L_P a reta ortogonal a P passando pelo ponto $(-2, 0, z_0) \in P$ e L_Q a reta ortogonal a Q passando pelo ponto $(1, y_0, 2) \in Q, L_P$ e L_Q têm um ponto em comum.
4. A equação cartesiana do plano gerado pelas retas L_P e L_Q do item (3) e que contém o ponto $(1, 1, 1)$ é $x - 8y - 5z + 12 = 0$.

Solução

0. **Falso.**

   Dado que $(-2, 0, z_0) \in P$, então da equação do plano P, temos $z_0 = -1$. Também da equação do plano P, obtemos o vetor normal $\vec{n}_p = (1, 2, -3)$. A equação vetorial da reta ortogonal ao plano P é

$$(x, y, z) = (-2, 0, -1) + t(1, 2, -3)$$

1. **Falso.**

   Ja que $(1, y_0, 2) \in Q$ e da equação do plano Q, temos $y_0 = 3$. Também da equação cartesiana do plano Q, temos o vetor normal $\vec{n}_Q = (2, -1, 2)$. Assim, a equação vetorial da reta ortogonal ao plano Q é

$$(x, y, z) = (1, 3, 2) + t(2, -1, 2).$$

Logo, a equação paramétrica é

$$x = 1 + 2t, \quad y = 3 - t, \quad z = 2 + 2t$$

(2) **Verdadeiro.**

Das equações cartesianas dos planos P e Q, obtemos os vetores normais $\vec{n}_P = (1, 2, -3)$ e $\vec{n}_Q = (2, -1, 2)$, respectivamente. Note que os vetores $\vec{n}_P$ e $\vec{n}_Q$ não são paralelos, então podemos formar um plano com estos vetores. Se $(1, 8, -5)$ é ortogonal ao plano gerado pelo vetores $\vec{n}_P$ e $\vec{n}_Q$, então $(1, 8, -5)$ tem que ser ortogonal aos vetores $\vec{n}_P$ e $\vec{n}_Q$. Isso é verdade já que

$$(1, 2, -3).(1, -8, -5) = 0, (2, -1, 2).(1, -8, 5) = 0$$

(3) **Falso.**

Dos item (0) e (1), temos que

$$\vec{n}_P = (1, 2, -3), \;\; z_0 = 1, \;\; \vec{n}_Q = (2, -1, 2) \;\text{ e }\; y_0 = 3.$$

As equações vetoriais das retas L_P e L_Q são, respectivamente,

$$(x, y, z) = (-2, 0, -1) + t(1, 2, -3).$$
$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + s(2, -1, 2).$$

Para ver se as retas L_P e L_Q tem um ponto em comum temos que igualar as duas ultimas equações

$$(-2, 0, -1) + t(1, 2, -3) = (1, 3, 2) + s(2, -1, 2).$$

Portanto não existem $t \in \mathbb{R}$ e $s \in \mathbb{R}$ tal que cumpra o sistema anterior.

(4) **Verdadeiro.**

Do item (2), obtemos que $(1, -8, -5)$ é ortogonal as retas L_P e L_Q

então

$$(1,-8,-5).((x,y,z)-(1,1,1)) = (1,-8,-5)(x-1,y-1,z-1) = 0.$$

Portanto

$$x - 8y - 5z + 12 = 0.$$

Exercício 2 (ANPEC 2018, Questão 3)

Considere $\vec{x}, \vec{\nu}$ e $\vec{w}$ como vetor em $\mathbb{R}^3$ e $s, t \in \mathbb{R}$. Verifique a veracidade das afirmações abaixo, em que o produto interno é denotado por "$\cdot$" e o produto vetorial por "$\times$":

(0) O conjunto $A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} \cdot \vec{\nu} = 10\}$ é um plano perpendicular ao vetor $\vec{\nu}$;

(1) A reta definida por $\vec{x}(t) = t\vec{\nu}$ e o plano $\vec{x}(s,t) = s\vec{\nu} + t\vec{w}$ nunca se encontram;

(2) Dados os vetores $\vec{\nu}$ e $\vec{w}$, o plano definido pela equação paramétrica $\vec{x}(s,t) = s\vec{\nu} + t\vec{w}$ coincide com o plano definido pela equação $\vec{x} \cdot (\vec{\nu} \times \vec{w}) = 2$;

(3) Seja $\| \vec{u} \| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$. Então, se $\vec{u}$ e $\vec{\nu}$ são perpendiculares, temos que $\| \vec{u} - \vec{\nu} \|^2 = \| \vec{u} \|^2 - \| \vec{\nu} \|^2$;

(4) Sejam $\vec{p}, \vec{q}$ e $\vec{r}$ pontos no espaço que definem um triângulo A e sejam t_1, t_2 e $t_3 \in \mathbb{R}$. Se $t_1 + t_2 + t_3 = 1$, então o ponto $\vec{x} = t_1\vec{p} + t_2\vec{q} + t_3\vec{r}$ encontre-se no plano definido pelo triângulo A.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

Lembre que um vetor é perpendicular a um plano se ele é ortogonal a todos os vetores a esse plano. Lembre também que dois pontos definen um único vetor.

Sejam os pontos $\vec{x}$ e $\vec{y} \in A$, então o vetor $\vec{xy}$ esta no plano A. Logo da definição de A, temos

$$\vec{x}, \vec{y} = 10 \quad \text{e} \quad \vec{y}\vec{v} = 0.$$

Assim, $(\vec{y} - \vec{x}).\vec{v} = 0$, isto é $\overrightarrow{\vec{x}\vec{y}} = 0$.

① **Falso.**

Dado que $\vec{x}(t) = t\vec{v}$ e $\vec{x}(s,t) = s\vec{v} + t\vec{w}$ é para todo $s, t \in \mathbb{R}$, podemos considerar $t = s = 0$, então $\vec{x}(0) = 0$ e $\vec{x}(0,0) = 0$. Logo, a interseção da reta e o plano é diferente do vazio.

② **Falso.**

Dado que é para todos os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$, podemos considerar $\vec{v} = \vec{w} = 0$, então da hipótese $\vec{x}(s,t) = 0$ e $\vec{x}.(\vec{v} \times \vec{w}) = 0 = 2$ (contradição). Portanto, os planos não coincidem pelo menos para $\vec{v} = \vec{w} = 0$.

③ **Falso.**

Já que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares, temos $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u} = 0$. Então

$$\begin{aligned} ||\vec{u} - \vec{v}||^2 &= (\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) \\ &= \vec{u}.\vec{u} - \vec{u}\vec{v} - \vec{v}\vec{u} + \vec{v}\vec{v} \\ &= ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 \end{aligned}$$

④ **Verdadeiro.**

Da hipótese temos que $t = 1 - t_2 + t_3$, então

$$\vec{x} = (1 - t_2 - t_3)\vec{p} + t_2\vec{q} + t_3\vec{r} = t_2(\vec{q} - \vec{p}) + t_3(\vec{r} - \vec{p}) + \vec{p}.$$

Logo $\vec{x} = t_2\overrightarrow{PQ} + t_3\overrightarrow{pr} + \vec{p}$. Assim, o ponto $\vec{x}$ encontra-se no plano definido pelo triângulo A, já que os vetores $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{pr}$ pertence ao triângulo A.

Exercício 3 (ANPEC 2017, Questão 11)

Analise a veracidade das seguintes afirmações :

(0) Para que as retas $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ sejam perpendiculares deve-se cumprir $a_1a_2 + b_1b_2 = 1$;

(1) Para que as retas $a_1x+b_1y+c_1 = 0$ e $a_2x+b_2y+c_2 = 0$ se interceptem em um único ponto deve-se cumprir $a_1b_2 \neq a_2b_1$;

(2) Ao girar o vetor $(4, 2\sqrt{3})$ de um ângulo de 60^0 em sentido anti-horário resulta o vetor $(3\sqrt{3}, -1)$;

(3) A reta definida pelas equações $2x+3y+4z+5 = 0$ e $-x+2y-3z+4 = 0$ é perpendicular ao plano dado por $-17x + 2y + 7z + 10 = 0$;

(4) Para que a reta que passa por $(-1, -1)$ e tenha direção dada pelo vetor $(1, b)$ seja tangente à parábola $y = x^2$, o valor de b pode ser $0,82$ ou $-4,82$ (usando apenas duas casas decimais).

Solução

(0) **Falso.**

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad\qquad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

$$\vec{n}_1 = (a_1, b_1) \qquad\qquad \vec{n}_2 = (a_2, b_2)$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$$

(1) **Verdadeiro.**

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \text{ Denotemos } D = \left| \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 \end{pmatrix} \right|.$$

Se $D \neq 0 \Rightarrow$ existe uma única solução .

Se $D = 0 \Rightarrow$ existe infinitas soluções ou não existe solução .

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a_1b_2 \neq a_2b_1.$$

(2) **Falso.**

$$tg(\alpha) = 2\sqrt{3}/4$$

$$tg(\alpha + 60°) = \frac{tg(\alpha) + tg(60°)}{1 - tg(\alpha)tg(60°)} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{1}}{1 - \frac{2\sqrt{3}}{4}.\frac{\sqrt{3}}{1}} = \frac{-3\sqrt{3}}{1}$$

o ponto é $(-3\sqrt{3}, 1)$.

(3) **Verdadeiro.**

$$2x + 3y + 4z + 5 = 0$$

$$-x + 2y - 3z + 4 = 0$$

denotemos $x = \lambda$ então

$$2\lambda + 3y + 4z + 5 = 0 \tag{13.2.1}$$

$$-\lambda + 2y - 3z + 4 = 0 \tag{13.2.2}$$

$$3x(13.2.1) + 4(13.2.2) \Rightarrow 2\lambda + 17y + 31 = 0 \Rightarrow y = \frac{-31}{17} - \frac{2}{17}\lambda$$

$$2x(13.2.1) + 3(13.2.2) \Rightarrow 7\lambda + 17z - 2 = 0 \Rightarrow z = \frac{2}{17} - \frac{7}{17}\lambda$$

$$x = \lambda$$

$$\begin{array}{rcl} y = \frac{-31}{17} & - & \frac{2}{17}\lambda \\ z = \frac{2}{17} & - & \frac{7}{17}\lambda \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} \vec{a} & = & (1, \frac{-2}{17}, \frac{-7}{17}) \\ \vec{a} & = & (17, -2, -7) \\ \vec{a} & = & (-17, 2, 7) \end{array}$$

$\vec{a}$ é perpendicular a $-17x + 2y + 7z + 10 = 0$.

(4) **Verdadeiro.**

$X = p + t\vec{a}$

$(x, y) = (-1, -1) + t(1, b) \Rightarrow (x, y) = (-1 + t, -1 + tb)$

$x + 1 = \frac{y+1}{b}; \quad y = x^2$

$bx + b = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - bx + 1 - b = 0$

$b^2 - 4(1 - b) = 0 \quad \Rightarrow \quad b^2 + 4b - 4 = 0$

$$b = -4,82 \quad \text{ou} \quad b = 0,82.$$

Exercício 4 (ANPEC 2016, Questão 2)
Seja (x_0, y_0) o ponto da parábola $y = 2x^2 + 5$ que está mais próximo da reta $y = x$. Calcule $\frac{y_0}{x_0}$ e apresente como resposta a parte inteira desse valor.

Solução

Resposta 20

Exercício 5 (ANPEC 2015, Questão 1)
Considere os seguintes conjuntos: $U = \{(x, y) \in R_+^2 | xy \geq 150\}$ e $G = \{(x, y) \in R_+^2 | 2x + 3y \leq g\}$, em que $g \in R_+$. Analisar a veracidade das seguintes afirmações :

0. Se $g < 60$, então $U \cap G = \{\}$;
1. Se $g > 60$, então $U \cup G = R_+^2$;
2. Quando $g = 100$, o maior valor da abscissa x, em $U \cap G$, é 45;
3. Se $g = 60$, o conjunto $U \cap G$ é unitário;
4. Existe um valor de $g \in R_+$, para o qual $G \subseteq U$.

Solução

Preliminares
Grafiquemos os conjuntos C e G

FALTA FIGURA

0. **Verdadeiro.**
   Note na figura, para que a interseção entre $G \cap \cup \neq \phi$, as curvas $xy = 150$ e $2x + 3y = g$ tem que ter pelo menos um ponto de interseção . Para obter os pontos de interseção das curvas temos que resolver

$$\begin{cases} 5x + 2y = 0 \\ 3x + 10y = 22 \end{cases} \tag{13.2.3}$$

Assim, obtemos $3y - yg + 300 = 0$. Logo

$$y = \frac{g \pm \sqrt{g^2 - 4 \times 3 \times 300}}{2 \times 6}$$

Então, para que existe interseção entre as curvas tem que se cumprir $g^2 - 4 \times 3 \times 300 \geq 0$, assim $|g| \geq 60$.

Dado que trabalhamos com números positivos, temos $g \geq 60$. Portanto, se $g < 60$ então $G \cap \cup = \phi$.

1 **Falso.**
Da figura anterior, temos $\cup \cap G \neq R_+^2$ para todo $g > 60$.

2 **Verdadeiro.**
Para obter o maior valor da abcissa x temos que resolver o sistema (1), para $g = 100$. Assim, obtemos $x^2 - 50x + 225 = 0$. As soluções da equação anterior são $x = 5$ e $x = 45$, logo $x \in [5, 45]$. Portanto o maior valor de x, em $\cup \cap G$, é 45.

3 **Verdadeiro.**
Da figura 1, para que a interseção $\cup \cap G$ tenha um único elemento, as curvas $xy = 150$ e $2x + 3y = g$ tem que ter um ponto de interseção . Isto acontece, do item 0, se $g^2 - 4 \times 3 \times 300 = 0$, isto é $g = 60$.

4 **Falso.**
Da figura 1, para qualquer valor de $g \in R_+$, temos que $G \nsubseteq \cup$.

Exercício 6 (ANPEC 2013, Questão 2)
Dadas as retas $L_1 : 4x + 3y - 12 = 0$ e $L_2 : 3x + y - 6 = 0$, analise as seguintes afirmativas:

0 Um vetor unitário paralelo à reta L_1 é o $(-3/5, 4/5)$.

1 A equação da reta perpendicular a L_2, que passa pela interseção de L_1 e L_2, é $x - 3y + 6 = 0$.

② A equação da bissetriz do maior ângulo que formam L_1 e L_2 é $10x - 25y + 48 = 0$.

③ Um vetor perpendicular à reta L_2 é $(-3, 1)$.

④ A hipérbole equilátera, que tem como assíntotas os eixos coordenados e é tangente a L_1 e L_2, é $xy = 3$.

Solução

⓪ **Verdadeiro.**

Um vetor normal a reta L_1 é $\vec{n}_1 = (4, 3)$, então um vetor paralelo à reta L_1 é $\vec{a}_1 = (-3, 4)$. Logo, um vetor unitário paralelo à reta L_1 é

$$\frac{\vec{a}_1}{\| \vec{a}_1 \|} = \frac{(-3, 4)}{5} = \Big(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}\Big).$$

① **Verdadeiro.**

Primeiro calculemos a interseção das retas L_1 e L_2, para isto temos que resolver o sistema

$$\begin{cases} 4x + 3y - 12 & = & 0 \\ 3x + y - 6 & = & 0. \end{cases}$$

Então, a interseção de L_1 e L_2 é o ponto $(6/5, 12/5)$.

Um vetor perpendicular à reta L_2 é $(3, 1)$. Logo, a equação vetorial da reta paralela ao vetor $(2, 3)$ e que passa por o ponto $(6/5, 12/5)$ é dada por

$$(x, y) = (6/5, 12/5) + t(3, 1).$$

Da igualdade anterior, obtemos a equação cartesiana $x - 3y + 6 = 0$.

② **Falso.**

Seja a reta $L_3 : 10x - 25y + 48 = 0$. Então, os coeficientes angulares das retas L_1, L_2 e L_3 são $m_1 = -4/5$, $m_2 = -3$ e $m_3 = 2/3$, respectivamente. Suponhamos que L_3 é a equação da bissetriz do maior ângulo que formam L_1 e L_2, então o ângulo α das retas L_1 e L_3 é igual ao ângulo β das retas L_3 e L_2, isto é

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha) &= \tan(\beta) \\
\left|\frac{m_3 - m_1}{1 + m_3 m_1}\right| &= \left|\frac{m_3 - m_2}{1 + m_3 m_2}\right| \\
\frac{\left|\frac{2}{5} + \frac{4}{3}\right|}{\left|1 - \frac{2}{5}\frac{4}{3}\right|} &= \frac{\left|\frac{2}{5} + 3\right|}{\left|1 - \frac{2}{5} \times 3\right|} \\
\frac{26}{7} &= \frac{17}{1} \;\; \text{(Contradição !).}
\end{aligned}$$

Portanto, a reta L_3 não é bissetriz das retas L_1 e L_2.

3 **Falso.**
O vetor perpendicular à reta $3x + y - 6 = 0$ é $(3, 1)$.

4 **Verdadeiro.**
Se a hipérbole com uma reta tem um único ponto de interseção , então essa reta é tangente à hipérbole.
Calculemos a interseção da hipérbole $xy = 3$ e a reta $L_1 : 4x+3y-12 = 0$, então $4x^2 + 3yx - 12x = 0$, assim $4x^2 - 12x + 9 = 0$, logo $x = 3/2$ e $y = 2$. Agora calculemos a interseção da hipérbole $xy = 3$ e a reta $L_2 : 3x + y - 6 = 0$, então $3x^2 + xy - 6x = 0$, assim $3x^2 - 6x + 3 = 0$, logo $x = 1$ e $y = 3$.
Dado que a interseção da hipérbole com as retas L_1 e L_2 é um único ponto $(3/2, 2)$ e $(1, 3)$, respectivamente, podemos concluir que L_1 e L_2 são tangentes à hipérbole.

Exercício 7 (ANPEC 2012, Questão 3)

Julga as afirmativas

0 A equação da reta que passa por $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right)$ e é paralela à reta que passa por $(0, 3)$ e por $(5, 0)$ é $3x + 5y + 3 = 0$.

1 As circunferências C_1 de centro em $(0,0)$ e raio 1 e C_2 de centro em $(1,0)$ e raio 2 se interceptam num único ponto.

2 Os pontos $(1,1)$, $(2,3)$ e $(a,-8)$ pertencem a mesma reta se e somente se $a = \frac{7}{2}$.

3 Sejam $P = (3,-1,2)$ e $Q = (4,-2,-1)$. A equação do plano que passa por P e é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{PQ}$ é $x - y - 3z + 2 = 0$.

4 Sejam $m, k \in R$. Se os planos $2x+ky+3z-5 = 0$ e $mx-6y-6z+2 = 0$ são paralelos, então $k + m = -1$.

Solução

0 **Falso.**

$$p = (1/3, 2/5)$$
$$X = p + t\,\vec{a}$$

$$(x,y) = (1/3, 2/5) + t(5,-3) = (1/3 + 5t, 2/5 - 3t)$$
$$\frac{x - 1/3}{5} = \frac{-y + 2/5}{3} \Rightarrow 3x - 1 = -5y + 2 \Rightarrow 3x + 5y - 3 = 0.$$

1 **Verdadeiro.**

$$x^2 + y^2 = 1^2 \quad \text{e} \quad (x-1)^2 + y^2 = 2^2$$
$$(x-1)^2 + 1 - x^2 = 4$$
$$x^2 - 2x + 1 + 1 - x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \quad \wedge \quad y = 0.$$

2 **Falso.**

$(1,1)$, $(2,3)$ e $(a,-8)$

$\vec{a}_1 = (2,3) - (1,1) = (1,2)$; $\vec{a}_2 = (a,-8) - (1,1) = (a-1,-9)$

$\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$

$(1,2) = t(a-1,-9) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a-1} = \frac{-2}{9} \quad \Rightarrow \quad 9 = -2a + 2$

$a = \frac{-7}{2}$.

3 **Verdadeiro.**

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (4,-2,-1) - (3,-1,2) = (1,-1,-3)$$

$$\vec{n} = (1,-1,-3); \quad P = (3,-1,2); \quad \vec{n} \perp \text{ plano}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PX} \times \vec{n} &= 0 \\
\Big((x,y,z) - (3,-1,2)\Big)(1,-1,-3) &= 0 \\
(x-3, y+1, z-2)(1,-1,-3) &= 0 \\
x - 3 - y - 1 - 3z + 6 &= 0 \\
x - y - 3z + 2 &= 0 \\
x - y - 3z + 2 &= 0.
\end{aligned}$$

4 **Verdadeiro.**

$$\begin{matrix} 2x + ky + 3z - 5 = 0 \\ \vec{n}_1 = (2,k,3) \end{matrix} \quad \text{e} \quad \begin{matrix} mx - 6y - 6z + 2 = 0 \\ \vec{n}_2 = (m,-6,-6) \end{matrix}$$

$$(m,-6,-6) = t(2,k,3)$$

$$t = -2, \quad k = 3, \quad m = -4 \quad \Rightarrow \quad -4 + 3 = 1.$$

Exercício 8 (ANPEC 2011, Questão 2)

Considere as retas r_1 e r_2, no plano, definidas por

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

em que $n_1 = (a_1, b_1)$ e $n_2 = (a_2, b_2)$ são vetores não nulos ortogonais à r_1 e r_2, respectivamente. Denotamos por $d(P, r)$ a distância de um ponto P à uma reta r do plano. Julgue as afirmativas:

0 Se as retas r_1 e r_2 são perpendiculares, então $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

(1) Se $(1,1) \in r_1$ e r_1 é paralela à reta dada por $2x + 3y - 6 = 0$, então $(3,2) \in r_1$.

(2) Considere em r_1 os valores $c_1 = 0$ e $n_1 = (1,-1)$. Se pontos distintos $P = (3, y_1)$ e $Q = (3, y_2)$ são tais que $d(P, r_1) = d(Q, r_1) = \sqrt{2}$, então $y_1 + y_2 = 6$.

(3) As retas $y = x$, $y = 1$ e $y = -x + 2$ se interceptam formando um triângulo.

(4) Se $a_2 b_2 c_2 \neq 0$ e $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, então r_1 e r_2 representam a mesma reta.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

(1) **Falso.**

(2) **Verdadeiro.**Ver solução na página 189.

(3) **Falso.**

(4) **Verdadeiro.**

Exercício 9 (ANPEC 2010, Questão 8)

Julgue as afirmativas:

(0) Se $u = 2e_1 + e_2 - e_3$, então $\nu = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ é um vetor unitário, paralelo a u, em que $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ e $e_3 = (0,0,1)$;

(1) Sejam $u = (x,1,0)$, $\nu = (-2,y,3)$ e $w = (y,-1,-1)$, tais que u é perpendicular a ν e a w. Então $x^2 = 1/2$;

(2) Considere os pontos $P_1 = (x,1,0)$ e $P_2 = (-2,y,3)$. Se a distância de P_1 a P_2 é igual à distância de P_2 ao plano xy, então $x = 1$ e $y = -2$;

(3) Seja (a,b) um ponto na interseção da circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1 com a reta $y = 2x$. Então $a^2 = 1/2$;

(4) Seja r a reta tangente ao gráfico de $y = 2x^2 - 3x + 5$, no ponto $(1,4)$. A equação da reta perpendicular a r e que passa por $(-1,2)$ é $y = -x + 1$.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

A norma do vetor ν é

$$\|\nu\| = \sqrt{\left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1.$$

Assim, o vetor é unitário. também o vetor ν é paralelo a u, já que $\nu = \frac{-1}{3}u$.

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Falso.**

(3) **Falso.**

(4) **Verdadeiro.**

Derivando a função y temos $y' = 4x - 3$. Agora, a pendente da reta r é $y'(1) = 1$. Logo, a pendente da reta s perpendicular a reta, é -1. Assim, a equação da reta s que passa por $(-1, 2)$ é

$$-1 = \frac{y-2}{x+1},$$
$$y = -x + 1.$$

Exercício 10 (ANPEC 2004, Questão 1)

Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

(0) Para todos $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, se $a < b$ então $|a| < |b|$;

(1) $\left\{x \in \mathbb{R} \middle| \left|x - \frac{1}{2}\right| < 2\right\} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$;

(2) $\left\{x \in \mathbb{R} \middle| \left|x + 2\right| + \left|x - 4\right| < 6\right\} = \left(-2, 4\right)$;

(3) Se $\left\{(x, y) \in \mathbb{R} \middle| |x| + |y| < 1\right\}$ então $x + y > -1$;

(4) $\left\{x \in \mathbb{R} | 2 \cdot x^2 - 9 < 6 \cdot x - x^2\right\} = (0, 3)$.

Solução

(0) **Falso.**

(1) **Falso.**

(2) **Falso.**

(3) **Verdadeiro.**

(4) **Falso.**

Exercício 11 (ANPEC 2003, Questão 2)

Assinale V(verdadeiro) ou F(falso):

(0) A equação da reta que passa por $P_0(2,-1)$ e é perpendicular à reta que passa pelos pontos $P_1(2,-2)$ e $P_2(5,0)$ é $3x+2y=5$.

(1) As retas $a_0x+b_0y-c_0=0$ e $a_1x+b_1y-c_1=0$ interceptam-se caso $a_0a_1+b_0b_1=0$.

(2) Se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x_0 = 3+\lambda(x_0-2)$, $y_0 = 5+\lambda(y_0-3)$ e $z_0 = 4+\lambda(z_0-5)$, então o ponto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ está sobre a reta determinada por $P_1(2,3,5)$ e $P_2(3,5,4)$.

(3) Se a distância de ponto $P(x,y,z)$ ao ponto $Q(1,-2,0)$ é 5, então $x^2+y^2+z^2-2x+4y=20$.

(4) A equação do plano perpendicular ao plano $2x-3y+z-5=0$ e que passa pelos pontos $P_0(2,-6,4)$ e $P_1(3,-6,5)$ é $3x+y-3z=0$.

Solução

(0) **Falso.**

Seja L_1 a reta que passa por os pontos P_1 e P_2. Denotemos como L_2 a reta perpendicular à L_1. A pendente da reta L_1 é $m_1 = 2/3$, logo a pendente da reta L_2 é $m_2 = -3/2$. Dado que o ponto $P_0(2,-1)$ está na reta L_2, então a equação desta reta é

$$\frac{-3}{2} = \frac{y+1}{x-2}$$
$$3x+2y-4=0.$$

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Verdadeiro.**

(3) **Verdadeiro.**

(4) **Falso.**

Exercício 12 (ANPEC 2002, Questão 2)

Considere os planos π_1 e π_2 definidos pelas seguintes equações :

$\pi_1 : x - y + 2z = 3 \ \ e \ \ \pi_2 : 2x + 3y - z = 6$

Responda V (verdadeiro) ou F (falso):

(0) O vetor direção da reta interseção aos planos π_1 e π_2 é: $(1, 1, -1)$.

(1) A equação do plano passando pelo ponto $P(2, 1, 1)$ e perpendicular à reta interseção de π_1 com π_2 é: $x - y - z = 0$.

(2) A equação do plano contendo a reta interseção de π_1 com π_2 e o ponto $Q(1, -2, 1)$ é: $3x - y + 4z = 9$.

(3) O ponto sobre o plano π_1 que está à menor distância de $Q(1, -2, 1)$ tem coordenadas: $(2/3, 5/3, 1/3)$.

(4) A menor distância entre o ponto $Q(1, -2, 4)$ e o plano π_2 é: $\sqrt{14}$.

Solução

(0) **Falso.**

Seja L a reta interseção dos planos π_1 e π_2. Das equações dos planos π_1 e π_2 temos os vetores normais $\vec{n}_1 = (1, -1, 2)$ e $\vec{n}_2 = (2, 3, -1)$, respectivamente. O vetor direção da reta L é o produto vetorial dos vetores normais aos planos π_1 e π_2, isto é

$$\vec{n} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = s(-1, 1, 1).$$

Dado que $\vec{n} = s(-1, 1, 1)$ é vetor direção da reta L, então $\vec{m} = (-1, 1, 1)$ também é vetor direção .

(1) **Verdadeiro.**

Já que $\vec{m} = (-1, 1, 1)$ é vetor direção da reta L, então $\vec{m}$ é vetor normal ao plano (π_3) perpendicular à reta L. A equação normal do plano π_3 é

$$\overrightarrow{Px}.\vec{m} = 0,$$

logo

$$\begin{aligned} (X-P).(-1,1,1)&=0,\\ \Big((x,y,z)-(2,1,1)\Big).(-1,1,1)&=0,\\ x-y-z&=0. \end{aligned}$$

(2) **Verdadeiro.**
Da equação do plano $3x-y+4z=9$, temos $(3,1,4)\ (x,y,z) = (3,1,4)\ (1,-2,1)$, logo $(3,1,4)\Big((x,y,t)-Q\Big)=0$. Então $\vec{n}=(3,1,4)$ é o vetor normal ao plano anterior, e o ponto Q pertence ao plano. Note que $\vec{n}$ é normal à reta interseção de π_1 com π_2.

(3) **Falso.**
O ponto $(2/3, 5/3, 1/3)$ não está no π_1, dado que

$$\frac{2}{3}-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\neq 3.$$

(4) **Verdadeiro.**

Exercício 13 (ANPEC 2001, Questão 3)
Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

(0) O plano $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : -2x-5y+9z=15\}$ contém os pontos $(1,2,3)$, $(-1,1,2)$ e $(2,-2,1)$;

(1) O plano $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y+3z=12\}$ é ortogonal ao plano $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y-z=17\}$;

(2) A interseção dos três planos $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y+3z=4\}$, $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z=6\}$ e $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2x+3y+4z=10\}$ é o conjunto vazio;

(3) O plano $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y+3z=20\}$ é tangente à bola $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x-2)^2+(y-3)^2+z^2=11\}$ no ponto $(3,4,3)$;

(4) A distância entre os planos $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y+3z=12\}$ e o plano $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y+3z=13\}$ é menor do que 1(um).

Solução

(0) **Verdadeiro.**

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Falso.**

(3) **Falso.**

Para que o plano seja tangente à bola a interseção entre ele é um único ponto.

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 20 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 + z^2 &= 11 \end{aligned}$$

Para $z = 0$

$$\begin{aligned} x + 2y = 20 &\Rightarrow x = 20 - 2y \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 &= 11 \\ (18-2y)^2 + (y-3)^2 &= 11 \\ 18^2 - 4 \times 18y + 4y^2 + y^2 - 6y + 9 &= 11 \\ 5y^2 - 78y + 18^2 - 2 &= 0 \\ \Delta = 78^2 - 4(5)(18^2 - 2) &\neq 0 \end{aligned}$$

(4) **Verdadeiro.**

Seja $P = (2, 1, 2)$ um ponto ao plano $[x + 2y + 3z = 12]$.

Sejam o ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ e o plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$. A distancia de P e π, será dada por

$$\begin{aligned} d(P,\pi) &= \frac{|ax_0 + bv_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ d(P,\pi) &= \frac{|2 + 2 + 6 - 13|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}} < 1. \end{aligned}$$

Exercício 14 (ANPEC 2000, Questão 5)

Calcule a distância entre a origem $(0,0,0)$ e o ponto sobre a superfície $z^2 - xy = 1$ que lhe é mais próximo (da origem).

Solução

Resposta 1

Denotemos $\theta = (0,0,0)$ e $\vec{x} = (x,y,z)$ um ponto da superfície $z^2 - xy = 1$.

$$\begin{aligned} d(\theta, \vec{x}) &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + 1 + xy} \end{aligned}$$

derivando temos

$$\Delta d = (2x + y, 2y + x) = (0,0)$$

$$x = 0 \qquad \text{e} \qquad y = 0$$

$$d(\theta, \vec{x}) = 1.$$

Exercício 15 (ANPEC 1999, Questão 2)

Com relação à inequação:

$$2x^2 - 13x + 13 \leq (x-2)(x-3)$$

(0) O maior valor de x que a satisfaz é 4 e o menor é -2.
(1) O menor valor de x que a satisfaz é 1 e o maior é 5.
(2) É satisfeita para quaisquer valores de x compreendidos entre 1 e 7.
(3) Somente é satisfeita com x menor do que 13 ou maior do que 16.

Solução

(0) **Falso.**
(1) **Falso.**
(2) **Verdadeiro.**
(3) **Falso.**

Exercício 16 (ANPEC 1994, Questão 3)

Sejam os seguintes pontos:

A $= (\alpha, 4)$ B $= (-1, 2)$ C $= (4, -1)$ D $= (3, 1)$ E $= (\beta, 4)$

Determine α de tal modo que a reta contendo os pontos A e B seja perpendicular à reta contendo os pontos C e D. Em seguida, determine β de forma que a reta contendo E e B seja paralela à reta contendo C e D. Qual o valor de $(\alpha + \beta)$?

Solução

Resposta 1

Exercício 17 (ANPEC 1994, Questão 12)

Calcule a área compreendida entre as curvas:

$y - x = 0$; $y = 0$; $y + x - 6 = 0$ e $y - x + 4 = 0$.

Solução

Resposta 8

Exercício 18 (ANPEC 1994, Questão 13)

Assinale as proposições verdadeiras e as falsas:

0. A interseção das curvas $y - x + 2 = 0$, $y + x - 8 = 0$ e $y = 0$ forma um triângulo isósceles.
1. Dois pontos satisfazem as equações : $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 - 8 = 0$ e $x + y - 4 = 0$.
2. No espaço bi-dimensional (x, y) a distância entre os pontos (a, b) e (b, a) é $[2(b - a)^2]^{1/2}$.
3. A equação $x^2 + y^2 - 2x = 0$ representa um círculo cujo raio é dois.
4. As equações $a_1x + a_2y + a_3 = 0$ e $b_1x + b_2y + b_3 = 0$ contêm o ponto (x_0, y_0). Então, para uma dada constante c, a equação $(a_1x + a_2y + a_3) + c(b_1x + b_2y + b_3) = 0$ conterá o ponto (x_0, y_0).

Solução

(0) **Verdadeiro.**

Denotemos

$$L_1 : y - x + 2 = 0 \qquad L_2 : y + x - 8 = 0 \qquad L_3 : y = 0$$

(1) Interseção das retas L_1 e L_2

$$\begin{array}{r} y - x + 2 = 0 \\ y + x - 8 = 0 \end{array} \Rightarrow y = 3 \quad \text{e} \quad x = 5 \Rightarrow P_1 = (3, 5)$$

(2) Interseção das retas L_1 e L_3

$$\begin{array}{r} y - x + 2 = 0 \\ y = 0 \end{array} \Rightarrow y = 0 \quad \text{e} \quad x = 2 \Rightarrow P_2 = (0, 2)$$

(3)

$$\begin{array}{r} y + x - 8 = 0 \\ y = 0 \end{array} \Rightarrow y = 0 \quad \text{e} \quad x = 8 \Rightarrow P_3 = (0, 8)$$

(*) Distância dos pontos P_1 e P_2 $\sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$
(*) Distância dos pontos P_1 e P_3 $\sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$
(*) Distância dos pontos P_2 e P_3 $\sqrt{6^2} = 6$

(1) **Falso.**

$$\begin{array}{r} (x-4)^2 + (y-4)^2 - 8 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{array} \Rightarrow \quad x = 4 - y$$

$$\begin{aligned} (4 - y - 4)^2 + (y-4)^2 - 8 &= 0 \\ y^2 + y^2 - 8y + 16 - 8 &= 0 \\ 2y^2 - 8y + 8 &= 0 \\ y^2 - 4y + 4 &= 0 \\ y &= 2. \end{aligned}$$

(2) **Verdadeiro.**

$$\sqrt{(a-b)^2+(a-b)^2} = \sqrt{2(a-b)^2}$$

(3) **Falso (Gabarito é Verdadeiro).**

$$\begin{aligned} x-2x+y^2=0 \\ x-2x+1-1+y^2=0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2+y^2=1.$$

(4) **Verdadeiro.**

$$\begin{aligned} &a_1x_0+a_2y_0+a_3=0 \\ &b_1x_0+b_2y_0+b_3=0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad cb_1x_0+cb_2y_0+cb_3=0.$$

Exercício 19 (ANPEC 1993, Questão 2)

Indique quais das afirmativas abaixo sobre a equação $y^2 - x^2 = 1$ são verdadeiras e quais são falsas:

(0) A equação dada representa uma hipérbole.

(1) O gráfico da equação dada intercepta o eixo Ox nos pontos $(0,0)$ e $(0,-2)$.

(2) O gráfico da equação dada possui dois focos, nos pontos $(2,3)$ e $(2,-5)$.

(3) A reta $y = 1$ é tangente ao gráfico da equação dada.

(4) A reta $x = 1$ intercepta o gráfico da equação dada em dois pontos distintos.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

A cônica

$$Ax^2+Bx4+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

$0-4(1)(-1)>0$ Hipérbole.

1 **Falso.**

Interseção om o eixo OX.

Seja $y = 0$, então

$$x^2 = -1 \Rightarrow \text{ não existe } x \in \mathbb{R}|x^2 = -1|.$$

2 **Falso.**

$$c^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow c = \pm\sqrt{2}$$

$$FALTA\ \ FIGURA$$

3 **Verdadeiro.**

Interseção da reta e a superfície

$$y^2 - x^2 = 1$$
$$y = 1$$
$$x = 0.$$

4 **Verdadeiro.**

$$y^2 - x^2 = 1$$
$$x = 1$$
$$y^1 = 1 \Rightarrow y = \pm 1.$$

Exercício 20 (ANPEC 1992, Questão 2)

Dadas as duas esferas representadas respectivamente por: $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 4z + 20 = 0$ e $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 10z + 41 = 0$. Indique as afirmativas verdadeira ou falsas:

0 Ambas se situam inteiramente no primeiro octante.

1 Sua interseção define um círculo situado num plano horizontal. (paralelo a OXY).

2 O segmento de reta definido pelos seus centros é ortogonal ao eixo vertical. (OZ).

3 As esferas não se interceptam.

4 As esferas são concêntricas.

Solução

0 **Falso.**

Assim como os eixos coordenados em um sistema de coordenadas no plano cartesiano dividem o plano em quatro quadrantes, igualmente os planos coordenados em um sistema de coordenadas tridimensional dividem o espaço tridimensional em oito partes chamadas de octante: $(+,+,+)$ primeiro octante, $(-,+,+)$ segundo octante, $(-,-,+)$ terceiro octante, $(+,-,+)$ quarto octante, $(+,+,-)$ quinto octante, $(-,+,-)$ sexto octante, $(-,-,-)$ sétimo octante, $(+,-,-)$ oitavo octante. Das equações das esferas, completando quadrados temos

$$(x-3)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=3^2 \quad \text{e} \quad (x-3)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=3^2.$$

Note que $(3,4,-2)$ é um vetor da segunda esfera (última equação). Então a segunda esfera tem pontos no quinto octante.

1 **Verdadeiro.**

Sejam (x,y,z) os pontos de interseção das esferas, então

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2-6x-8y-4z+20&=0\\ -x^2-y^2-z^2+6x+8y+10z-41&=0. \end{aligned}$$

Somando as duas ultimas equações têm-se: $z=21/6$, esta equação é um plano paralela a OXY.

2 **Falso.**

Do item 0, e das equação das esferas temos os centros $(3,4,2)$ e $(3,4,5)$. Então, o segmento de reta $\vec{v}=(3,4,5)-(3,4,2)=(0,0,3)$, logo $\vec{v}$ é paralelo a eixo vertical (OZ).

(3) **Falso.**

Do item (1), as esferas se intersectam em um círculo situado num plano OXY.

(4) **Falso.**

Duas esferas são concsêntricas se tsêm o mesmo centro. Do item (0), temos os centros diferentes $(3,4,2)$ e $(3,4,5)$.

Exercício 21 (ANPEC 1992, Questão 3)

Determine a área do triângulo formado pelos pontos $a = (3,3,3)$, $b = (1,1,2)$, $c = (1,3,1)$.

Solução

Resposta

Exercício 22 (ANPEC 1991, Questão 3)

Analise os seguintes pares de retas e assinale se falsa ou verdadeira cada afirmação correspondente.

(0) $3x - 5y = 1$ e $2x + y = 2$ são perpendiculares.
(1) $2x + 7y = 1$ e $x - y = 5$ não são perpendiculares.
(2) $3x - 5y = 1$ e $5x + 3y = 7$ são perpendiculares.
(3) $-x + y = 2$ e $x + y = 9$ não são perpendiculares.
(4) $y - 2x = 3$ e $6x - 3y = 2$ são perpendiculares.

Solução

(0) **Falso.**

Sejam as retas $L : 3x - 5y = 1$ e $Q : 2x + y = 2$. Os vetores ortogonais para as retas L e Q são $\vec{n}_L = (3,-5)$ e $\vec{n}_Q = (2,1)$, respectivamente. O produto de $\vec{n}_L \times \vec{n}_Q = (3,-5) \times (2,1) = 1$, então $\vec{n}_L$ e $\vec{n}_Q$ não são perpendiculares, portanto L e Q não são perpendiculares.

(1) **Verdadeiro.**

Sejam as retas $L : 2x + 7y = 1$ e $Q : x - y = 5$. Os vetores ortogonais para as retas L e Q são $\vec{n}_L = (2, 7)$ e $\vec{n}_Q = (1, -1)$, respectivamente. O produto de $\vec{n}_L \times \vec{n}_Q = (2, 7) \times (1, -1) = -5$, então $\vec{n}_L$ e $\vec{n}_Q$ não são perpendiculares, portanto L e Q não são perpendiculares.

(2) **Verdadeiro.**

Sejam as retas $L : 3x - 5y = 1$ e $Q : 5x + 3y = 7$. Os vetores ortogonais para as retas L e Q são $\vec{n}_L = (3, -5)$ e $\vec{n}_Q = (5, 3)$, respectivamente. O produto de $\vec{n}_L \times \vec{n}_Q = (3, -5) \times (5, 3) = 0$, então $\vec{n}_L$ e $\vec{n}_Q$ são perpendiculares, portanto L e Q são perpendiculares.

(3) **Falso.**

Sejam as retas $L : -x + y = 2$ e $Q : x + y = 9$. Os vetores ortogonais para as retas L e Q são $\vec{n}_L = (-1, 1)$ e $\vec{n}_Q = (1, 1)$, respectivamente. O produto de $\vec{n}_L \times \vec{n}_Q = (-1, 1) \times (1, 1) = 0$, então $\vec{n}_L$ e $\vec{n}_Q$ são perpendiculares, portanto L e Q são perpendiculares.

(4) **Falso.**

Sejam as retas $L : y - 2x = 3$ e $Q : 6x - 3y = 2$. Os vetores ortogonais para as retas L e Q são $\vec{n}_L = (-2, 1)$ e $\vec{n}_Q = (6, -3)$, respectivamente. O produto de $\vec{n}_L \times \vec{n}_Q = (-2, 1) \times (6, -3) = -15$, então $\vec{n}_L$ e $\vec{n}_Q$ não são perpendiculares, portanto L e Q não são perpendiculares.

Exercício 23 (ANPEC 1991, Questão 9)

Calcule a distância entre os valores $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$ e $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Solução

A distância de A e B é $\|A - B\| = \|(8, 6) - (-4, -3)\| = \|(12, 9)\| = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$.

Exercício 24 (ANPEC 1991, Questão 11)

Sabendo-se que a $= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ é um vetor de plano $x + 2y + z = 0$ e que $a_1 + a_3 = -2$, determine a_2.

Solução

Como $a \in P : x+2y+z = 0$, então $a_1+2a_2+a_3 = 0$. Dado que $a_1+a_3 = -2$, das duas ultimas equações temos $a_2 = 1$.

CAPíTULO 14

Álgebra Linear

[1]

Neste capítulo trataremos resumidamente de várias noções de álgebra linear, como operações com matrizes, matriz inversa, transposta e adjunta, resolução de sistemas lineares, determinantes, regra de Cramer, espaços vetoriais e subespaços, base e dimensão, produto interno, ortogonalidade, projeções, transformações lineares, núcleo e imagem, matriz de uma transformação linear. Autovalores e autovetores, polinômios característicos, operadores diagonalizáveis, operadores auto-adjuntos, operadores ortogonais, e formas bilineares.

14.1. Questões ANPEC Trabalhadas

14.1.1. Matrizes, determinantes, matrizes inversas, regra de Cramer, sistemas lineares.

ANPEC 2021, Questão 13.

0 Se A, B e C são matrizes $n \times n$, sendo A e C invertíveis, e $0_{n\times n}$ representa a matriz $n \times n$ cujas entradas são todas iguais a zero, então a matriz $D, 2n \times 2n$, definida por

$$D = \begin{bmatrix} A & 0_{n\times n} \\ B & C \end{bmatrix},$$

é inversível.

Se a matriz D for invertível, então existem X, Y. W, Z, matrizes $n \times n$ tais que

$$\begin{bmatrix} A & 0_{n\times n} \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ W & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n\times n} & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n} & I_{n\times n} \end{bmatrix},$$

[1]Última Atualização: 23/08/2022

onde $I_{n\times n}$ é a matriz identidade $n \times n$. Multiplicando os blocos, obtemos

$$AX = I_{n\times n}, \qquad AY = 0_{n\times n}, \qquad BX + CW = 0_{n\times n}, \qquad BY + CZ = I_{n\times n}.$$

Então,

$$X = A^{-1}, \qquad Y = 0_{n\times n}, \qquad W = -C^{-1}BX = -C^{-1}BA^{-1},$$
$$Z = C^{-1}(I_{n\times n} - BY) = C^{-1}.$$

ANPEC 2017, Questão 2. Esta questão começa fornecendo algumas definições:

> Uma matriz $M \in R^{n\times n}$ é chamada idempotente se $M^2 = M$. Uma matriz $N \in R^{n\times n}$ é chamada nilpotente se existe un número inteiro positivo k tal que $N^k = 0$ (matriz com todas as entradas nulas).

A seguir avaliamos cada um dos quesitos.

> 0 O determinante de uma matriz nilpotente é zero;

A afirmativa é verdadeira pois

$$0 = \det(0) = \det(N^k) = (\det(N))^k.$$

> 1 Se $M \in R^{n\times n}$ é nilpotente, então existe um número inteiro r tal que
>
> $$(I - M)^{-1} = I + M + \cdots + M^r$$

Para confirmar a veracidade da afirmativa, basta multiplicar

$$\begin{aligned}(I - M)(I + M + \cdots + M^r) &= I + M + \cdots + M^r - M(I + M + \cdots + M^r)\\ &= I + M + \cdots + M^r - M - M^2 - \cdots - M^r - M^{r+1} = I - M^{r+1} = I.\end{aligned}$$

> 2 A soma de matrizes nilpotentes é uma matriz nilpotente;

Falso. Considere as sequintes matrizes nilpotentes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A soma destas matrizes $A + B = I$ é a matriz identidade, que não é nilpotente, pois $I^k = I$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, a soma de matrizes nilpotentes não é necessariamente nilpotente.

3 O determinante de uma matriz idempotente é sempre 1;

Falso. Note que se M é idempotente,

$$[\det(M)]^2 = \det(M^2) = \det(M)$$

e portanto $\det(M) = 1$ ou $\det(M) = 0$.

4 A matriz $M \in R^{n\times n}$ é idempotente se, e somente se, $(I - M)$ é idempotente.

Verdadeiro. Note que

$$(I - M)^2 = I - 2M + M^2$$

Então, se M é idempotente temos que

$$(I - M)^2 = I - 2M + M^2 = I - 2M + M = I - M,$$

e portanto $I - M$ é idempotente. De forma análoga, se $I - M$ é idempotente, então

$$I - M = (I - M)^2 = I - 2M + M^2,$$

i.e., $M = M^2$ é idempotente.

ANPEC 2015, Questão 4. A questão começa por definir uma matriz de Markov:

Uma matriz de Markov é uma matriz quadrada, que em cada entrada tem um número não negativo e a soma das entradas de qualquer coluna é igual a 1. A ordem de uma matriz de Markov é o número de linhas (ou colunas) dela.

Vamos agora avaliaar a veracidade daas afirmativas.

0 A soma de duas matrizes de Markov da mesma ordem é uma matriz de Markov;

Note que a identidade I é matriz de Markov, mas $2I = I + I$ não o é. Falso.

1 O produto de duas matrizes de Markov da mesma ordem é uma matriz de Markov;

Para ver que a afirmativa é verdadeira, basta supor que A e B sejam de Markov de ordem n, e definir $C = AB$. Então as entradas de C são não negativas (por serem produtos e somas de valores não negativos). Para checar que a soma das colunas de C resulta em 1, basta ver que $C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$ e portanto

$$\sum_{j=1}^{n} C_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ik}B_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\sum_{j=1}^{n} B_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} = 1,$$

onde usamos que a soma dos termos das colunas de A e B resultam em 1 por serem de Markov.

2 A inversa de uma matriz de Markov (quando ela exista) é também uma matriz de Markov;

Falso, e basta tomar o contraexemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0,1 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix},$$

de Markov. Mas

$$A^{-1} = \frac{1}{0,9}\begin{pmatrix} 0,9 & -0,1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

não é de Markov.

3 Se $M \in R^{n\times n}$ é uma matriz de Markov e $\nu \in R^{n\times 1}$ é um vetor de componentes não negativos que somam 1, então $M\nu \in R^{n\times 1}$ também é um vetor de componentes não negativos que somam 1;

Verdadeira, com resolução muito semelhante à da questão 1:

$$\sum_{j=1}^{n}(M\nu)_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} M_{jk}\nu_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{jk}\nu_k = \sum_{k=1}^{n}\nu_k\sum_{j=1}^{n} M_{jk} = \sum_{k=1}^{n}\nu_k = 1.$$

4 Se $\alpha \in [0,1]$ e $M, N \in R^{n\times n}$ são matrizes de Markov, então $\alpha M + (1-\alpha)N$ também é uma matriz de Markov.

Verdade, com resolução semelhante ao item anterior. Primeiro note que os termos de $\alpha M + (1-\alpha)N$ serão todos não negativos, pois $\alpha \in [0,1]$. Além disto,

$$\sum_{j=1}^{n}[\alpha M_{ij} + (1-\alpha)N_{ij}] = \alpha\sum_{j=1}^{n} M_{ij} + (1-\alpha)\sum_{j=1}^{n} N_{ij} = \alpha + (1-\alpha) = 1.$$

ANPEC 2007, Questão 3. Considere as seguintes informções.

Seja $\langle , \rangle$ o produto escalar usual de R^{n+1} e $V = V_1 \wedge \cdots \wedge V_n \in R^{n+1}$ o produto vetorial de vetores linearmente independente $V_1, \ldots, V_n \in R^{n+1}$. Por definição $\langle V, W\rangle = \det A_W$, em que

$$A_W = \begin{bmatrix} W \\ V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$$

é a matriz cujas linhas são os vetores $W, V_1, \ldots, V_n \in R^{n+1}$.

A definição de produto vetorial acima segue [**17**]. A seguir, julgue os itens abaixo.

0 $\langle V, V_i\rangle = 0$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Verdade. Note que

$$\langle V, V_i\rangle = \det A_{V_i} = \det \begin{bmatrix} V_i \\ V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = 0$$

pois há duas linhas repetidas na matriz.

1 $\det A_V \neq |V|^2$.

Falso, pois, por definição,

$$\det A_V = \langle V, V \rangle = |V|^2.$$

② $V \neq 0$.

Verdadeiro. Seja W um vetor que seja LI com respeito a $V_1, \ldots, V_n$. Então

$$\langle V, W \rangle = \det A_W = \det \begin{bmatrix} W \\ V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \neq 0$$

pois as linhas de A_W são LI. Se V fosse nulo, teríamos $\langle V, W \rangle = 0$, o que não ocorre.

③ $\det(A_V A_V^t) = |V|^2 \ \det(g_{ij})$, em que $g_{ij} = \langle V_i, V_j \rangle$.

Verdadeiro. Denotamos $\vec{V}$, etc, como sendo o vetor coluna de V, note que

$$A_V A_V^t = \begin{bmatrix} \vec{V}^t \\ \vec{V}_1^t \\ \vdots \\ \vec{V}_n^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{V} & \vec{V}_1 & \ldots & \vec{V}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\vec{V}|^2 & \vec{V}^t\vec{V}_1 & \ldots & \vec{V}^t V_n \\ \vec{V}_1^t\vec{V} & \vec{V}_1^t\vec{V}_1 & \ldots & \vec{V}_1^t V_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{V}_n^t\vec{V} & \vec{V}_n^t\vec{V}_1 & \ldots & \vec{V}_n^t V_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |\vec{V}|^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \vec{V}_1^t\vec{V}_1 & \ldots & \vec{V}_1^t V_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vec{V}_n^t\vec{V}_1 & \ldots & \vec{V}_n^t V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\vec{V}|^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & g_{11} & \ldots & g_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & g_{n1} & \ldots & g_{nn} \end{bmatrix}$$

onde usamos que $\vec{V}_i^t\vec{V} = 0$; ver item ①. Portanto, $\det(A_V A_V^t) = |\vec{V}|^2 \det(g_{ij})$.

④ $|V| = \sqrt{\det(g_{ij})}$.

Verdadeiro, pois

$$\det(A_V A_V^t) = \det(A_V)\det(A_V^t) = [\det(A_V)]^2 = |V|^4$$

onde usamos o item 1. Usando agora 3,

$$|\vec{V}|^2 \det(g_{ij}) = \det(A_V A_V^t) = |V|^4.$$

Portanto, $\det(g_{ij}) \geq 0$ e $|V| = \sqrt{\det(g_{ij})}$.

ANPEC 2002, Questão 6.

2 Seja I uma matriz identidade $n \times n$ e X uma matriz $n \times k$ com posto igual a k. Então, se $A = [I - X(X'X)^{-1}X']$ então A é simétrica de $\det(A'A) > \det(A)$.

Falso. A matriz A é de fato simétrica. Entretanto, tomando-se $k = n$ e $X = I$ a matriz identidade, temos $A = 0$ é a matriz nula. Portanto, $\det(A'A) > \det(A)$ não vale em geral.

3 Sejam A e B matrizes quadradas de mesma dimensão. Se $AB = BA$ então
$\det[(A+B)^2] = \det(A)^2 + 2\det(A)\det(B) + \det(B)^2$.

Falso. Considere matrizes 2×2 com $A = I$ e $B = -I$. Então $\det[(A+B)^2] = 0$ e

$$\det(A)^2 + 2\det(A)\det(B) + \det(B)^2 = 4,$$

pois $\det(-I) = 1$ em dimensão dois.

14.1.2. Espaços vetoriais, base, independência linear, dimensão. Lembre que que um conjunto de vetores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ dum espaço vetorial V é linearmente independente (LI) se

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k = 0 \implies \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

Ver página 35.

Para definição de um subespaço $W \subseteq V$ basta que

(1) $W \neq \emptyset$

(2) se $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ então $\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v} \in W$

Ver Seção 3.5.1.

ANPEC 2022, Questão 2. Nesta questão, V é um espaço vetorial, e pede-se para que afirmativas sejam checadas quanto a suas veracidades.

(0) Se $\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq V$ é um conjunto linearmente independente, então o conjunto $\{v_1 - v_3, v_2 - v_3, v_3\}$ também é linearmente independente.

Para checar se $\{v_1 - v_3, v_2 - v_3, v_3\}$ é linearmente independente, supomos que existam constante α_1, α_2, α_3 tais que

$$\alpha_1(v_1 - v_3) + \alpha_2(v_2 - v_3) + \alpha_3 v_3 = 0.$$

Então

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + (-\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3)v_3 = 0.$$

Como $\{v_1, v_2, v_3\}$ é LI, então $\alpha_1 = \alpha_2 = -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0$. Logo, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Portanto, o conjunto $\{v_1 - v_3, v_2 - v_3, v_3\}$ também é linearmente independente, e a afirmativa é verdadeira.

(1) Se W_1 e W_2 são subespaços vetoriais de V, então o conjunto $\{w_1 - w_2 : w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$ também é um subespaço vetorial de V.

Para checar a validade da afirmativa, defina $W = \{w_1 - w_2 : w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$. Veja que $W_1 \subseteq W$ e $W_2 \subseteq W$, e portanto W é não vazio. Além disto, sejam u, $v \in W$. Então

$$u = u_1 - u_2, \qquad v = v_1 - v_2,$$

para algum $u_1, v_1 \in W_1$ e $u_2, v_2 \in W_2$. Então, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$u + \alpha v = (u_1 - u_2) + \alpha(v_1 - v_2) = (u_1 + \alpha v_1) - (u_2 + \alpha v_2) \in W,$$

pois $u_1 + \alpha v_1 \in W_1$ e $u_2 + \alpha v_2 \in W_2$. Então a afirmativa é verdadeira.

(2) Para o caso em que $V = \mathbb{R}^3$, e A e B são duas matrizes reais 3×3, suponha que W_1 é o núcleo de A e W_2 é o núcleo de B.

Portanto, W_1 e W_2 são subespaços vetoriais de V, e o conjunto $\{w_1 + w_2 \in \mathbb{R}^3 : w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$ é o núcleo da matriz $A + B$.

Note que dado $W = \{w_1 + w_2 \in \mathbb{R}^3 : w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$, se $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$, então $w_1 + w_2 \in W$. Entretanto

$$(A + B)(w_1 + w_2) = A(w_1 + w_2) + B(w_1 + w_2) = Aw_2 + Bw_1,$$

e não há motivos para que esta soma resulte no vetor nulo. Tome, por exemplo, A sendo a matriz nula e B matriz identidade. Então os núcleos são $W_1 = \mathbb{R}^3$ e $W_2 = \{\vec{0}\}$. Neste caso, $W = \mathbb{R}^3$ não é o núcleo de $A + B = I$ (matriz identidade). A afirmativa é falsa.

3 Para o caso em que $V = \mathbb{R}^2$, qualquer elemento do conjunto $\{(x_1, x_2) \in V : x_1 - x_2 = 1\}$ pode ser expresso como a soma de (1,1) com algum elemento do conjunto $\{(x_1, x_2) \in V : x_1 - x_2 = 0\}$.

A afirmativa é falsa. Note, por exemplo, que $(1, 0) \in \{(x_1, x_2) \in V : x_1 - x_2 = 1\}$, mas se

$$(1, 0) = (1, 1) + (x_1, x_2),$$

então $(x_1, x_2) = (0, -1) \notin \{(x_1, x_2) \in V : x_1 - x_2 = 0\}$.

4 Para o caso em que V é o conjunto das matrizes reais 2×2, em que a soma entre matrizes e a multiplicação por escalares são feitas da forma padrão entrada a entrada, o subconjunto das matrizes reais do tipo $\begin{bmatrix} a & c \\ c & d \end{bmatrix}$ com $ad = 0$ não forma um subespaço vetorial de V.

Verdade, este subconjunto não forma um subespaço vetorial. De fato, as matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pertencem ao subconjunto, mas a soma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

não satisfaz $ad = 0$.

14.1.3. Produto interno, ortogonalidade, projeções. Ver revisão de produto interno e suas aplicações na Seção 3.6.

ANPEC 2021, Questão 3. Nesta questão, a seguinte afirmativa é proposta:

> 4 Considere $V = \mathbb{R}^n, n \geq 1$. É dada uma forma bilinear que associa a cada par de vetores $(v, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ o número real $\langle v, w \rangle$. Sabe-se que essa forma bilinear é um produto interno. Então a igualdade $\langle v_1 + v_2, w_1 + w_2 \rangle = \langle v_1, w_1 \rangle + \langle v_2, w_2 \rangle$ vale para quaisquer vetores $v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$.

A afirmativa é falsa. Deveria ocorrer

$$\begin{aligned} \langle v_1 + v_2, w_1 + w_2 \rangle &= \langle v_1, w_1 + w_2 \rangle + \langle v_2, w_1 + w_2 \rangle \\ &= \langle v_1, w_1 \rangle + \langle v_1, w_2 \rangle + \langle v_2, w_1 \rangle + \langle v_2, w_2 \rangle \neq \langle v_1, w_1 \rangle + \langle v_2, w_2 \rangle. \end{aligned}$$

em geral. Por exemplo, tome $v_1 = v_2 = w_1 = w_2 = u$. Então

$$\langle 2u, 2u \rangle = 4\langle u, u \rangle, \qquad \langle u, u \rangle + \langle u, u \rangle = 2\langle u, u \rangle.$$

ANPEC 2021, Questão 13.

> 4 A função $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 2x_1y_1 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 + 10x_2y_2$, em que $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$, satisfaz as propriedades de um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

A afirmativa é verdadeira. Note que a função pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} f(x, y) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2y_1 + 4y_2 \\ 4y_1 + 10y_2 \end{pmatrix} \\ &= 2x_1y_1 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 + 10x_2y_2. \end{aligned}$$

onde $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$. Um produto iterno em $\mathbb{R}^2$ tem que satisfazer

(1) $x \cdot x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$ com $x \neq (0, 0)$

(2) $x \cdot y = y \cdot x$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^2$

(3) $(\alpha x) \cdot y = \alpha(x \cdot y)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo x, $y \in \mathbb{R}^2$

(4) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ para todo x, y, $z \in \mathbb{R}^2$

Ver a definição 3.6.1.

Se A é uma matriz 2×2, veja que toda função da forma $f(x, y) = x^t Ay$ satisfaz os itens (2), (3), (4) acima. O item (1) é o único que não é claro. Considere então

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Temos que mostrar que $x^t AX > 0$ para todo vetor x não nulo. Das contas acima,

$$x^t AX = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_1 + 10x_2^2 = 2(x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2) = 2(x_1 + 2x_2)^2 + 2x_2^2 \geq 0.$$

Para a expressão acima se anular, temos que ter $(x_1 + 2x_2)^2 = 0$ e $x_2^2 = 0$, i.e., a expressão somente se anula se $x_1 = x_2 = 0$. Logo $f(x, x) > 0$ sempre que $x_1 \neq 0$ ou $x_2 \neq 0$.

A forma acima é correta, mas um pouco longa. Ela pode ser encurtada para quem tem noções de matrizes SPD (simétricas positivas definidas). Uma matriz A é SPD se for simétrica e se for positiva definida, i.e., $x^t Ax > 0$ sempre que $x \neq (0, 0)$.

Uma matriz simétrica é positiva definida se e somente se os autovalores de A forem todos positivos. Como a matriz A é simétrica, basta calcular seus autovalores e checar que são positivos:

$$(2 - \lambda)(10 - \lambda) - 16 = 0 \implies \lambda^2 - 12\lambda + 4 = 0.$$

Como o produto e a soma das raízes são positivos, então ambas as raízes são positivas.

14.1.4. Transformação linear, núcleo, imagem, representação matricial, posto. Vale a pena rever rapidamente o conceito de posto. Ver subseção 3.7.1 para detalhes. Definimos o posto de $T : V \to W$ como a dimensão de sua imagem:

$$\operatorname{posto} T = \dim \operatorname{Im}(T) \leq \dim W, \qquad \operatorname{posto} T = \dim V - \dim N(T) \leq \dim V,$$

onde usamos o Teorema da núcleo e da imagem. Se A é a matriz representando T, então o posto de A é o número de colunas LI de A, também chamado de *posto* *segundo colunas* de A. Analogamente, definimos o *posto segundo linhas* de A como sendo o número de linhas de A que sejam LI. Vale o seguinte resultado:

$$\text{posto segundo colunas} = \text{posto segundo linhas}.$$

Os espaços gerados pelas linhas e colunas são diferentes em geral, apenas suas dimensões são iguais.

Definimos também, a nulidade de um operador T ou de uma matriz A como sendo a dimensão de seu núcleo.

Note que há relação entre as dimensões do núcleo e imagem de uma transformação linear T e o posto e nulidade da matriz $[T]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}$ que representa esta transformação (em quaisquer bases $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$):

$$\dim \operatorname{Im}(T) = \text{posto}([T]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}), \qquad \dim N(T) = \text{nulidade de } ([T]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}).$$

Note que pelo Teorema 3.7.2 que

$$\dim N(T) = \text{nulidade de } ([T]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}) = \text{número de colunas de } [T]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} - \text{posto}([T]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}).$$

Outra forma de se definir posto de uma matriz é via sua forma escalonada. Dada uma matriz em forma escalonada, seu posto é igual ao número de linhas não nulas.

ANPEC 2021, Questão 13. Julgue a veracidade das seguintes afirmativas:

2 Considere uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que transforme o hiperplano $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$ na reta $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$, isto é, a imagem de A por T é B. Então qualquer ponto no hiperplano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\}$ é levado a um ponto na reta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$.

Verdadeiro. Seja

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \end{pmatrix}$$

a matriz que faz tal transformação linear. Como $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^t \in A$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^t \in A$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^t \in A$, as imagens $T\mathbf{e}_1$ e $T\mathbf{e}_2$ e $T\mathbf{e}_3$ estão em B. Mas todo ponto de

B é da forma $(\alpha, 1-\alpha)$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$. Isto quer dizer que

$$\begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{21} \end{pmatrix} = T\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 1-\alpha_1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} T_{12} \\ T_{22} \end{pmatrix} = T\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ 1-\alpha_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} T_{13} \\ T_{23} \end{pmatrix} = T\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ 1-\alpha_3 \end{pmatrix},$$

para $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ desconhecidos. Logo,

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 1-\alpha_1 & 1-\alpha_2 & 1-\alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Considere agora um ponto $\mathbf{p} = (x, y, z)$ onde $x + y + z = 0$. Este ponto pode ser escrito como $\mathbf{p} = (x, y, -x-y)$. Queremos mostrar que a soma das coordenadas de $T\mathbf{p}$ é zero:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\alpha_1 + y\alpha_2 + (-x-y)\alpha_3 \\ x(1-\alpha_1) + y(1-\alpha_2) + (1-\alpha_3)(-x-y) \end{pmatrix}.$$

Somando as coordenadas, obtemos

$$x\alpha_1 + y\alpha_2 + (-x-y)\alpha_3 + x(1-\alpha_1) + y(1-\alpha_2) + (1-\alpha_3)(-x-y) = 0.$$

3 O subespaço em $\mathbb{R}^3$ de dimensão 2 e que contém o conjunto $\left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$ e o vetor $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ tem como complemento ortogonal o conjunto $\left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : -\frac{x_1}{2} + x_2 - \frac{5x_1}{2} = 0\right\} \cap \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\right\}$.

Falso. Note que o conjunto

$$\left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : -\frac{x_1}{2} + x_2 - \frac{5x_1}{2} = 0\right\} \cap \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\right\}$$

é ortogonal ao vetor $(3, 2, 1)$. Mas este vetor não é ortogonal a $(1, 2, 3)$, e portanto não pode pertencer ao complemento ortogonal.

ANPEC 2019, Questão 14. Esta questão começa por apresentar as seguintes informações:

> Considere o operador linear definido por $T(x, y) = (x + y, x - y)$. Seja D a região do plano limitada pelas retas: $x + y = 1; x = 0; y = 0$.

A primeira afiurmativa a ser avaliada é a seguinte.

> (0) A matriz que representa o operador T é dada por $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

A afirmativa é falsa. De fato, temos

$$T(x, y) = (x + y, x - y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Logo, a matriz que representa o operador T é $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

> (1) A reta $x + y = 1$ é transformada por T em uma reta horizontal.

A afirmativa é falsa. Dado que $x + y = 1$, então $y = 1 - x$. Agora, aplicamos à transformação linear

$$T(x, 1 - x) = (1, 1 + 2x).$$

Portanto, a imagem $T(x, 1 - x) = (1, 1 + 2x)$ é uma reta vertical.

> (2) As retas $x = 0$ e $y = 0$ são transformadas por T em duas retas ortogonais.

A afirmativa é verdadeira. Note que

$$T(x, 0) = (x, x), \qquad T(0, y) = (y, -y),$$

que parametrizam as retas $y = x$ e $y = -x$. Como (x, x) e $(y, -y)$ são ortogonais para todos x, $y \in \mathbb{R}$, então as retas são ortogonais.

> (3) O operador T transforma a região D em um retângulo.

Uma transformação linear "levam retas em retas". Portanto, não é possível que T leva "três lados em quatro". Veja que

$$T(x,0) = (x,x), \qquad T(0,y) = (y,-y), \qquad T(x,1-x) = (1,2x-1),$$

que determina um triângulo.

(4) A área da região $T(D)$ é a metade da área de D.

A afirmativa é falsa. Do item anterior, a área da região D é $1/2$. A área da região $T(D)$ é 1. Logo, a área de D é a metade da área da região $T(D)$.

Na verdade, como o determinante de T é dois, a transformação "dobra" a área.

ANPEC 2018, Questão 12. As seguintes informações são fornecidas:

O conjunto $V = \mathbb{R}^3$ é um espaço vetorial sobre o corpo dos reais dotado com o produto interno usual (ou seja, dotado do produto interno $(x_1, x_2, x_3)\cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$).

Considere agora as afirmativas abaixo.

(1) Se os vetores ν_1, ν_2 e ν_3 geram V, e se $T : V \to V$ é um operador linear, então a imagem de T é gerado pelos vetores $T(\nu_1), T(\nu_2)$ e $T(\nu_3)$;

Verdadeiro, pois se $x = x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + x_3\nu_3$, então

$$T(x) = T(x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + x_3\nu_3) = x_1T(\nu_1) + x_2T(\nu_2) + x_3T(\nu_3).$$

Logo, todo elemento da imagem é combinação linear de $T(\nu_1), T(\nu_2)$ e $T(\nu_3)$

(3) Considere $U = \Re^2$ como um espaço vetorial e seja $A : V \to U$ aplicação linear. Neste caso, o núcleo de U tem dimensão maior ou igual a 1;

Este item foi anulado (seria por causa de conflito de notação $\Re$ e $\mathbb{R}$, ou por usar "núcleo de U" ao invés de "núcleo de A"?). Lembrando o Teorema do núcleo e da Imagem (Teorema 3.7.2), para $A : V \to U$, tem-se $\dim N(A) + \dim \operatorname{Im}(A) = \dim V = 3$. Logo

$$\dim N(A) = 3 - \dim \operatorname{Im}(A) = 3 - \dim \operatorname{Im}(T).$$

Como $\mathrm{Im}(A) \subseteq U$, que tem dimensão dois, então $\dim \mathrm{Im}(A) \leq 2$. Portanto,

$$\dim N(A) = 3 - \dim \mathrm{Im}(A) \geq 1.$$

A afirmativa é então verdadeira.

ANPEC 2017, Questão 4. As afirmativas a serem julgadas vêm a seguir.

0 Seja $\mathrm{T}:\mathrm{R}^{\mathrm{n}} \to \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ uma transformação linear. Se T é injetora, então T também é sobrejetora;

Verdadeiro. Pelo Teorema do núcleo e da Imagem (Teorema 3.7.2), $\dim N(T) + \dim \mathrm{Im}(T) = \dim \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$, e portanto,

$$\dim \mathrm{Im}(T) = n - 0 = n.$$

Logo, T é injetora.

2 Seja $\mathrm{T}:\mathrm{R}^{\mathrm{n}} \to \mathrm{R}^{\mathrm{m}}$ uma transformação linear tal que as colunas da matriz que a representa são linearmente independentes. Então o posto de T é m;

A afirmativa é falsa, no caso de $n < m$. Neste caso, o posto é no máximo n. Como contraexemplo, considere a transformação $\mathrm{R} \to \mathbb{R}^2$ induzida pela matriz $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Logo A tem uma coluna L.I., com posto de A é $1 \neq 2$.

3 Sob as mesmas condições do item anterior, podemos afirmar que existe um vetor $\mathrm{v} \neq 0$ tal que $\mathrm{Tv} = 0$;

A afirmativa é falsa. Considere o contraexemplo do item anterior, então $T(v) = (v, v)^t \neq (0, 0)$, para todo $v \neq 0$.

ANPEC 2013, Questão 04. Considere $\beta = \{\nu_1, \ldots, \nu_m\}$ um conjunto de vetores de R^n. Julgue as afirmações abaixo.

3 Se todos os vetores de conjunto β forem linearmente independentes, então o núcleo da matriz, cujas colunas são os elementos de β, é o subespaço nulo.

Verdadeiro. Note que se

$$A = \begin{bmatrix} \vec{\nu}_1 & \ldots & \vec{\nu}_m \end{bmatrix}$$

é a matriz cujas colunas são dadas pelos vetores $\vec{\nu}_1, \ldots, \vec{\nu}_m$, Então o núcleo de A é dado pelos vetores $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m$ tais que $A\vec{x} = \vec{0}$, i.e.,

$$\begin{bmatrix} \vec{\nu}_1 & \ldots & \vec{\nu}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, $x_1\vec{\nu}_1 + \cdots + x_m\vec{\nu}_m = \vec{0}$. Mas como $\beta = \{\nu_1, \ldots, \nu_m\}$ é conjunto LI, então $x_1 = \cdots = x_m = 0$. Logo, somente o vetor nulo pertence ao núcleo de A.

4 Se todos os vetores de conjunto β forem linearmente independentes, então o posto da matriz, cujas colunas são os elementos de β, é m.

Verdadeiro. Por definição, o posto da matriz A definida no item 3 é a dimensão de sua imagem. Como os m vetores são LI, a dimensão da imagem é m (em particular, note que $m \leq n$).

14.1.5. Resolução de sistemas lineares (existência, unicidade de soluções).

ANPEC 2016, Questão 8. Considere as seguintes informações.

Seja $A(x) = b$ um sistema de equações lineares, com A uma matriz de ordem $m \times n$ e b um vetor de ordem $m \times 1$.

As afirmações a seguir têm que ser avaliadas em relação ás suas veracidades.

0 Se A for uma matriz quadrada não nula com determinante nulo, então o sistema nunca tem solução;

A afirmativa é falsa. Basta considerar $m = n = 1$ e $A = 0$. Então o "sistema"

$$0x = 0$$

tem infinitas soluções.

1 Se A tiver posto máximo, então a solução do sistema é única;

O posto máximo de uma matriz $m \times n$ é o menor valor entre m e n.

A afirmativa é falsa. Considere, como contraexemplo, o sistema

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$. Então a matriz A tem posto máximo igual a 1, mas $\begin{pmatrix} -x & x \end{pmatrix}^t$ é solução para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, o sistema acima tem infinitas soluções.

2 Se, no item anterior, tivemos m < n, então a solução é única;

Falso. Basta ver contraexemplo de 1.

4 Se A for uma matriz diagonal com determinante $|A| \neq 0$, então a média geométrica de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é inversamente proporcional a $\sqrt[n]{|A|}$, em que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é solução do sistema.

A afirmativa é verdadeira. A média geométrica de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$. Como A é diagonal, a solução de $Ax = b$ é dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} & \cdots & \frac{b_n}{a_n} \end{pmatrix},$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são os elementos da diagonal de A. Logo, $|A| = a_1 a_2 \cdots a_n$, e a média geométrica da solução é dada por

$$\sqrt[n]{\frac{b_1}{a_1}\frac{b_2}{a_2}\cdots\frac{b_n}{a_n}} = \frac{\sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n}}{\sqrt[n]{a_1 a_2 a_n}} = \frac{\sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n}}{\sqrt[n]{|A|}}.$$

Então, de fato a média geométrica da solução é inversamente proporcional a $\sqrt[n]{|A|}$.

ANPEC 2012, Questão 4. Considere o seguinte.

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$ com entradas $a_{ij} \in R$.

3 Seja $b \in R^n$. Se $Ax = b$ possui infinitas soluções, então existe $c \in R^n$, tal que $Ax = c$ admite uma única solução.

A afirmativa é falsa. O motivo é que A possui um núcleo não trivial, i.e., $N(A) \neq \{0\}$. De fato, seja S o conjunto de soluções do sistema. Se $\bar{x}$ é tal que $A\bar{x} = b$, então $y - \bar{x} \in N(A)$ para todo $y \in S$. De fato,

$$A(y - \bar{x}) = Ay - A\bar{x} = b - b = 0.$$

Como S contém infinitos elementos, então $N(A)$ contém infinitos elementos.

Suponha agora que x resolve $Ax = c$. Então

$$A(x + z) = Ax + az = Ax = c$$

para todo $z \in N(A)$, e a solução não é única pois $N(A) \neq \{0\}$.

ANPEC 2011, Questão 5. Considere as seguintes informações.

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz real $n \times n$. Considere o sistema $Ax = b$ abaixo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

0 Se o posto de A é menor do que n, então o sistema não tem solução ou possui um número infinito de soluções.

Verdade. Lembre-se que $\operatorname{posto} A = \dim \operatorname{Im}(A)$. Então $\operatorname{posto} A < n$ implica que $\dim \operatorname{Im}(A) < n$, e portanto $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ não é sobrejetora. Então o sistema acima pode não ter solução. Mas pelo Teorema do núcleo e da imagem (Teorema (3.7.2)), o núcleo de A é não trivial pois

$$\dim N(T) = \dim \mathbb{R}^n - \dim \operatorname{Im}(T) = n - \dim \operatorname{Im}(T) > 0.$$

Como então $N(A) \neq \{0\}$, se o sistema tiver solução terá infinitas soluções.

(2) Se $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ e 0 é autovalor de A, então o sistema possui uma única solução.

Falso. Note que 0 é autovalor de A, então existe autovetor $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $A\hat{x} = 0\hat{x} = 0$. Logo $\hat{x} \in N(A)$ e $\hat{x} \neq 0$, por definição de autovetor. Logo, tanto $\hat{x}$ como 0 resolvem $Ax = 0$.

14.1.6. Autovalores, autovetores, diagonalização de matrizes.

14.1.6.1. *Autovalores, autovetores.* Relembrando a Seção 3.8, pela definição de autovalor λ e autovetor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ temos que

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$$

onde A é matriz $n \times n$. Chamamos $(\mathbf{x}, \lambda)$ de autopar. Note que tal sistema só tem solução se $P(\lambda) = 0$, onde definimos o polinômio característico $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Note que $P(A) = 0$. Como P é um polinômio, então $P(\lambda) = 0$ sempre tem soluções. Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ raízes de P não necessariamente distintas. Então podemos escrever

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_k).$$

Se quisermos considerar $\lambda_1 \neq \ldots \neq \lambda_k$ raízes distintas, então temos que levar em conta as *multiplicidades algébricas* e escrevemos

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \ldots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}.$$

A dimensão do espaço

$$E_{\lambda_j} = \{\mathbf{v} \in V : T\mathbf{v} = \lambda_j \mathbf{v}\}$$

é a chamada *multiplicidade geométrica* de λ_j.

ANPEC 2017, Questão 4. As afirmativas a serem julgadas vêm a seguir.

(1) Seja $T : R^2 \to R^2$ a transformação linear dada por $T(x, y) = (2x - 5y, x - 2y)$. Então existe um subespaço unidimensional V de R^2 tal que $TV \subset V$;

Suponha que tal espaço V exista, e seja $x \in V$ com $x \neq 0$. Como $Ax \in V$, então temos obrigatoriamente que ter $Ax = \lambda x$ para algum escalar λ, pois V é unidimensional. Logo, x tem que ser um autovalor.

Da transformação linear T, temos a seguinte matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

então $\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(-2-\lambda) + 5 = \lambda^2 + 1 = 0$. Logo, os autovalores são $\pm i$. Portanto, a única forma de termos $Ax = \lambda X$, é se x for vetor com componentes nos complexos, e nunca um vetor de R^2.

ANPEC 2018, Questão 12. As seguintes informações são fornecidas:

> O conjunto $V = \mathbb{R}^3$ é um espaço vetorial sobre o corpo dos reais dotado com o produto interno usual (ou seja, dotado do produto interno $(x_1, x_2, x_3)\cdot(y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$).

Considere agora as afirmativas abaixo.

> 0 Se $T : V \to V$ é um operador linear, então seu polinômio característico é de segundo grau;

Falso, pois T é aplicação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$, e pode ser representada por uma matriz 3×3. Seu polinômio característico é portanto de terceiro grau.

14.1.6.2. *Diagonalização de Matrizes.* Dizemos que uma matriz ou operador $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é *diagonalizável* se existe uma base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores. Uma forma de se definir matrizes diagonalizáveis, é exigir que sejam similares a uma matriz diagonal.

Dizemos que duas matrizes A e B são *similares* se existe uma matriz P invertível tal que $B = P^{-1}AP$. Pelo Teorema 3.8.1, matrizes similares têm o mesmo determinante, mesmo traço, mesmo polinômio característico, e mesmos autovalores.

Note que se a matriz A é diagonalizável e $D = P^{-1}AP$ é diagonal, então as colunas de P são exatamente os autovetores de A, e a diagonal de D os autovalores. Algumas propriedades interessantes vêm a seguir:

- Se os autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ são distintos, então os autovetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ correspondentes são LI
- Se os n autovalores forem distintos, então existe uma base de autovetores

- Se A é simétrica e $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então os autovetores correspondentes são ortogonais
- Se A é simétrica então existe base ortogonal de autovetores
- Se A é simétrica então seus autovalores são reais

ANPEC 2018, Questão 12. As seguintes informações são fornecidas:

> O conjunto $V = \mathbb{R}^3$ é um espaço vetorial sobre o corpo dos reais dotado com o produto interno usual (ou seja, dotado do produto interno $(x_1, x_2, x_3)\cdot(y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$).

Considere agora a afirmativa abaixo.

> 2 Se $T : V \to V$ é um operador linear auto-adjunto, então seus autovetores associados a autovalores diferentes são ortogonais;

A afirmativa é verdadeira pois se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ são autovalores com autovetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, então

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = T\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot T\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot \lambda_2\mathbf{v}_2.$$

Logo, $(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$. Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, segue-se que $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$.

ANPEC 2021, Questão 13.

> 1 matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$ é diagonalizável.

A afirmativa é falsa. Para ver isto, vamos primeiro calcular os autovalores:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 1 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{2} - \lambda & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (\frac{1}{2} - \lambda)[(-\frac{1}{2} - \lambda)(2 - \lambda) + \frac{3}{2}].$$

Logo o primeiro autovalor é $\lambda = 1/2$. Os outros autovalores resolvem $\lambda^2 - 3/2\lambda + 1/2 = (\lambda - 1/2)(\lambda - 1) = 0$. Logo, os autovalores são $\lambda = 1$ e $\lambda = 1/2$, sendo este último com multiplicidade algébrica dois. Para saber se existe uma base de autovetores, precisamos descobrir se há dois autovetores LI relacionados a $\lambda = 1/2$, i.e., precisamos descobrir a multiplicidade geométrica deste autovalor:

$$(A - \frac{1}{2}I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0} \implies \begin{cases} v_2 + 4v_3 = 0 \\ -v_2 + 3v_3 = 0 \\ -v_2 + 3v_3 = 0 \end{cases} \implies v_2 = v_3 = 0.$$

Logo, todo autovetor associado a $\lambda = 1/2$ é da forma $\alpha(1,0,0)^t$, onde α pode ser qualquer número real. A dimensão do autoespaço é portanto um, e não existe base de autovetores de A.

ANPEC 2015, Questão 15. Analise a veracidade da seguinte afirmação:

4 O núcleo da transformação definida por uma matriz $A \in R^{3\times 3}$ é $2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$, então essa matriz tem somente um autovalor não nulo.

Falso. Basta considerar a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Note que

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y - 3z \\ 2x + y - 3z \\ 2x + y - 3z \end{bmatrix}$$

Então, A tem o núcleo exatamente como descrito no enunciado. Se $\lambda \neq 0$ fosse autovalor com autovetor $\mathbf{p} = (x,y,z)$, então

$$\begin{bmatrix} 2x + y - 3z \\ 2x + y - 3z \\ 2x + y - 3z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

e então $x = y = z$. Mas então $\mathbf{p} = (x,x,x)$. Mas neste caso, $A\mathbf{p} = (0,0,0)^t$ e portanto todo autovetor pertence ao núcleo de A. Logo, todo autovalor é zero.

ANPEC 2014, Questão 6.

Considere a matriz cujas colunas são:

$$(0,5,1,0) \qquad (5,0,5,0), \qquad (1,5,0,5), \qquad (0,0,5,0).$$

Antes de resolver as questões, note que a matriz, que chamaremos de A, é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

0 A matriz tem pelo menos um autovalor que não é real.

Falso, pois a matriz é simétrica, e portanto todos autovalores são reais.

1 A soma dos autovalores é zero.

Verdade, pois a soma dos autovalores corresponde ao traço da matriz, que é zero.

2 A matriz tem inversa.

Verdade. Uma possível solução vem do cálculo do determinante. Mas uma ideia alternativa é ver se o núcleo da matriz é $\{0\}$. Para tal, considere $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ solução de $Ax = 0$. Então

(1) Da linha 4 tem-se $x_4 = 0$
(2) Da linha 1 tem-se $x_2 = 0$
(3) Da linha 3 tem-se $x_1 = 0$
(4) Da linha 2 tem-se $x_2 = 0$

Logo $x = 0$ é a única solução possível. Então a matriz é invertível.

3 A matriz tem 4 autovalores positivos.

Falso, pois pelo item 1, a soma dos autovalores é zero. Não é possível que todos autovalores sejam zero, pois a matriz é invertível (ver item 4).

4 A matriz tem um autovalor zero.

Falso, pois pelo item 2, a matriz é invertível, e portanto tem núcleo trivial igual a $\{0\}$. Se existisse autovalor nulo, o núcleo não seria trivial.

ANPEC 2008, Questão 2. Considere as seguintes informações.

> Se V o espaço vetorial das matrizes 2×2 identificado como R^4 de sorte que cada matriz $(a_{ij}) \in V$ seja identificada com o ponto $(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}) \in R^4$. Denote por $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4$ os autovalores do operador linear $T : V \to V$ dado por $T(A) = A^t$, em que A^t é a transporta da matriz A. Sejam $E, B, C, D \in V$ tais que $M = \begin{pmatrix} E & B \\ C & D \end{pmatrix}$ é a matriz, na base canônica de $V = R^4$, do operador linear $T : V \to V$.

Antes de considerar as afirmativas, note primeiramente que

$$V = \left\{ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} : \big(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}\big) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

O operador linear T satisfaz $T(A) = A^t$, i.e.

$$T\big(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}\big) = \big(a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22}\big).$$

Usando notação matricial, $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ (matriz 4×4) representa T e é tal que

$$M \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

Logo,

$$M \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad M \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad M \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad M \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Então

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A seguir, julgue as afirmativas abaixo.

0 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ e ($TA = A \Leftrightarrow A$ é simétrica).

Falso. Note que T preserva todas as matrizes simétricas, i.e., $T(A) = A$ se A for simétrica. Como o espaço das matrizes simétricas 2×2 é gerado por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ele tem dimensão três. Em termos de multiplicação por M, isto equivalke a dizer que $M\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$, $M\mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_4$ e $M\mathbf{v} = \mathbf{v}$ onde $\mathbf{v} = (0, 1, 1, 0)$. Logo, o autovalor $\lambda = 1$ tem multiplicidade geométrica três. O outro autovalor de M corresponde à operação

$$M \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Portanto -1 também é autovalor.

1 $|A|^2 = |T(A)|^2 = \lambda^2 |A|^2$, sempre que se tenha $T(A) = \lambda A$.

Verdadeiro. Sabemos pelo item 1 que os autovalores são -1 e 1 (este último com multiplicidade algébrica e geométrica três). Logo,

$$|T(A)|^2 = |\lambda A|^2 = \lambda^2 |A|^2 = |A|^2$$

sempre que A for autovetor.

2 $\lambda_1 = -1$ e ($TA = \lambda_1 A \Leftrightarrow A$ é anti-simétrica).

Verdadeiro. Do item 0 temos $\lambda_1 = -1$ é o menor autovalor. Agora provemos que $T(A) = -A$ se e somente se A é anti-simétrica.

Supondo $T(A) = -A$, segue-se da definição $T(A) = A^t$ que $A = -A^t$. Isto é, A é anti-simétrica. Supondo agora que $A = -A^t$, temos que $T(A) = A^t = -A$.

3 Traço $(M) = 0$ e $\det M = -1$.

Falso. O traço é a soma dos autovalores, e pelo item 0 tem-se $\mathrm{tr}(M) = 2$. (O determinante é de fato igual a -1).

4 $E + D$ é a matriz identidade de V.

Verdadeiro. Dado que $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, então $E+D$ é a matriz identidade.

ANPEC 2004, Questão 4. Considere a seguinte afirmativa, feita sem nenhuma informação adicional sobre a matriz X:

4 Se X é uma matriz inversível e simétrica, então seus autovetores são dois-a-dois ortogonais.

O gabarito aponta a afirmativa como verdadeira. Entretanto, considere a matriz identidade $n \times n$. Então todos os vetores do $\mathbb{R}^n$ são autovetores, e nem todos são ortogonais entre si. A afirmativa é portanto, falsa.

Uma afirmativa vedadeira seria que *existe uma base de autovetores ortogonais entre si*. Ou se a questão acrescentasse a informação que todos os autovalores são distintos, então a afirmativa seria verdadeira.

14.1.7. operadores ortogonais. Caso a inversa de uma matriz (ou operador) A seja igual à sua transposta, i.e., $A^{-1} = A^t$ (a notação A' para transposta também é utilizada), dizemos que A é ortogonal. Note que se A é ortogonal, então

$$(\det A)^2 = \det A \det A' = \det(AA') = \det I = 1,$$

e portanto $\det A = \pm 1$.

Segue-se da definição de matrizes ortogonais, que os seus vetores colunas e vetores linhas são ortonormais (ou seja, são ortogonais entre si e todos têm norma um). Finalmente, as afirmativas abaixo são todas equivalentes entre si:

- A é ortogonal
- A leva bases ortogonais em bases ortogonais
- $A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, para todo $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$
- A preserva normas, i.e., $\|A\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|$ para todo $\mathbf{u} \in V$.

ANPEC 2019, Questão 13. As seguintes informações são fornecidas.

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ como um operador linear em $\mathbb{R}^2$ e o produto interno entre $u = (u_1, u_2)$ e $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ definido por $u \cdot \nu = u_1\nu_1 + u_2\nu_2$.

Considere agora as afirmativas abaixo.

(0) A matriz A não corresponde a um operador ortogonal.

Falso. Basta tomar o produto

$$AA^t = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

para ver que A é ortogonal.

(1) O polinômio característico de A é $\lambda^2 - 2\lambda\ \cos(\theta) + 1$ e suas raízes são complexas se $\theta \neq 0$ (ou seja, envolvem uma raiz quadrada de um número negativo).

Falso. Para achar o polinômio caracaterístico, calculamos

$$\det \begin{pmatrix} \cos(\theta) - \lambda & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) - \lambda \end{pmatrix} = (\cos(\theta) - \lambda)^2 + \sin^2(\theta)$$
$$= \lambda^2 - 2\cos(\theta)\lambda + \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = \lambda^2 - 2\cos(\theta)\lambda + 1.$$

Suas raízes são dadas por

$$\cos(\theta) \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\cos^2(\theta) - 4} = \cos(\theta) \pm \sqrt{\cos^2(\theta) - 1} = \cos(\theta) \pm \sqrt{-\sin^2(\theta)}$$

que de fato são complexas sempre que $\sin(\theta) \neq 0$. Portanto, as raízes são reais se $\theta = k\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, e não somente para $k = 0$ como afirma a questão.

2 A é uma matriz de rotação, logo, para todo vetor $\nu \in \mathbb{R}^2$, temos que se o vetor $u = A\nu$, então $\|u\| = \|\nu\|$.

Verdade. Vimos no item 0 que a matriz é ortogonal, e portanto ela preserva normas:

$$\|\nu\|^2 = \nu \cdot \nu = \nu^t \nu = (Au)^t AU = u^t A^t Au = u^t u = \|u\|^2.$$

3 Sejam u e ν dois vetores com o mesmo comprimento (ou seja, $\|u\| = \|\nu\|$). Então $u \cdot Au = \nu \cdot A\nu$.

Verdade. Vimos no item 0 que a matriz é ortogonal, e portanto ela preserva produtos internos:

$$u \cdot Au = u \cdot u = \|u\|^2 = \|\nu\|^2 = \nu \cdot \nu = \nu \cdot A\nu.$$

4 Se $\theta = \frac{\pi}{4}$, então $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Falso. Podemos, é claro, substituir $\theta = \frac{\pi}{4}$ na matriz:

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e calcular

$$A^2 = 1/2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De forma mais elegante, podemos ver que como A é matriz rotação, duas rotações de $\pi/4$ corresponde a uma rotação de $\pi/2$, que não corresponde à identidade.

Finalmente, poderíamos ainda ver que se $A^2 = I_2$, então $A = A^{-1}$. Como A é ortogonal, então $A = A^{-1} = A^t$, e A seria simétrica, o que é falso para $\theta \neq k\pi$ e $k \in \mathbb{Z}$.

14.2. Questões ANPEC Resolvidas

Exercício 1 (ANPEC 2022, Questão 2)

Seja V um espaço vetorial sobre os números reais. Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas:

(0) Se $\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq V$ é um conjunto linearmente independente, então o conjunto $\{v_1 - v_3, v_2 - v_3, v_3\}$ também é linearmente independente.

(1) Se W_1 e W_2 são subespaços vetoriais de V, então o conjunto $\{w_1 - w_2 : w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$ também é um subespaço vetorial de V.

(2) Para o caso em que $V = \mathbb{R}^3$, e A e B são duas matrizes reais 3×3, suponha que W_1 é o núcleo de A e W_2 é o núcleo de B. Portanto, W_1 e W_2 são subespaços vetoriais de V, e o conjunto $\{w_1 + w_2 \in \mathbb{R}^3 : w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$ é o núcleo da matriz $A + B$.

(3) Para o caso em que $V = \mathbb{R}^2$, qualquer elemento do conjunto $\{(x_1, x_2) \in V : x_1 - x_2 = 1\}$ pode ser expresso como a soma de (1,1) com algum elemento do conjunto $\{(x_1, x_2) \in V : x_1 - x_2 = 0\}$.

(4) Para o caso em que V é o conjunto das matrizes reais 2×2, em que a soma entre matrizes e a multiplicação por escalares são feitas da forma padrão entrada a entrada, o subconjunto das matrizes reais do tipo $\begin{bmatrix} a & c \\ c & d \end{bmatrix}$ com $ad = 0$ não forma um subespaço vetorial de V.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

Para checar se $\{v_1 - v_3, v_2 - v_3, v_3\}$ é linearmente independente, supomos que existam constante α_1, α_2, α_3 tais que

$$\alpha_1(v_1 - v_3) + \alpha_2(v_2 - v_3) + \alpha_3 v_3 = 0.$$

Então

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + (-\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3)v_3 = 0.$$

Como $\{v_1, v_2, v_3\}$ é LI, então $\alpha_1 = \alpha_2 = -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0$. Logo, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Portanto, o conjunto $\{v_1 - v_3, v_2 - v_3, v_3\}$ também é linearmente independente.

1 **Verdadeiro.**

Para checar a validade da afirmativa, defina $W = \{w_1 - w_2 : w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$. Veja que $W_1 \subseteq W$ e $W_2 \subseteq W$, e portanto W é não vazio. Além disto, sejam u, $v \in W$. Então

$$u = u_1 - u_2, \qquad v = v_1 - v_2,$$

para algum $u_1, v_1 \in W_1$ e $u_2, v_2 \in W_2$. Então, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$u + \alpha v = (u_1 - u_2) + \alpha(v_1 - v_2) = (u_1 + \alpha v_1) - (u_2 + \alpha v_2) \in W,$$

pois $u_1 + \alpha v_1 \in W_1$ e $u_2 + \alpha v_2 \in W_2$.

2 **Falso.**

Note que dado $W = \{w_1 + w_2 \in \mathbb{R}^3 : w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$, se $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$, então $w_1 + w_2 \in W$. Entretanto

$$(A + B)(w_1 + w_2) = A(w_1 + w_2) + B(w_1 + w_2) = Aw_2 + Bw_1,$$

e não há motivos para que esta soma resulte no vetor nulo. Tome, por exemplo, A sendo a matriz nula e B matriz identidade. Então os núcleos são $W_1 = \mathbb{R}^3$ e $W_2 = \{\vec{0}\}$. Neste caso, $W = \mathbb{R}^3$ não é o núcleo de $A + B = I$ (matriz identidade).

3 **Falso.**

A afirmativa é falsa. Note, por exemplo, que $(1, 0) \in \{(x_1, x_2) \in V : x_1 - x_2 = 1\}$, mas se

$$(1, 0) = (1, 1) + (x_1, x_2),$$

então $(x_1, x_2) = (0, -1) \notin \{(x_1, x_2) \in V : x_1 - x_2 = 0\}$.

(4) **Verdadeiro.**

De fato, as matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pertencem ao subconjunto, mas a soma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

não satisfaz $ad = 0$. Então o subconjunto não forma um espaço vetorial.

Exercício 2 (ANPEC 2021, Questão 3)

Seja V um espaço vetorial sobre os números reais que contém pelo menos um subespaço vetorial de dimensão 1. Julgue como verdadeiras ou falsas as seguintes afirmativas:

(0) Se $v \in V$ não é o vetor nulo, então o subespaço vetorial de V gerado pelo conjunto $\{w \in V : w \neq v\}$ é diferente de V, ou seja, ele é um subespaço próprio de V.

(1) Se W_1 e W_2 são subespaços vetoriais de V, então tanto a união $W_1 \cup W_2$ quanto a interseção $W_1 \cap W_2$ são também subespaços vetoriais de V.

(2) O conjunto de todas as matrizes de números reais 2×2 invertíveis, acrescido da matriz nula, em que a soma de seus elementos e a multiplicação por escalares são feitas da forma padrão componente a componente, não é um exemplo de espaço vetorial V.

(3) Se $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \subseteq V$ é um conjunto de vetores linearmente independentes, e $w \in V$ não pertence ao subespaço gerado pelos vetores em A, então $A \cup \{w\}$ é um conjunto linearmente independente de vetores.

(4) Considere $V = \mathbb{R}^n, n \geq 1$. É dada uma forma bilinear que associa a cada par de vetores $(v, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ o número real $\langle v, w \rangle$. Sabe-se que essa forma bilinear é um produto interno. Então a igualdade $\langle v_1 + v_2, w_1 + w_2 \rangle = \langle v_1, w_1 \rangle + \langle v_2, w_2 \rangle$ vale para quaisquer vetores $v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$.

Solução

(0)

(1)

(2)

(3)

(4) **Falso.**

Considere $V = \mathbb{R}^n, n \geq 1$. É dada uma forma bilinear que associa a cada par de vetores $(v, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ o número real $\langle v, w \rangle$. Sabe-se que essa forma bilinear é um produto interno. Então a igualdade $\langle v_1 + v_2, w_1 + w_2 \rangle = \langle v_1, w_1 \rangle + \langle v_2, w_2 \rangle$ vale para quaisquer vetores $v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$.

A afirmativa é falsa. Deveria ocorrer

$$\begin{aligned}\langle v_1 + v_2, w_1 + w_2 \rangle &= \langle v_1, w_1 + w_2 \rangle + \langle v_2, w_1 + w_2 \rangle \\ &= \langle v_1, w_1 \rangle + \langle v_1, w_2 \rangle + \langle v_2, w_1 \rangle + \langle v_2, w_2 \rangle \neq \langle v_1, w_1 \rangle + \langle v_2, w_2 \rangle.\end{aligned}$$

em geral. Por exemplo, tome $v_1 = v_2 = w_1 = w_2 = u$. Então

$$\langle 2u, 2u \rangle = 4\langle u, u \rangle, \qquad \langle u, u \rangle + \langle u, u \rangle = 2\langle u, u \rangle.$$

Exercício 3 (ANPEC 2021, Questão 13)

Julgue a veracidade das seguintes afirmativas:

(0) Se A, B e C são matrizes $n \times n$, sendo A e C invertíveis, e $0_{n\times n}$ representa a matriz $n \times n$ cujas entradas são todas iguais a zero, então a matriz $D, 2n \times 2n$, definida por $D = \begin{bmatrix} A & 0_{n\times n} \\ B & C \end{bmatrix}$, é inversível.

(1) A matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$ é diagonalizável.

(2) Considere uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que transforme o hiperplano $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$ na reta $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$, isto é, a imagem de A por T é B. Então qualquer

ponto no hiperplano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ é levado a um ponto na reta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$.

(3) O subespaço em $\mathbb{R}^3$ de dimensão 2 e que contém o conjunto $\left\{x \in \mathbb{R}^3 : x = t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}\right\}$ e o vetor $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ tem como complemento ortogonal o conjunto $\left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : -\frac{x_1}{2} + x_2 - \frac{5x_1}{2} = 0\right\} \cap \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\right\}$.

(4) A função $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 2x_1y_1 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 + 10x_2y_2$, em que $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$, satisfaz as propriedades de um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Solução

(0) **Verdadeiro.** Se a matriz D for invertível, então existem X, Y. W, Z, matrizes $n \times n$ tais que

$$\begin{bmatrix} A & 0_{n\times n} \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ W & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n\times n} & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n} & I_{n\times n} \end{bmatrix},$$

onde $I_{n\times n}$ é a matriz identidade $n\times n$. Multiplicando os blocos, obtemos

$$AX = I_{n\times n}, \qquad AY = 0_{n\times n}, \qquad BX + CW = 0_{n\times n}, \qquad BY + CZ = I_{n\times n}.$$

Então,

$$X = A^{-1}, \qquad Y = 0_{n\times n}, \qquad W = -C^{-1}BX = -C^{-1}BA^{-1},$$
$$Z = C^{-1}(I_{n\times n} - BY) = C^{-1}.$$

(1) **???.**

(2) **???.**

(3) **???.**

(4) **???.**

Exercício 4 (ANPEC 2020, Questão 7)

Dado um número real $r \in \mathbb{R}$, considere as matrizes

$$A_r = \begin{pmatrix} 1 & r & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{35} & 3/\sqrt{14} \\ 0 & 5/\sqrt{35} & 2/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{35} & -1/\sqrt{14} \end{pmatrix}$$

(0) A equação característica de A_r é $(1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-3(1+r)) = 0$.

(1) Todos os autovalores associados à matriz A_r são números reais se, o somente se, $r = 3$.

(2) Os autovalores da matriz A_3 são $-4, 1$ e 3.

(3) As colunas da matriz B são autovetores da matriz A_3.

(4) O produto das matrizes $B^t A_3 B$ é igual à matriz $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

Dado que $A_r x = \lambda x$, então $(A_r - \lambda I) = 0$, logo

$$\det(A_r - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & r & 0 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-3(1+r)) = 0.$$

(1) **Falso.**

(i) $(\Rightarrow)$ Todos os autovalores associados à matriz A_r são números reais então $r = 3$ (Falso).

Considere o seguinte contraexemplo. Para $r = 1$, os autovalores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = -3$ são números reais.

(ii) $(\Leftarrow)$ Se $r = 3$ então todos os autovalores associados à matriz A_r são números reais (Verdadeiro). Demonstração: Para $r = 3$ temos a seguinte equação $(1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-12) = 0$, onde os autovalores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda = -4$ são números reais.

$$F \Longleftrightarrow V$$

F.

(2) **Verdadeiro.**
Ver item (1).

(3) **Verdadeiro.**
Do item (2), os autovalores de A_3 são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda = -4$.

(i) Para $\lambda_1 = 1$, temos o seguinte sistema de equações

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

resolvendo o sistema de equações, temos $x_2 = 0$ e $x_3 = 3x_1$. Então para $x_1 = 1/\sqrt{10}$, obtemos $(x_1, x_2, x_3) = (1/\sqrt{10}, 0, 3/\sqrt{10})$ o qual é a primeira coluna da matriz B.

(ii) Para $\lambda_2 = 3$, temos o seguinte sistema de equações

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

resolvendo o sistema de equações, temos $x_2 = 2x_1/3$ e $x_3 = -x_1/3$. Então para $x_1 = 3/\sqrt{14}$, obtemos

$$(x_1, x_2, x_3) = (3/\sqrt{14}, 2/\sqrt{14}, -1/\sqrt{14}),$$

que é a terceira coluna da matriz B.

(iii) Para $\lambda_3 = -4$, temos o seguinte sistema de equações

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema de equações, temos $x_1 = -3x_2/5$ e $x_3 = x_2/5$. Então para $x_2 = 5/\sqrt{35}$, obtemos

$$(x_1, x_2, x_3) = (-3/\sqrt{35}, 5/\sqrt{35}, 1/\sqrt{35}),$$

que é a segunda coluna da matriz B.

(4) **Falso.**

Exercício 5 (ANPEC 2019, Questão 6)
Considere a equação do plano

$$p(s,t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e a equação da reta

$$r(u) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} u.$$

Além disto, considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 0 & -1 & -b \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -a \\ 0 & -1 & -b \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & -b \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad N_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

cujos determinantes são: $\det A = -a$, $\det N_1 = b + a$, $\det N_2 = -b$ e $\det N_3 = 1$. Com base nestas informações, indique quais dos itens abaixo são verdadeiros e quais são falsos:

(0) Se $a = 2$ e $b = 1$, então A é uma matriz não-singular.

(1) Se $a = b$, então a equação

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 0 & -1 & -b \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

tem infinitas soluções.

(2) Segundo a Regra de Cramer, a solução para o sistema de equações lineares

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 0 & -1 & -b \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

é

$$x_1 = \frac{\det N_3}{\det A}, \qquad x_2 = \frac{\det A}{\det N_2}, \qquad x_3 = \frac{\det N_1}{\det A}.$$

(3) Os parâmetros s, t e u, para os quais o plano $p(s,t)$ se encontra com a reta $r(u)$, satisfazem a equação $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 0 & -1 & -b \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(4) Se $a = 0$, então o plano $p(s,t)$ e a reta $r(u)$ não se interceptam.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

(1) **Falso.**

(2) **Falso.**

(3) **Verdadeiro.**

(4) **Verdadeiro.**

Exercício 6 (ANPEC 2019, Questão 13)

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ como um operador linear em $\mathbb{R}^2$ e o produto interno entre $u = (u_1, u_2)$ e $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ definido por $u \cdot \nu = u_1\nu_1 + u_2\nu_2$. Classifique os itens como falsos ou verdadeiros:

(0) A matriz A não corresponde a um operador ortogonal.

(1) O polinômio característico de A é $\lambda^2 - 2\lambda \ \cos(\theta) + 1$ e suas raízes são complexas se $\theta \neq 0$ (ou seja, envolvem uma raiz quadrada de um número negativo).

(2) A é uma matriz de rotação, logo, para todo vetor $\nu \in \mathbb{R}^2$, temos que se o vetor $u = A\nu$, então $\| u \| = \| \nu \|$.

(3) Sejam u e ν dois vetores com o mesmo comprimento (ou seja, $\| u \| = \| \nu \|$). Então $u \cdot Au = \nu \cdot A\nu$.

(4) Se $\theta = \frac{\pi}{4}$, então $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solução

Ver resolução da página 250

(0) **Falso**

(1) **Falso**

(2) **Verdadeiro**

(3) **Verdadeiro**

(4) **Falso**

Exercício 7 (ANPEC 2019, Questão 14)

Considere o operador linear definido por $T(x, y) = (x + y, x - y)$. Seja D a região do plano limitada pelas retas: $x + y = 1; x = 0; y = 0$. Julgue as seguintes afirmativas:

(0) A matriz que representa o operador T é dada por $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(1) A reta $x + y = 1$ é transformada por T em uma reta horizontal.

(2) As retas $x = 0$ e $y = 0$ são transformadas por T em duas retas ortogonais.

(3) O operador T transforma a região D em um retângulo.

(4) A área da região $T(D)$ é a metade da área de D.

Solução

(0) **Falso.**

Da hipótese, temos

$$T(x, y) = (x + y, x - y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Logo, a matriz que representa o operador T é $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(1) **Falso.**

Dado que $x + y = 1$, então $y = 1 - x$. Agora, aplicamos à transformação linear $T(x, 1 - x) = (1, 1 + 2x)$. Portanto, a imagem $T(x, 1 - x) = (1, 1 + 2x)$ é uma reta vertical, ver figura abaixo.

FALTA FIGURA

(2) **Verdadeiro.**

Aplicando $(0, y)$ na transformação linear T, temos $T(0, y) = (y, -y) = y(1, -1)$. Da mesma forma para os pontos $(x, 0)$, obtemos $T(x, 0) = (x, x) = x(1, 1)$. A equação $T(0, y) = y(1, -1)$ é a equação vetorial da reta com vetor direção $(1, -1)$. A equação $T(x, 0) = x(1, 1)$ é a equação vetorial da reta com vetor direção $(1, 1)$. Dado que o produto escalar, dos vetores direções, é $(1, -1)(1, 1) = 0$, portanto as retas são ortogonais.

(3) **Falso.**

Denotemos $T(x, y) = (x+y, x-y) = (u, v|$, então $u = x+y$ e $v = x-y$. Das duas equações anteriores temos $x = (u+v)/2$ e $y = (u-v)/2$. Dado $u = x + y$ e $x + y = 1$, então $u = 1$. Para $x = 0$, obtemos $u + v = 0$, já que $x = (u + v)/2$. Para $y = 0$ e dado que $y = (u - v)/2$, obtemos $u - v = 0$. A seguir graficamos as regiões D e $T(D)$.

FALTA FIGURA

Portanto, o operador T transforma a região D em um triângulo.

(4) **Falso.**
Do item anterior, a área da região D é $1/2$. A área da região $T(D)$ é 1. Logo, a área de D é a metade da área da região $T(D)$.

Exercício 8 (ANPEC 2018, Questão 6)
Classifique as afirmações abaixo segundo a sua veracidade:

(0) Considere o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 0, \\ 3x + 10y = 22. \end{cases}$$

Como solução deste sistema, temos que $x = -1$ e que y é positivo;

(1) Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, e seja $x = (x_1, x_2)^T$ uma matriz coluna. Neste caso, temos que a equação $(AB)x = (2, 2)^T$ tem infinitas soluções;

(2) Considere as equações $\sum_{k=1}^{2} kx_k = 1$ e $\sum_{k=1}^{2} k^2 x_k = 2$. Então, $x_1 = x_2 = 1$ é solução do sistema formado por estas equações;

(3) Considere a matriz A 4×4, a matriz coluna $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ e a equação $Ax = b$. Considere que b e que a inversa de A são:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Então, a solução será $x = (1, 2, 3, 0)$;

(4) Se uma matriz tem inversa, então ela é singular.

Solução

0 **Verdadeiro.**

Obtendo uma matriz ampliada, que reduzimos a uma forma triangular superior:

$$\left(\begin{array}{cccc} 5 & 2 & : & 0 \\ 3 & 10 & : & 22 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2/5 & : & 0 \\ 3 & 10 & : & 22 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2/5 & : & 0 \\ 0 & 44/5 & : & 22 \end{array}\right).$$

Logo obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} x + \dfrac{2}{5}y = 0 \\ \quad \frac{44}{5}y = 22. \end{cases}$$

Usando a segunda equação obtemos $y = \frac{5}{2}$.
finalmente $x = -1$.

1 **Falso.**

Multiplicando as matrizes A e B, temos

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Do produto de matriz AB temos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} 1x + 4y = 2 \\ 2x + 8y = 2 \end{cases}$$

denotemos a determinante de AB por

$$det(AB) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = 0.$$

Observação: Se $\det(AB) \neq 0$ então o sistema tem uma única solução, se $\det(AB) = 0$ então o sistema tem infinitas soluções ou não tem solução. Como $\det(AB) = 0$ então o sistema tem infinitas soluções ou não tem solução.

Dado que $\frac{1}{2} = \frac{4}{8} \neq \frac{2}{2}$ então o sistema não tem solução. Para que o sistema tenha infinitas soluções, os três parâmetros tem que ser iguais.

(2) **Falso.**

Duas equações $\sum_{k=1}^{2} kx_k = 1$ e $\sum_{k=1}^{2} k^2 x_k = 2$, juntamos o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} 1x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 1x_1 + 4x_2 &= 2. \end{aligned}$$

A seguir vamos efetuar algumas transformações elementares nas linhas da matriz ampliada

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & : & 1 \\ 1 & 4 & : & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & : & 1 \\ 0 & 2 & : & 1 \end{pmatrix}.$$

Voltando a forma de equações, temos da última linha que $x_2 = 1/2$. Da primeira linha obtemos $x = 0$.

(3) **Verdadeiro.**

Da equação $Ax = b$, obtemos $x = A^{-1}b$. Multiplicando as matrizes A^{-1} e B temos

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = x.$$

(4) **Falso.**

As matrizes são singulares se forem matrizes quadradas e se seu determinante for igual a zero.

Seja a matriz identidade $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, onde $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e a determinante $det(A) \neq 0$. então A não é singular.

Exercício 9 (ANPEC 2018, Questão 12)

Verifique a veracidade das questões abaixo, considere que o conjunto $V = \mathbb{R}^3$

é um espaço vetorial sobre o corpo dos reais dotado com o produto interno usual (ou seja, dotado do produto interno $(x_1, x_2, x_3)\cdot(y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$):

(0) Se $T : V \to V$ é um operador linear, então seu polinômio característico é de segundo grau;

(1) Se os vetores ν_1, ν_2 e ν_3 geram V, e se $T : V \to V$ é um operador linear, então a imagem de T é gerado pelos vetores $T(\nu_1), T(\nu_2)$ e $T(\nu_3)$;

(2) Se $T : V \to V$ é um operador linear auto-adjunto, então seus autovetores associados a autovalores diferentes são ortogonais;

(3) Considere $U = \Re^2$ como um espaço vetorial e seja $A : V \to U$ aplicação linear. Neste caso, o núcleo de U tem dimensão maior ou igual a 1;

(4) É possível achar 4 vetores em V, diferentes do vetor nulo e que sejam ortogonais entre si.

Solução

(0) **Falso.**

Considere o seguinte contraexemplo.

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \to T(x, y, z) = (x, x, y - z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

então

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (1-\lambda)(-\lambda)(-1-\lambda) = \lambda - \lambda^3 = 0.$$

Note que o polinômio característico é de terceiro grau.

(1) **Verdadeiro.**

Seja $Y \in Im(T) \subset V$, onde $Im(V)$ denota a imagem de T. Logo, existe

$x \in V$ tal que $T(x) = Y$. Já que $X \in V$, então existem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tal que $x = \alpha_1, \nu_1 + \alpha_2, \nu_2 + \alpha_3, \nu_3$. Assim,

$$T(x) = T(\alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_2 + \alpha_3\nu_3) = \alpha_1 T(\nu_1) + \alpha_2 T(\nu_2) + \alpha_3 T(\nu_3) = Y.$$

Portanto a imagem de T é gerado pelos vetores $T(\nu_1), T(\nu_2)$ e $T(\nu_3)$.

2 **Verdadeiro.**
Um operador $T : V \to V$ é autoadjunto se e somente se $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle, \forall x, y \in V$.
Sejam λ_1 e λ_2 autovalores diferentes associados a autovetores ν_1 e ν_2, então,

$$\lambda_1\langle \nu_1, \nu_2\rangle = \langle \lambda\nu_1, \nu_2\rangle = \langle T(\nu_1), \nu_2\rangle = \langle \nu_1, T(\nu_2)\rangle = \langle \nu_1, \lambda_2\nu_2\rangle = \lambda_2\langle \nu_1, \nu_2\rangle,$$

logo,

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle \nu_1, \nu_2\rangle = 0.$$

Dado que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $\langle \nu_1, \nu_2\rangle = 0$. Portanto, os autovetores associados a autovalores diferentes são ortogonais.

3 **Falso (No gabarito é Verdadeiro) .**
O espaço U não é um operador.
Verdadeira. Se trocamos o enunciado U por T, o enunciado é verdadeiro. A seguir fazemos a demonstração, usando dois enunciados.
Teorema do núcleo e da imagem: Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$. Considere uma transformação linear $T : V \to V$, então:

$$\dim(V) = \dim(N(T)) + \dim(Im(T))$$

Teorema: Se W é um subespaço de um espaço vetorial de dimensão finita, então

$$\dim(W) \leq \dim(V)$$

Do teorema do núcleo e da imagem temos

$$\dim(V) = \dim(N(T)) + \dim(Im(T)),$$
$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(N(T)) + \dim(Im(T)),$$
$$3 = \dim(N(T)) + \dim(Im(T)), \tag{14.2.1}$$

Agora, dado que $Im(T) \subset U = \mathbb{R}^2$, então pelo teorema obtemos

$$\dim(Im(t)) \leq \dim(\mathbb{R}^2) = 2.$$

Da ultima desigualdade e da equação (14.2.1), juntamos

$$1 \leq \dim(N(T)).$$

4 **Falso.**

Sejam os vetores não nulos

$$V_1 = (V_{11}, V_{12}, V_{13})$$
$$V_2 = (V_{21}, V_{22}, V_{23})$$
$$V_3 = (V_{31}, V_{32}, V_{33})$$
$$V_4 = (V_{41}, V_{42}, V_{43})$$

e consideremos a equação

$$\alpha_1 V_1,\ \alpha_2 V_2,\ \alpha_3 V_3,\ \alpha_4 V_4 = 0$$

Logo, da equação anterior, obtemos

$$\alpha_1 V_{11} + \alpha_2 V_{21} + \alpha_3 V_{31} + \alpha_4 V_{41} = 0$$
$$\alpha_1 V_{12} + \alpha_2 V_{22} + \alpha_3 V_{32} + \alpha_4 V_{42} = 0$$
$$\alpha_1 V_{13} + \alpha_2 V_{23} + \alpha_3 V_{34} + \alpha_4 V_{43} = 0.$$

Um sistema linear homogêneo com mais incógnitas que equações tem infinitas soluções. Portanto, o conjunto $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ é linearmente dependente.

Se $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ é linearmente dependentes, então um deles é combinação linear dos demais. Suponhamos que

$$V_1 = a_2V_2 + a_3V_3 + a_4V_4.$$

Dado que V_1 é não nulo, então existe $a_j \in \{a_2, a_3, a_4\}$ diferente de zero. Suponhamos que $a_2 \neq 0$, logo

$$\begin{aligned}
\langle V_1, V_2\rangle &= \langle a_2V_2 + a_3V_3 + a_4V_4, V_2\rangle \\
\langle V_1, V_2\rangle &= a_2\langle V_2, V_2\rangle + a_3\langle V_3, V_2\rangle + a_4\langle V_4, V_2\rangle \\
\langle V_1, V_2\rangle &= a_2||V_2||^2.
\end{aligned}$$

Já que V_2 é não nulo $a_2 \neq 0$, então $\langle V_1, V_2\rangle \neq 0$.

Exercício 10 (ANPEC 2017, Questão 2)

Uma matriz $M \in R^{n\times n}$ é chamada idempotente se $M^2 = M$. Uma matriz $N \in R^{n\times n}$ é chamada nilpotente se existe un número inteiro positivo k tal que $N^k = 0$ (matriz com todas as entradas nulas). Classifique as seguintes afirmações segundo a sua veracidade:

0. O determinante de uma matriz nilpotente é zero;
1. Se $M \in R^{n\times n}$ é nilpotente, então existe um número inteiro r tal que $(I - M)^{-1} = I + M + \cdots + M^r$;
2. A soma de matrizes nilpotentes é uma matriz nilpotente;
3. O determinante de uma matriz idempotente é sempre 1;
4. A matriz $M \in R^{n\times n}$ é idempotente se, e somente se, $(I - M)$ é idempotente.

Solução

0. **Verdadeiro.** A afirmativa é verdadeira pois

$$0 = \det(0) = \det(N^k) = (\det(N))^k.$$

(1) **Verdadeiro.** Para confirmar a veracidade da afirmativa, basta multiplicar

$$(I - M)(I + M + \cdots + M^r) = I + M + \cdots + M^r - M(I + M + \cdots + M^r)$$
$$= I + M + \cdots + M^r - M - M^2 - \cdots - M^r - M^{r+1} = I - M^{r+1} = I.$$

(2) **Falso.**
Considere o seguinte contraexemplo. Sejam as matrizes nilpotentes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A soma destas matrizes é

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Então, $I^k = I$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$. Portanto, a soma de matrizes nilpotentes não é necessariamente nilpotente.

(3) **Falso.** Note que se M é idempotente,

$$[\det(M)]^2 = \det(M^2) = \det(M)$$

e portanto $\det(M) = 1$ ou $\det(M) = 0$.

(4) **Verdadeiro.**
Note que

$$(I - M)^2 = I - 2M + M^2$$

Então, se M é idempotente temos que

$$(I - M)^2 = I - 2M + M^2 = I - 2M + M = I - M,$$

e portanto $I - M$ é idempotente. De forma análoga, se $I - M$ é idempotente, então

$$I - M = (I - M)^2 = I - 2M + M^2,$$

i.e., $M = M^2$ é idempotente.

Exercício 11 (ANPEC 2017, Questão 4)

Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas:

0. Seja T:$\mathrm{R^n} \to \mathrm{R^n}$ uma transformação linear. Se T é injetora, então T também é sobrejetora;
1. Seja T:$\mathrm{R^2} \to \mathrm{R^2}$ a transformação linear dada por T(x,y) = $(2\mathrm{x}+5\mathrm{y}, \mathrm{x}-2\mathrm{y})$. Então existe um subespaço unidimensional V de $\mathrm{R^2}$ tal que TV $\subset$ V;
2. Seja T:$\mathrm{R^n} \to \mathrm{R^m}$ uma transformação linear tal que as colunas da matriz que a representa são linearmente independentes. Então o posto de T é m;
3. Sob as mesmas condições do item anterior, podemos afirmar que existe um vetor v $\neq 0$ tal que Tv = 0;
4. Seja T:$\mathrm{R^n} \to \mathrm{R^n}$ e G:$\mathrm{R^n} \to \mathrm{R^n}$ duas transformações lineares. Então todo autovalor de TG é também um autovalor de GT, em que TG e GT são as duas compostas das transformações T e G.

Solução

0. **Verdadeiro.**
Se T é injetora e $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ é uma base de R^n então

$$\{T(e_1), T(e_2), \cdots, T(e_n)\}$$

é uma base de R^n. Seja $y \in R^n$, então existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tal que

$$\begin{aligned} y &= \alpha_1 T(e_1) + e_2 T(\alpha_2) + \cdots + \alpha_n T(\alpha_n) \\ &= T(\alpha_1 e_1 + e_2\alpha_2 + \cdots + \alpha_n\alpha_n), \end{aligned}$$

logo existe $x = \alpha_1 e_1 + e_2\alpha_2 + \cdots + \alpha_n\alpha_n \in R^n$ tal que $T(x) = y$.

1. **Falso.** Ver resolução da página 242.

2. **Falso.**
Um contraexemplo é $T : R \to R^2$ tal que $T = (v, v)^t$, então $T(v) =$

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} v$, onde $A = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ é a matriz de T. Logo A tem uma coluna L.I. E o posto de A é $1 \neq 2$.

③ **Falso.**

Considere o contraexemplo do item anterior, então $T(v) = (v, v)^t \neq (0, 0)$, para todo $v \neq 0$.

④ **Verdadeiro.**

Observação: Se T e G são transformações lineares então TG e GT também são transformações lineares de R^n em R^n.

Sejam A, B, AB e BA as matrizes das transformações lineares T, G, TG e GT, respectivamente.

Agora, seja $v \neq 0$ um autovetor e λ seu autovalor correspondente de AB, então $ABv = \lambda v$,onde denotamos $w = Bv$. Aqui temos duas possibilidades $w = 0$ ou $w \neq 0$.

Se $w = 0$, temos $ABv = \lambda v = 0$, então $\lambda = 0$ dado que $v \neq 0$.

Logo $\lambda = 0$ é um autovalor de BA ja que $\det(AB) = \det(BA) = 0$.

Para $w \neq 0$, fazemos

$$BAw = BABv = B(ABv) = B(\lambda v) = \lambda Bv = \lambda w$$

por tanto λ é um autovalor de BA.

Exercício 12 (ANPEC 2016, Questão 4)

Uma matriz de permutação é uma matriz quadrada, cujas entradas são números 0 ou 1 e tal que em cada linha e em cada coluna há exatamente um número 1. Analise a veracidade das seguintes afirmações:

⓪ Soma de matrizes de permutação da mesma ordem é uma matriz de permutação;

① Produto de matrizes de permutação da mesma ordem é uma matriz de permutação;

(2) Se $M \in R^{n\times n}$ é uma matriz de permutação e $\nu \in R^{n\times 1}$ é um vetor qualquer, então $M\nu$ e ν têm a mesma norma;

(3) Seja $M \in R^{n\times n}$ uma matriz de permutação e $s = \left\{[\nu_1 \cdots \nu_n]^T \in R^{n\times 1} | \Sigma_{i=1}^n \nu_i = 1\right\}$. A transformação linear $T(\nu) = M\nu$ deixa invariante o conjunto S (ou seja, $T(S) \subset S$);

(4) Se $M \in R^{n\times n}$ é uma matriz de permutação e $M^2 = MM = I$ (matriz identidade), então $M = I$.

Solução

(0) **Falso.**

Considere o seguinte contraexemplo. Sejam as matrizes permutação

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A soma das matrizes A e B não é permutação, isto é

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Verdadeiro.**

(3) **Verdadeiro.**

O conjunto $T(S) = \{M\nu;\ \nu \in S\}$.

Seja $x \in T(S)$, então existe $\nu = [\nu_1 \cdots \nu_n]^T \in S$, onde $\sum_{i=1}^n \nu_i = 1$ tal que

$$x = M\nu.$$

Denotemos a matriz $M = [e_1 \cdots e_n]^T$, onde e_i são linhas $1 \times n$, então

$$x = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \nu = \begin{bmatrix} e_1\nu \\ e_2\nu \\ \vdots \\ e_n\nu \end{bmatrix}.$$

Somando a equação anterior

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \nu(e_1 + e_2 + \cdots + e_n)$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \nu(1, 1, \cdots, 1)$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \nu_i = 1.$$

Portanto $x \in S$.

4 **Falso.**

Exercício 13 (ANPEC 2016, Questão 8)

Seja $A(x) = b$ um sistema de equações lineares, com A uma matriz de ordem $m \times n$ e b um vetor de ordem $m \times 1$. Analise a veracidade das seguintes alternativas:

0 Se A for uma matriz quadrada não nula com determinante nulo, então o sistema nunca tem solução;

1 Se A tiver posto máximo, então a solução do sistema é única;

2 Se, no item anterior, tivemos m < n, então a solução é única;

3 Se o vetor b for combinação linear das colunas da matriz A, então o sistema tem pelo menos uma solução;

4 Se A for uma matriz diagonal com determinante $|A| \neq 0$, então a medida geométrica de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é inversamente proporcional a $\sqrt[n]{|A|}$, em que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é solução do sistema.

Solução

0 **Falso.**

Considere o seguinte contraexemplo para a afirmativa. Seja o sistema de equações

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

este sistema tem infinitas soluções.

(1) **Falso.**
Se A tiver posto máximo, então a solução do sistema é única. Consideremos o seguinte contraexemplo, seja a seguinte equação

$$(1 \;\; 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1,$$

onde $A = [1 \quad 1]$. Notei que o posto de A é 1, este valor é o posto máximo. Por outro lado, a equação anterior tem infinitas soluções.

(2) **Falso.**
(3) **Verdadeiro.**
(4) **Verdadeiro.**

Exercício 14 (ANPEC 2015, Questão 4)
Uma matriz de Markov é uma matriz quadrada, que em cada entrada tem um número não negativo e a soma das entradas de qualquer coluna é igual a 1. A ordem de uma matriz de Markov é o número de linhas (ou colunas) dela. Afirmamos:

(0) A soma de duas matrizes de Markov da mesma ordem é uma matriz de Markov;
(1) O produto de duas matrizes de Markov da mesma ordem é uma matriz de Markov;
(2) A inversa de uma matriz de Markov (quando ela exista) é também uma matriz de Markov;

3 Se $M \in R^{n\times n}$ é uma matriz de Markov e $\nu \in R^{n\times 1}$ é um vetor de componentes não negativos que somam 1, então $M\nu \in R^{n\times 1}$ também é um vetor de componentes não negativos que somam 1;

4 Se $\alpha \in [0,1]$ e $M, N \in R^{n\times n}$ são matrizes de Markov, então $\alpha M + (1-\alpha)N$ também é uma matriz de Markov.

Solução

0 **Falso.** Note que a identidade I é matriz de Markov, mas $2I = I + I$ não o é. Falso.

1 **Verdadeiro.** Para ver que a afirmativa é verdadeira, basta supor que A e B sejam de Markov de ordem n, e definir $C = AB$. Então as entradas de C são não negativas (por serem produtos e somas de valores não negativos). Para checar que a soma das colunas de C resulta em 1, basta ver que $C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$ e portanto

$$\sum_{j=1}^{n} C_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ik}B_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\sum_{j=1}^{n} B_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} = 1,$$

onde usamos que a soma dos termos das colunas de A e B resultam em 1 por serem de Markov.

2 **Falso.** Basta tomar o contraexemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0,1 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix},$$

de Markov. Mas

$$A^{-1} = \frac{1}{0,9}\begin{pmatrix} 0,9 & -0,1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

não é de Markov.

3 **Verdadeiro.** Resolução muito semelhante à da questão 1:

$$\sum_{j=1}^{n}(M\nu)_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} M_{jk}\nu_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{jk}\nu_k = \sum_{k=1}^{n} \nu_k \sum_{j=1}^{n} M_{jk} = \sum_{k=1}^{n} \nu_k = 1.$$

(4) **Verdadeiro.**

Resolução semelhante ao item anterior. Primeiro note que os termos de $\alpha M + (1-\alpha)N$ serão todos não negativos, pois $\alpha \in [0,1]$. Além disto,

$$\sum_{j=1}^{n}[\alpha M_{ij} + (1-\alpha)N_{ij}] = \alpha\sum_{j=1}^{n} M_{ij} + (1-\alpha)\sum_{j=1}^{n} N_{ij} = \alpha + (1-\alpha) = 1.$$

Exercício 15 (ANPEC 2015, Questão 15)

Analise a veracidade das seguintes afirmações:

(0) Se $\lambda_1 \neq 0$ é autovalor de $A \in R^{n\times n}$, então A é invertível (possui inversa) e um autovalor da inversa é λ_1^{-1};

(1) Os autovetores da matriz $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$ não são ortogonais;

(2) Uma matriz positiva é aquela cujas entradas são todas positivas. Portanto toda matriz positiva tem determinante não nulo;

(3) Seja V um espaço vetorial de dimensão n, com n inteiro positivo. Então um conjunto de $n+1$ vetores é mais do que suficiente para gerar todo o espaço V;

(4) O núcleo da transformação definida por uma matriz $A \in R^{3\times 3}$ é $2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$, então essa matriz tem somente um autovalor não nulo.

Solução

(0) **Falso.**

Seja a seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de A é $\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(1-\lambda) - 1$, de modo que a equação caraterística é $\lambda(\lambda - 2) = 0$.

Assim, os autovalores são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 0$. Notei que A não é inversível. Portanto, o enunciado é falso.

1 **Verdadeiro.**

A equação característico de A

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$$

é

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 \\ -2 & 10-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 9)(\lambda - 6) = 0.$$

Então, os autovalores são: $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = 9$.

Sabemos que se λ é um autovalor e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ o autovetor correspondente então $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, logo $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$.

(i) Para $\lambda = \lambda_1 = 6$, temos

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, $v_1 = 2v_2$. Consideremos $v_2 = a \neq 0$, então para $\lambda_1 = 6$ temos um autovetor $\vec{v}_1 = a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(ii) Para $\lambda = \lambda_2 = 9$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, $v_2 = 2v_1$. Consideremos $v_1 = b \neq 0$, então para $\lambda_2 = 9$ temos um autovetor $\vec{v}_2 = b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Logo, $\left\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \right\rangle = 2ab + 2ab = 4ab \neq 0$, já que $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

2 **Falso.**

Consideremos a seguinte matriz positiva

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

O determinante desta matriz é nulo.

(3) **Falso.**

Seja $v = \mathbb{R}^2$ com dimensão 2. Consideremos que o conjunto

$$\{(1,1),(1,2),(2,3)\}$$

gera todo $\mathbb{R}^2$, isto é: Para todo $x \in \mathbb{R}^2$ existem $\alpha, \beta, \theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$x = \alpha(1,1) + \beta(1,2) + \theta(2,3)$$
$$x = \alpha(1,0) + \alpha(0,1) + \beta(1,0) + 2\beta(0,1) + 2\theta(1,0) + 3\theta(0,1)$$
$$x = (\alpha + \beta + 2\theta)(1,0) + (\alpha + 2\beta + 3\theta)(0,1).$$

Então, para gerar todo $\mathbb{R}^2$ se precisa só de dois vetores.

(4) **Falso**

Do enunciado, $2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$, então o domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Agora, dado que $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ e o domínio está em $\mathbb{R}^3$, temos que a imagem é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Logo, a transformação é definida por $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, onde o núcleo.

$$N(A) = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; \quad A\times = (2x_1 + x_2 - 3x_3, 0, 0) = (0,0,0)\}.$$

Se consideramos

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix},$$

a transformação $A\times = (2x_1 + x_2 - 3x_3, 2x_1 + x_2 - 3x_3, 2x_1 + x_2 - 3x_3)$. A equação característica de A é $\det(A - \lambda I) = \lambda^3 = 0$. Então, os autovalores são $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Assim, a matriz A não tem autovalores não nulo.

Exercício 16 (ANPEC 2014, Questão 2)

Considere a transformação linear $T : R^2 \to R^3$, definida por $T(x, y) = (2x + 2y, x, y - x)$. Julgue as seguintes afirmativas:

0. A matriz que representa T em quaisquer bases tem 3 colunas.
1. A transformação linear não é sobrejetora.
2. Existe um vetor não nulo que é levado ao vetor zero.
3. O sistema $Tx = \nu$ sempre tem solução para ν na imagem da T.
4. A imagem de T é um plano que passa pela origem e tem vetor normal $(0, 4, 2)$.

Solução

0. **Falso.**

Da hipótese, temos

$$T(x, y) = (2x + 2y, x, y - x) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Assim, a matriz que representa T tem 2 colunas e 3 linhas.

1. **Verdadeiro.**

Seja o vetor $(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$, tal que $T(x, y) = (2x+2y, x, y-x) = (0, 0, 1)$. Então $2x + 2y = 0, \;\; x = 0$ e $y - x = 1$. Logo não existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que resolva o sistema

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 0 \\ x &= 0 \\ -x + y &= 1 \end{aligned}$$

Portanto T não é sobrejetiva.

(2) **Falso.**

Seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (0, 0, 0)$. Então

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 0, \\ x &= 0, \\ -x + y &= 0. \end{aligned}$$

Logo, $x = 0$ e $y = 0$. Portanto, se $T(x, y) = (0, 0, 0)$ então $x = y = 0$.

(3) **Verdadeiro.**

Se v está na imagem de T, então existe um vetor x tal que $Tx = v$. Assim o sistema $Tx = v$ sempre tem solução para todo v na imagem de T.

(4) **Falso.**

Da hipótese, temos

$$T(x, y) = (2x + 2y, x, y - x) = (0, 0, 0) + x(2, 1, -1) + y(2, 0, 1).$$

A imagem de T é um plano que passa pela origem e tem vetores diretores $(2, 1, -1)$ e $(2, 0, 1)$. Agora calculemos o vetor normal (produto vetorial)

$$(2,1,-1)\times(2,0,1) = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - j \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = (1, -4, -2).$$

Assim, os vetores normais a imagem de T são $t(1, -4, -2)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Note que não existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $(0, 4, 2) = t(1, -4, -2)$.

Exercício 17 (ANPEC 2014, Questão 6)

Considere a matriz cujas colunas são:

$$(0, 5, 1, 0) \qquad (5, 0, 5, 0), \qquad (1, 5, 0, 5), \qquad (0, 0, 5, 0).$$

Julgue as seguintes afirmativas:

0 A matriz tem pelo menos um autovalor que não é real.

1 A soma dos autovalores é zero.

2 A matriz tem inversa.

3 A matriz tem 4 autovalores positivos.

4 A matriz tem um autovalor zero.

Solução

0 **Falso.**

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo $A = A^t$, então a matriz A é simétrica.

Teorema: Se A é uma matriz simétrica, então seus autovalores são reais.

1 **Verdadeiro.**

Lembrei o seguinte teorema A soma das autovalores de uma matriz A é igual ao traço da matriz. então traço $(A) = 0$.

2 **Verdadeiro.**

Dado que $det(A) = 625$, então A^{-1}.

3 **Falso.**

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e λ_4 autovalores de A. Dado item 2 $det(A) \neq 0$, então $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$ e $\lambda_4 \neq 0$. Por outro lado, do item 0 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e λ_4 são números reaise do item 1 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$, então existem autovalores positivos e negativos.

④ **Falso.**

Teorema: O produto dos autovalores da matriz A é igual ao determinante da matriz A.

Como $det(A) = \lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3\, \lambda_4 = 625$, então $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 \neq 0$ e λ_4.

Exercício 18 (ANPEC 2013, Questão 4)

Considere $\beta = \{\nu_1, \ldots, \nu_m\}$ um conjunto de vetores de R^n. Julgue as seguintes afirmações;

⓪ Se $m > n$, então os vetores do conjunto β são linearmente dependentes.

① Se $m < n$, então os vetores do conjunto β são linearmente independentes.

② Se $m = n$, então a matriz, cujas colunas são os elementos de β, é não singular.

③ Se todos os vetores de conjunto β forem linearmente independentes, então o núcleo da matriz, cujas colunas são os elementos de β, é o subespaço nulo.

④ Se todos os vetores de conjunto β forem linearmente independentes, então o posto da matriz, cujas colunas são os elementos de β, é m.

Solução

⓪ **Verdadeiro.**

① **Falso.**

② **Falso.**

③ **Verdadeiro.**

④ **Verdadeiro.**

Exercício 19 (ANPEC 2013, Questão 7)

Considere a transformação linear $T : R^2 \to R^2$ definida por $T(x, y) = (x + y, x - ay), a \in R$. Denote por A a matriz que representa T na base canônica de R^2. Julgue as seguintes afirmativas:

⓪ A matriz associada à transformação T é não singular para $a = -1$.

(1) Se $a = -1$, o núcleo de T é um subespaço de dimensão 1.

(2) O sistema $Ax = c$ sempre tem solução para $a = 1$ e c qualquer vetor de R^2.

(3) O núcleo e a imagem de T são subespaços cujas dimensões são maiores do que 2.

(4) Para qualquer valor de a o sistema homogêneo $Ax = 0$ tem solução nula.

Solução

(0) **Falso.**

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Verdadeiro.**

(3) **Falso.**

(4) **Verdadeiro.**

Exercício 20 (ANPEC 2013, Questão 10)

Considere a matriz A $= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Julgue as afirmativas:

(0) O número de autovalores distintos da matriz A é igual à ordem da matriz A.

(1) A dimensão do subespaço associado ao maior autovalor é 1.

(2) A dimensão do subespaço associado ao menor autovalor é 1.

(3) Os autovetores de A, $\nu_1 = (0, 1, 0)$, $\nu_2 = (1, 0, 1)$ e $\nu_3 = (-1, 3, 1)$, formam uma base de R^3.

(4) A matriz A é diagonalizável.

Solução

(0) **Falso.**

Dado que $A_X = \lambda_X$, então $(A - \lambda_I)X = 0$, logo $\det(A - \lambda_I) = \lambda^2(\lambda + 2) = 0$. Assim, os autovalores são $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = -2$.

Portanto a ordem da matriz A e 3 e tem dois autovalores distintos.

① **Falso.**

Para $\lambda = 0$, temos

$$\big(A - 0I\big)x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

então $x_1 = x_3$ e $x_2 \in \mathbb{R}$. O autoespaço para o sistema anterior é o conjunto $V = \{(x_1, x_2, x_1); x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$. Logo $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$ é uma base para V. Portanto a dimensão é 2.

② **Verdadeiro.**

Para $\lambda = -2$, temos

$$\big(A + 2I\big)x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

então $x_3 = -x_1$ e $x_2 = -3x_1$. Logo o autoespaço

$$W = \{(x_1, -3x_1, -x_1); x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Assim $(-1, 3, 1)$ é uma base para W. Portanto a dimensão é 1.

③ **Verdadeiro.**

Seja $(x, y, z) \in R^3$, então

$$(x, y, z) = (0, 1, 0)\Big(y - \frac{3}{2}(z - x)\Big) + (0, 1, 1)\Big(x + \frac{1}{2}(z - x)\Big) + (-1, 3, 1)\Big(\frac{1}{2}(z - x)\Big)$$

logo os vetores ν_1, ν_2 e ν_3 geram R^3.

Sejam α, β e $\theta \in R$, então

$$\alpha(0, 1, 0) + \beta(1, 0, 1) + \theta(-1, 3, 1) = (0, 0, 0).$$

Dado que $det \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \neq 0$, então ν_1, ν_2 e ν_3 são L.I. Portanto ν_1, ν_2 e ν_3 é uma base de R^3.

(4) **Verdadeiro.**

Definição: Dizemos que uma matriz A, é diagonalizável, se existe matrizes P e D tais que $D = P^{-1}AP$, ou equivalente, $A = PDP^{-1}$, em que D é uma matriz diagonal.

Logo do item (0), (1) e (2), temos

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

do item (3) $det(P) \neq 0$. Portanto A é diagonalizável.

Exercício 21 (ANPEC 2012, Questão 4)

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$ com entradas $a_{ij} \in R$. Julgue as afirmativas:

(0) Existe uma matriz B de modo que $BA = 2A$.

(1) Se $A^2 + A = I$, então $A^{-1} = A + I$, em que I é a matriz identidade.

(2) Se todos os elementos da diagonal principal de A são nulos, então $\det(A) = 0$.

(3) Seja $b \in R^n$. Se $Ax = b$ possui infinitas soluções, então existe $c \in R^n$, tal que $Ax = c$ admite uma única solução.

(4) Suponha $a_{ij} = 0$ quando $i + j$ for par e $a_{ij} = 1$ quando $i + j$ for ímpar. Se $n \geq 3$ então A tem posto n.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

Seja $B = 2I$, onde I é a matriz identidade. então, $BA = 2IA = 2A$.

① **Verdadeiro.**

Da hipótese $A(A+I) = I$, então $\det(A) \times \det(A+I) = \det(I) = 1$, logo temos $\det(A) \neq 0$. Portanto existe A^{-1}. Assim obtemos

$$\begin{aligned}&(A^2 + A)A^{-1} = IA^{-1}\\&A^{-1} = A + I.\end{aligned}$$

② **Falso.**

Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, então $\det(A) = -1$.

③ **Falso.**

Seja as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Note que $Ax = b$ tem infinitas soluções. Para qualquer $c = tb$, onde $t \in R$, a equação $Ax = b$ possui infinitas soluções. finalmente, para $c \neq tb$ o sistema $Ax = b$ não tem solução.

④ **Falso.**

Dada uma matriz A de ordem $n \times n$, o posto de matriz, pos (A), é dada pela ordem da maior submatriz não singular da matriz dada.

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. As matrizes $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $A_3 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ são submatrizes de A.

Então temos $\det(A_1) = 0$, $\det(A_2) \neq 0$ e $\det(A_3) = 1$.

Portanto $\text{posto}(A) = 2$.

Exercício 22 (ANPEC 2012, Questão 5)

Seja $T : R^3 \to R^2$ a transformação linear dada por $T(x, y, z) = (x+y-z, x+y)$. Denote por A a matriz da transformação T relativa as bases canônicas de R^3 e R^2. Julgue as afirmativas:

(0) A matriz A tem três linhas e duas colunas.

(1) O posto da matriz A é igual a 2.

(2) O núcleo e a imagem de T são dois subespaços de R^3, cujas dimensões são 2 e 1, respectivamente.

(3) O Núcleo da transformação T é gerado pelo vetor $(-1, 1, 0)$.

(4) O sistema $Ax = b$ sempre tem solução para qualquer $b \in R^2$.

Solução

(0) **Falso.**

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Falso.**

(3) **Verdadeiro.**

(4) **Verdadeiro.**

Exercício 23 (ANPEC 2012, Questão 6)

Considere a matriz A = $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Julgue as seguintes afirmativas:

(0) A matriz A tem 3 autovalores distintos.

(1) A matriz A tem um autovalor de multiplicidade algébrica 2.

(2) A matriz A não é diagonalizável por que o número de autovalores é menor do que a sua ordem.

(3) A matriz A é diagonalizável.

(4) Os valores da matriz A produzem três autovetores linearmente independentes.

Solução

(0) **Falso.**

Da Questão 6, item (0), temos $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = -2$.

1 **Verdadeiro.**
Da Questão 6, item 0, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

2 **Falso.**
Da Questão 6, item 4, a matriz A é diagonalizável.

3 **Verdadeiro.**
Ver Questão 6, item 4.

4 **Verdadeiro.**
Ver Questão 0, item 3.

Exercício 24 (ANPEC 2011, Questão 5)
Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz real $n \times n$. Considere o sistema $Ax = b$ abaixo e julgue as afirmativas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

0 Se o posto de A é menor do que n, então o sistema não tem solução ou possui um número infinito de soluções.

1 Se o vetor b é combinação linear das colunas A, então o sistema admite solução.

2 Se $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ e 0 é autovalor de A, então o sistema possui uma única solução.

3 A matriz $M = A + A^t$, em que A^t é a transposta de A, é uma matriz simétrica.

4 Se $u = (u_1, \ldots, u_n)^t$ e $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)^t$ são soluções do sistema $Ax = b$, então $u + \nu$ também é solução de $Ax = b$.

Solução

(0) **Verdadeiro.**
(1) **Verdadeiro.**
(2) **Falso.**
(3) **Verdadeiro.**
(4) **Falso.**

Exercício 25 (ANPEC 2011, Questão 6)
Considere as transformações lineares $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definidas por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 2y + 3z \\ 3y - 2z \\ -y + 2z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Seja A a matriz de T relativa à base canônica de $\mathbb{R}^3$. Julgue as afirmativas:

(0) L é sobrejetora.
(1) Se $\nu \in \mathbb{R}^3$ é tal que $\nu_t = (-1, -1; 1)$, então $\{\nu\}$ é base para o Núcleo de L.
(2) $\text{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$
(3) A possui três autovalores distintos e portanto é diagonalizável.
(4) $\nu \in \mathbb{R}^3$ é tal que $\nu^t = (1, 1, 1)$, então ν é autovetor de A associados ao autovalor 1.

Solução

(0) **Falso.**
Corolário: Sejam U e V espaças vetoriais da mesmo dimensão e seja $T : U \to U$ uma transformação linear. As seguintes afirmativas são equivalentes:
T é sobrejetiva $\Leftrightarrow$ T é injectora $\Leftrightarrow$ T transforma base de U em base de V.

Por outro lado

$$T\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = A\vec{x}.$$

Note que $\det(A) = 8$, então existe $A-1$. Sejam $\vec{x}_1$ e $\vec{x}_2 \in \mathbb{R}^3$, tal que $A\vec{x}_1 = A\vec{x}_2$, logo $A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = 0$. Dado que A^{-1} existe, então $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$. Portanto $T = A$ é injetora. Da corolário $T = A$ é sobrejetora.

(1) **Verdadeiro.**

O núcleo de L é

$$N(L) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \ L(x, y, z)^t = (0, 0, 0)\right\}.$$

Resolvendo $L(x, y, z)^t = (0, 0, 0)$, temos $x = -z$ e $y = -z$, logo

$$N(L) = \left\{(-1, -1, 1)z \in \mathbb{R}^3\right\}.$$

Portanto $V^t = (-1, -1, 1)$ é base de $N(L)$.

(2) **Verdadeiro.**

Da hipótese, temos

$$T\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 2y + 3z\\ 3y - 2z\\ -y + 2z\end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}.$$

Então

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}.$$

(3) **Verdadeiro.**

Seja $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, logo $(A - \lambda I)\vec{x} = 0$, então $\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)(\lambda - 4)(\lambda - 1) = 0$, portanto $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2\ \ \text{e}\ \ \lambda_3 = 4$.

Teorema: Uma matriz quadrada A de ordem m é diagonalizável se, e somente se, A possui n autovalores linearmente independentes.

Do teorema A é diagonalizável.

④ **Falso.**

Para $\lambda = 1$, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

resolvendo o sistema temos $x = -z, \quad y = z$. Logo o autoespaço para $\lambda = 1$ é $V = \big\{(-1, 1, 1)z; z \in \mathbb{R}\big\}$.

Assim $\nu \notin \nu$, então ν não é autovetor de A para $\lambda = 1$.

Exercício 26 (ANPEC 2010, Questão 9)

Considere os sistemas lineares abaixo e julgue as afirmativas:

$$(\mathrm{I}) = \begin{cases} x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

$$(\mathrm{II}) = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

⓪ Se $k \neq 3$, então o sistema (I) tem solução única;

① Se $k = 3$, o sistema homogêneo associado a (I) tem infinitas soluções;

② Para $k = 1$, a matriz dos coeficientes de (I) é uma matriz ortogonal;

③ Se $m > n$, (II) tem sempre solução;

④ Se $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, então o sistema (II) tem sempre solução.

Solução

⓪ **Verdadeiro.**

① **Falso.**

② **Falso.**

3 **Falso.**

4 **Verdadeiro.**

Exercício 27 (ANPEC 2010, Questão 10)

Julgue as afirmativas:

0 $S = \{(x, y, x + y) \in IR^3 / x, y \in IR\}$ é um subespaço vetorial de IR^3 e a dimensão de S é 2;

1 $\{(1, 2, 3), (4, 5, 12), (0, 8, 0)\}$ é base de IR^3;

2 Se u, ν e w são vetores linearmente independentes, então $\nu + w,\ u + w$ e $u + \nu$ são também linearmente independentes;

3 Se S é um subconjunto de IR^3 formado por vetores linearmente dependentes, então podemos afirmar que S tem 4 elementos ou mais;

4 Se o posto da matriz A $= \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é 3, então $x \neq 1$.

Solução

0 **Verdadeiro.**

1 **Falso.**

2 **Verdadeiro.**

3 **Falso.**

4 **Falso.**

Exercício 28 (ANPEC 2010, Questão 11)

Considere as matrizes

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{C} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Julgue as afirmativas:

0 Para $a = 1$ e $b = 2$, então $(3A - B^t)^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$;

1 Se -1 é autovalor de A, então $a = 0$;

(2) Para $b=2$, $\nu = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ é um autovetor de B;

(3) Se $a > -1/2$, então A é diagonalizável;

(4) C é invertível não simétrica.

Solução

(0) **Falso.**

Para $a = 1$ e $b = 2$ temos

$$\big(3A - B\big)^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

(1) **Verdadeiro.**

Se $\lambda = -1$ é autovalor de A, então

$\det(A + I) = 2a = 0, \quad$ logo $a = 0$.

(2) **Falso.**

Para $b = 2$, $\det(B - \lambda I) = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$, logo $\lambda = 3$ ou $\lambda = -1$.

Se $\lambda = 3$, assim

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

então $x = y$. O autoespaço para $\lambda = 3$ é o conjunto

$$V = \{(1,1)x; x \in \mathbb{R}\}.$$

Logo $(1,2)$ não é autovetor para $\lambda = 3$. Se $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

então $y = -x$. o autoespaço para $\lambda = -1$ é o conjunto

$$W = \{(1,-1)x; x \in \mathbb{R}\}.$$

Portanto $(1,2)$ não é autovetor para $\lambda = -1$.

(3) **Verdadeiro.**

Teorema: Uma matriz quadrada A de ordem n é diagonalizável se, e somente se, A possui n autovetores linearmente independentes.

Logo

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda a \\ 2 - 1 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2a - 1 = 0.$$

Para que a matriz A seja diagonalizável, os autovalores tem que ser diferentes e reais. Logo $2a + 1 > 0$, então $a > -1/2$.

(4) **Falso.**

Dado que $\det(C) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, então C é invertível. Também $C \neq C^t$.

Exercício 29 (ANPEC 2009, Questão 3)

Se A é a matriz na base canônica de $T : R^3 \to R^3$, dada por $T(x, y, z) = (z,\ \ x - y\ \ \ - z)$, julgue as afirmativas:

(0) A dimensão do núcleo de T é 2.

(1) $\{(0, 1, 0), (1, 0, -1)\}$ é uma base da imagem de T.

(2) A transposta de A é $A^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(3) Se $U = \{(0, 0, z)/z \in R\}$ então $T(U) \subseteq U$.

(4) $\{(x, y, z) \in R^3/T(x, y, z) = (0, 1, 0)\}$ é uma reta no plano xy.

Solução

(0) **Falso.**

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Verdadeiro.**

(3) **Falso.**

(4) **Verdadeiro.**

Exercício 30 (ANPEC 2009, Questão 6)

Denote por M_n o espaço das matrizes $n \times n$ com entradas $a_{ij} \in R$. Seja $D : M_2 \times M_2 \to M_4$ a aplicação dada por $D(X,Y) = \begin{pmatrix} X & \underline{0} \\ \underline{0} & Y \end{pmatrix}$, em que $\underline{0} \in M_2$ é identicamente nula. Seja A a matriz da aplicação linear $L : R^2 \to R^2$, dada por $L(x,y) = (y-x, y)$. Se $B = D(A,A)$, julgue as afirmativas:

0. O polinômio característico de A é dado por $p(t) = -(1-t^2)$.
1. $A^{-1} = A$ e $\det A = \det B = 1$.
2. Se λ é um autovalor de A, então λ é um valor de B.
3. O polinômio característico de B é dado por $q(t) = t^4 + 2t^2 + 1$.
4. A é diagonalizável.

Solução

0. **Verdadeiro.**

Do enunciado, A é a matriz da aplicação $L : R^2 \to R^2$, dado por

$$L(x,y) = (y-x, y) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

Onde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico de A é

$$p(t) = \det(A - tI) = (-1-t)(1-t) = -(1-t^2).$$

1. **Falso.**

Denotemos

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

então

$$AA^{-1} = I$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -a+b & -b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo $c = 0$ e $d = 1$. Assim, $a = -1$ e $b = 1$. Portanto,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq A.$$

Lembrei que $F \wedge V = F$ e $F \wedge F = F$. Então, se $\det A = \det B = 1$ é verdadeiro ou falso, a resposta final vai ser falso, já que $A^{-1} = A$ é falso.

(2) **Verdadeiro.**

Seja λ um autovalor de A, então

$$\det(A - \lambda I) = -(1 - \lambda^2) = 0$$

$$(1 - \lambda^2)^2 = 0$$

$$(1 - \lambda^2)^2 = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \det(B - \lambda I) = 0$$

logo λ é um autovalor de B.

(3) **Falso.**

O polinômio característico de B é

$$p(t) = \det(B - tI) = (1 - t^2)^2 = t^4 - 2t^2 + 1.$$

(4) **Verdadeiro.**

Neste item usaremos o seguinte teorema.

Teorema. Se uma matriz A de tamanho $n \times n$ tem n autovalores distintos, então A é diagonalizável.

A equação característica de A é

$$\det(A - \lambda I) = -(1-\lambda)(1+\lambda) = 0.$$

Logo, os autovalores de A são $\lambda_1 = 1$ é $\lambda_2 = -1$.

Portanto, do teorema anterior A é diagonalizável.

Exercício 31 (ANPEC 2009, Questão 11)

Sejam $A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} k & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$. Julgue os itens abaixo:

0. $\operatorname{tr}(A) = -\det B$ então $k = 1$.
1. Se $k = 1$ então 0 é autovalor de A.
2. Para todo $k, \nu = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ k-1 \end{pmatrix}$ é autovetor de A associado ao autovalor k.
3. Se $k \neq 0$ e $k \neq -1$ então o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem solução única, em que $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.
4. Se $k = 0$ então o sistema $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$, em que $\mathbf{0}$ é o vetor nulo que só admite a solução trivial, isto é $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Solução

0. **Verdadeiro.**
1. **Falso.**
2. **Falso.**
3. **Verdadeiro.**
4. **Falso.**

Exercício 32 (ANPEC 2008, Questão 2)

Se V o espaço vetorial das matrizes 2×2 identificado como R^4 de sorte que cada matriz $(a_{ij}) \in V$ seja identificada com o ponto $(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}) \in R^4$. Denote por $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4$ os autovalores do operador linear $T : V \to V$ dado por $T(A) = A^t$, em que A^t é a transporta da matriz A. Sejam $E, B, C, D \in V$ tais que $M = \begin{pmatrix} E & B \\ C & D \end{pmatrix}$ é a matriz, na base canônica de $V = R^4$, do operador linear $T : V \to V$. Julgue as afirmativas:

0. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ e ($TA = A \Leftrightarrow A$ é simétrica).
1. $|A|^2 = |TA|^2 = \lambda^2|A|^2$, sempre que se tenha $T(A) = \lambda A$.
2. $\lambda_1 = -1$ e ($TA = \lambda_1 A \Leftrightarrow A$ é anti-simétrica).
3. Traço $(M) = 0$ e $\det M = -1$.
4. $E + D$ é a matriz identidade de V.

Solução

Notemos, primeiramente que

$$V = \left\{ A = \begin{bmatrix} a_1 1 & a_1 2 \\ a_1 3 & a_1 4 \end{bmatrix} ; \big(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}\big) \in R^3 \right\}.$$

O operador linear T satisfaz $T(A) = A^t$, por hipótese podemos escrever

$$T\big(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}\big) = \big(a_{11}, a_{13}, a_{12}, a_{14}\big).$$

Também por hipótese escrevemos

$$T\big(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}\big) = \big(a_{11}, a_{13}, a_{12}, a_{14}\big) = M \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \end{pmatrix}$$

onde as linhas de M é a base canônica de R^4, então

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

0 **Falso.**

O polinômio característico para obter os autovalores é $det(M - \lambda I) = (\lambda - 1)^3(\lambda + 1) = 0$, então $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$.

Então $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ é Falso.

O outro enunciado ($TA = A \Leftrightarrow A$ e simétrica) não precisa ser provado dado que $F \wedge V = F$ ou $F \wedge F = F$. Mas, aqui fazemos a denotação:

(i) ($\Rightarrow$) Da hipótese $TA = A^t$ e $TA = A$, então $A^t = A$

(ii) ($\Leftarrow$) Da hipótese $TA = A^t$ e $A^t = A$, então $TA = A$.

Portanto o enunciado $TA = A \Leftrightarrow A$ é simétrica é verdadeiro.

$$F \wedge V$$

$$F$$

1 **Verdadeiro.**

Sabemos que $TA = A^t$, por propriedade $|A| = A^t$, então $|A|^2 = |AT|^2$. Da hipótese $TA = \lambda A$, então $|TA|^2 = \lambda^2|A|^2$, portanto

$$|A|^2 = |TA|^2 = \lambda^2|A|^2.$$

2 **Verdadeiro.**

Do item 0 o enunciado $\lambda_1 = -1$ é verdadeiro.

Agora provemos que $TA + \lambda_1 A \Leftrightarrow A$ é anti-simétrica.

(i) ($\Rightarrow$) Da hipótese $TA = A^t$ e $TA = -A$, então $A^t = -A$.

(ii) ($\Leftarrow$) sabemos que $TA = A^t$ e $A^t = -A$, então $TA = \lambda_1 A$.

O enunciado anterior é verdadeiro. Logo $V \wedge V = V$.

3 **Falso.**

O traço $(M) = 2$ e $det(M) = -1$. Então $F \wedge V = F$

(4) **Verdadeiro.**

Dado que $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, então $E+D$ é a matriz identidade.

Exercício 33 (ANPEC 2008, Questão 4)

Julgue as afirmativas:

(0) Se uma matriz 2×2 possui determinante igual a um e traço igual a zero, então seus autovalores são números complexos conjugados

(1) Se uma matriz é simétrica, então seus autovalores são números reais.

(2) Transformações lineares dadas por matrizes ortogonais preservam a norma de vetores, mas não necessariamente ângulos entre vetores.

(3) Se uma matriz é idempotente, então ela é singular.

(4) Se uma matriz é simétrica e não-singular, então autovetores associados a autovalores distintos são colineares.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Da hipótese $\det(A) = ad - d = 1$ e $tr(A) = a + d = 0$, onde $\det(A)$ e $tr(A)$ denotam a determinante e o traço de A, respectivamente.

Agora, a equação característica de A é

$$\det(A - \lambda I) = (a - \lambda)(d - \lambda) - cd = \lambda^2 - \lambda(a + d) + ad - cb = 0.$$

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda \det(A) + tr(A) = 0.$$

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1 = 0.$$

Assim, os autovalores complexos são $\lambda_1 = -i$ e $\lambda_2 = i$.

(1) **Verdadeiro.**

Seja λ um autovalor de A e x o autovetor correspondente, então $Ax =$

λx. Tomando conjugados complexos e usando o fato de que A é real, temos

$$\overline{Ax} = \overline{\lambda x}$$
$$\overline{A}\overline{x} = \overline{\lambda}\overline{x}$$
$$A\overline{x} = \overline{\lambda}\overline{x}.$$

Da hipótese A é simétrica ($A = A^t$), então

$$\lambda\overline{x}^t x = \overline{x}^t\lambda x = \overline{x}^t A x = \overline{x}^t A^t x = (A\overline{x})^t x = (\overline{\lambda}\overline{x})^t x = \overline{\lambda}\overline{x}^t x,$$

logo $(\lambda - \overline{\lambda})\overline{x}^t x = 0$. Note que $\overline{x}^t x > 0$, então $\lambda = \overline{\lambda}$. Denotemos $\lambda = a + bi$ então $\overline{\lambda} = a - bi$. Como $a + bi = a - bi$, temos que $b = 0$, portanto os autovalores são reais.

2 **Falso.**

Para este item temos que lembrar de um teorema e dois definições.
Teorema. Dado um operador linear $T : V \to V$, então existe um único operador linear $T^* : V \to V$ tal que

$$\langle T(v), w\rangle = \langle v, T^*(w)\rangle; \forall v, w \in V.$$

O operador T^* é chamado de operador adjunto de T.
Observação. Se A é a matriz da transformação linear T, isto é $T(v) = Av$, então A^t (transposta) é a matriz da adjunta T^*, isto é $T^*(v) = A^t v$.
Definição 1. Uma matiz quadrada A é dita ortogonal se sua matriz inversa coincide com sua matriz transposto. Isto é, uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é ortogonal se $A^{-1} = A^t$ ou $AA^t = A^t A = I$.
Definição 2. Diremos que um operador $T : V \to V$ preserva norma, preserva distancia, ou preserva produto interno, quando, para todos $u, v \in V$, se $||T(v)|| = ||V||, d(T(u), T(v)) = d(u, v)$, e $\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle$, respectivamente.

(i) Preserva a norma

Seja $v \in V$ tal que

$$||T(v)||^2 = \langle T(v), T(v) \rangle.$$

Do teorema anterior

$$||T(v)||^2 = \langle v, T^*(T(v)) \rangle = \langle v, T^*(Av) \rangle = \langle v, A^t Av \rangle.$$

Da definição 1, temos

$$||T(v)||^2 = \langle v, Iv \rangle = \langle v, v \rangle = ||v||^2,$$

$$||T(v)|| = ||Av|| = ||v||.$$

Portanto, a matriz ortogonal A preserva a norma.

(ii) Preserva o produto interno

Sejam $u, v \in V$, e do teorema anterior, temos

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, T^*(T(v)) \rangle = \langle u, T^*(Av) \rangle = \langle u, A^t Av \rangle.$$

Da definição 1, obtemos

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, Iv \rangle = \langle u, v \rangle,$$

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle.$$

Portanto, a matriz A preserva o produto interno.

(iii) Preserva o ângulo entre dois vetores

Seja θ o ângulo entre os vetores $u, v \in V$, então

$$cos\theta = \frac{\langle u, v \rangle}{||u||\ ||v||}.$$

De (i) e (ii), temos

$$cos\theta = \frac{\langle u, v \rangle}{||u||\ ||v||} = \frac{\langle Au, Av \rangle}{||Au||\ ||Av||}.$$

Portanto, a matriz A preserva o ângulo entre dois vetores.

③ **Falso.**
Seja uma matriz idempotente

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

isto é $MM = M$. A matriz M é não singular, ou seja a matriz M admite inversa.

④ **Falso.**
Seja uma matriz simétrica e não singular

$$A = A^t \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

onde A^t é a matriz transposta de A.
A equação característica é $\det(A - \lambda I) = (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$, então os autovalores são $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -1$.

(i) Para o valor $\lambda_1 = 4$
Denotemos $v_1 = (v_{11} v_{12})^t$, então

$$(A - \lambda_1 I)v_1 = (0\ 0)^t$$
$$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 2 \\ 2 & 3 - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Logo $v_{12} = 2v_{11}$. Então, os autovetores para $\lambda_1 = 4$ são $v_1 = t(1, 2); \forall t \in \mathbb{R} - \{0\}$.

(ii) Para o valor $\lambda_2 = -1$

Denotemos $v_2 = (v_{21} v_{22})^t$, então

$$(A - \lambda_2 I)v_2 = (0\ 0)^t$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda_2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Logo $v_{21} = -2v_{22}$. Assim, os autovetores para $\lambda_2 = -1$ são $v_2 = 5(-2, 1); \forall s \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Portanto, os autovetores v_1 e v_2 não são colineares, já que não existe $k \in \mathbb{R}$, tal que $v_1 = kv_2$.

Exercício 34 (ANPEC 2008, Questão 8)

Seja $P(t) = t^n + c_1 t^{n-1} + \cdots + c_{n-1} t + c_n$ o polinômio característico de uma matriz $n \times n$ $A = (a_{ij})$ com entradas $a_{ij} \in R$. Julgue as afirmativas:

(0) Se A é simétrica, então A é diagonalizável.

(1) Se A é invertível e $P(t) = tQ(t) + c_n$, então $Q(A) = (\det A)A^{-1}$.

(2) Se A é invertível, então A e A^{-1} possuem os mesmos autovalores.

(3) $\det(-A) = (-1)^{n+1} \det A$.

(4) Se A é anti-simétrica e n é ímpar, então $\det A \neq 0$.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

(1) **Falso.**

(2) **Falso.**

(3) **Falso.**

(4) **Falso.**

Exercício 35 (ANPEC 2008, Questão 14)

Seja H uma matriz 4×4 idempotente, simétrica e não-singular. Seja $0_{4\times 5}$ a matriz nula de ordem 4×5 e $0_{5\times 4} = 0'_{4\times 5}$ sua transposta. Seja ainda L uma matriz 5×5 ortogonal. Considere a matriz 9×9 dada por :

$$A = \begin{bmatrix} H & 0_{4\times 5} \\ 0_{5\times 4} & L \end{bmatrix}$$

Seja $D = \det(A'A)$ o determinante de $A'A$, em que A' é a transposta de A. Calcule $9D + 3$.

Solução

Resposta: 12

Exercício 36 (ANPEC 2007, Questão 1)

Seja A matriz, na base canônica, do operador linear $L : R^3 \to R^3$ dado por $L(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 4x + 5y + 6z, 7x + 8y + 9z)$. Denote por $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ os autovalores da matriz A. Julgue os itens abaixo:

(0) O posto de A é 2.

(1) $L(1, -2, 1) = (0, 0, 0)$.

(2) $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$.

(3) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 15$.

(4) L é diagonalizável.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

A matriz A é

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

logo o posto de A é 2.

(1) **Verdadeiro.**

$L(1, -2, 1) = (0, 0, 0)$

(2) **Falso.**

Da hipótese

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1 = \lambda & 2 & 3 \\ 4 & 5 - \lambda & 6 \\ 7 & 8 & 9 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda^2 - 15\lambda - 18) = 0.$$

Então os autovalores são $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{15+3\sqrt{33}}{2}$ e $\lambda_3 = \frac{15-3\sqrt{33}}{2}$.
Logo $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 0$.

(3) **Verdadeiro.**

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 15$.

(4) **Verdadeiro.**

Teorema: Uma matriz quadrada A de ordem n é diagonalizável se, e somente se, A possui n autovetores linearmente.
Do item (2), os autovalores λ_1, λ_2 e λ_3 são diferentes.

Exercício 37 (ANPEC 2007, Questão 2)

Considere a matriz:
$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ em que a, b, c são constantes. Julgue os itens abaixo

(0) O traço de A é $\text{tr}(A) = a + b + c + 6$.

(1) O determinante de A é $\det(A) = 6$.

(2) Se a, b, c são constantes negativas, a matriz $A'A$ é definida negativa.

(3) A matriz $A'A$ é simétrica.

(4) Se $a = b = c = 0$, a matriz $A'A$ é definida positiva.

Solução

(0) **Falso.**

O traço de uma matriz quadrada é a soma de todos os elementos da diagonal principal:

$$\operatorname{tr}(A) = 1 + 2 + 3 = 6.$$

① **Verdadeiro.**

O determinante da matriz A é
$\det(A) = 1 \times \det\begin{pmatrix} 2 & c \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - a \times \det\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 & c \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \det(A) =$
$1 \times 6 - 0 + 0 = 6.$

② **Falso.**

Observa que A' é a transposta da matriz A. Para $b = -1$, $a = -1$ e $c = -2$,

$$A'A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 14 \end{bmatrix}.$$

Observação: Uma matriz A de ordem $n \times n$ é dita positiva definida se os determinantes das n submatrizes principais de A são positivos.
Dado, $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 14 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ e $A_3 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$ submatrizes principais de A.
$\det\big(A_1\big) = 36$, $det\big(A_2\big) = 4$ e $det\big(A_3\big) = 1$ por tanto $A'A$ é positiva definida.

③ **Verdadeiro.**

A matriz

$$A'A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & c & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ a & a^2+4 & ab+2c \\ b & ab+2c & b^2+c^2+9 \end{bmatrix}.$$

Observação: A matriz quadrada X é simétrica se $X - X'$.

Então $A'A = (A'A)'$.

(4) **Verdadeiro.**

Para $a = b = c = 0$, temos $A'A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

sejam $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $A_3 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$ submatrizes de $A'A$, donde $det(A_1) = 36,\ det(A_2) = 4$ e $det(A_3) = 1$. Portanto $A'A$ é definida positiva.

Exercício 38 (ANPEC 2007, Questão 3)

Seja $\langle , \rangle$ o produto escalar usual de R^{n+1} e $V = V_1 \wedge \cdots \wedge V_n \in R^{n+1}$ o produto vetorial de vetores linearmente independente $V_1, \ldots, V_n \in R^{n+1}$. Por definição $\langle V, W \rangle = \det A_W$, em que

$$A_W = \begin{pmatrix} W \\ V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}$$

é a matriz cujas linhas são os vetores $W, V_1, \ldots, V_n \in R^{n+1}$. Julgue os itens abaixo:

(0) $\langle V, V_i \rangle = 0$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(1) $\det A_V \neq |V|^2$.

(2) $V \neq 0$.

(3) $\det(A_V A_V^t) = |V|^2 \ \det(g_{ij})$, em que $g_{ij} = \langle V_i, V_j \rangle$.

(4) $|V| = \sqrt{\det(g_{ij})}$.

Solução

Sem perda de generalidade consideramos $n = 2$. Definimos o produto vetorial dos vetores $V_1 = (a_1, a_2, a_3)$ e $V_2 = (b_1, b_2, b_3)$ da seguinte forma

$$V_1 \times V_2 = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

A notação acima também pode ser escrita formalmente como o determinante de uma matriz:

$$V_1 \times V_2 = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix},$$

onde $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ e $n = (0, 0, 1)$.

(0) **Verdadeiro.**
Considere $i = 1$, então
$\left\langle V_1 \times V_2, V_1 \right\rangle = \left\langle (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1), (a_1, a_2, a_3) \right\rangle$
$\left\langle V_1 \times V_2, V_1 \right\rangle = a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_2a_1b_3 + a_3a_1b_2 - a_3a_2b_1,$
$\left\langle V_1 \times V_2, V_1 \right\rangle = 0$
Para $i = 2$ temos
$\left\langle V_1 \times V_2, V_2 \right\rangle = 0.$
Portanto $\left\langle V, V_i \right\rangle = 0$ para $i = 1, 2$.

(1) **Falso.**
Denotemos $x = a_2b_3 - a_3b_2$, $y = a_3b_1 - a_1b_3$ e $z = a_1b_2 - a_2b_1$. Da hipótese

$$A_V = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}.$$

Logo $\det(A_V) = x(a_2b_3 - a_3b_2) + y(a_3b_1 - a_1b_3) + z(a_1b_2 - a_2b_1)$
$\det(A_V) = x^2 + y^2 + z^2 = \| V \|^2$.

(2) **Verdadeiro.**

Suponha que $V = 0$, então

$$a_2b_3 = a_3b_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_2}{a_3} = \frac{b_2}{b_3} \quad \Rightarrow \quad a_2 = t\ a_3 \quad \wedge \quad b_2 = tb_3$$

$$a_3b_1 = a_1b_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1}{a_3} = \frac{b_1}{b_3} \quad \Rightarrow \quad a_1 = s\ a_3 \quad \wedge \quad b_1 = sb_3.$$

Assim temos $V_1 = (sa_3, ta_3, a_3)$ e $V_2 = (sb_3, tb_3, b_3)$, então $V_1 = a_3(s, t, 1)$ e

$V_2 = b_3(s, t, 1)$. Logo V_1 e V_2 são L.D, contradição. Portanto $V \neq 0$.

(3) **Verdadeiro.**

Da hipótese

$\det(A_V A_V^t) = \det(A_V)\det(A_V^t) = |V|^2|V|^2$.

Por outro lado

$\det(g_{ij}) = \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \langle V_1, V_1 \rangle & \langle V_1, V_2 \rangle \\ \langle V_2, V_1 \rangle & \langle V_2, V_2 \rangle \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\det(g_{ij}) &= \det \begin{pmatrix} |V_1|^2 & \langle V_1, V_2 \rangle \\ \langle V_2, V_1 \rangle & |V_2|^2 \end{pmatrix} \\
&= |V_1|^2|V_2|^2 - \langle V_1, V_2 \rangle^2 \\
&= |V_1|^2|V_2|^2 - |V_1|^2|V_2|^2\cos^2(V_1, V_2) \\
&= |V_1|^2|V_2|^2\Big(1 - \cos^2(V_1, V_2)\Big) \\
&= |V_1|^2|V_2|^2\sin^2(V_1, V_2) \\
&= |V_1 \times V_2|^2 = |V|^2.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\det(A_V A_V^t) = |V|^2\det(g_{ij}).$$

(4) **Verdadeiro.**

Do item (3),

$$|V| = \sqrt{\det(g_{ij})}.$$

Exercício 39 (ANPEC 2006, Questão 1)

Avalie as afirmativas abaixo. Seja:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(0) Os valores de A são 1 e -1.

(1) O vetor $(1, 1)$ é autovetor associado ao autovalor 1 e o vetor $(-1, 1)$ é autovetor associado ao autovalor -1.

(2) A matriz A não é ortogonal.

(3) Seja I a matriz identidade de ordem 2. As matrizes $A - I$ e $A + I$ são inversíveis .

(4) Qualquer vetor (x, y) é combinação linear dos vetores de A.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Falso.**

(3) **Falso.**

(4) **Verdadeiro.**

Exercício 40 (ANPEC 2006, Questão 2)

Avalie as opções

(0) Seja A uma matriz $n \times n$ tal que para tudo $u, v \in R^n$ tem-se que $uAv = -vAu$. Então os autovalores de A são todos negativos.

(1) Seja A uma matriz $n \times n$ tal que para tudo $u, v \in R^n$ tem-se que $uAv = -vAu$. Então todo vetor v é ortogonal à sua imagem por A.

(2) Toda matriz quadrada positiva semi-definida de posto 1 é simétrica.

(3) Toda matriz quadrada simétrica de posto 1 é positiva semi-definida.

(4) Seja A uma matriz invertível e A^{-1} sua inversa, então $\det(A)^{-1} = \det(A^{-1})$.

Solução

(0) **Falso.**

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Verdadeiro.**

(3) **Falso.**

(4) **Verdadeiro.**

Exercício 41 (ANPEC 2006, Questão 9)

Avalie as afirmativas. Seja:

$$A = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

(0) Os autovalores de A são 1 e 2.

(1) Os vetores $(-1, 1)$ e $(1, 1)$ são autovetores da matriz A.

(2) Seja A^k o produto de A por si mesma k vezes. Então $\lim_{k \to \infty} A^k = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$.

(3) Os vetores $(-2, 2)$ e $(2, 2)$ também são autovetores.

(4) A matriz A é nilpotente.

Solução

(0) **Falso.**

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Verdadeiro.**

(3) **Verdadeiro.**

(4) **Falso.**

Exercício 42 (ANPEC 2006, Questão 12)

Sejam λ_1 e λ_2 os autovalores de $\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ calcule $\lambda_1\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)$.

Solução

Resposta 7

Exercício 43 (ANPEC 2005, Questão 1)

Avalie as afirmativas:

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$.

(0) O polinômio característico de A é produto de fatores lineares diferentes.

(1) Se $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$ são os autovalores de A, então $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i^2 = \text{traço}(A^2)$.

(2) A é diagonalizável.

(3) Seja I_4 a matriz identidade de dimensão 4×4. Pode-se garantir que $\det(A) = \det(I_4) = 1$.

(4) A dimensão do núcleo da matriz $(A - 5I_4)$ é maior ou igual a dois.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Verdadeiro.**

(3) **Falso.**

(4) **Falso.**

Exercício 44 (ANPEC 2005, Questão 2)

Avalie as afirmativas:

(0) Seja $T : \mathbf{R^4} \to \mathbf{R^4}$ um operador linear auto-adjunto. A matriz de T em relação à base canônica de $\mathbf{R^4}$ é simétrica.

(1) Se uma matriz $n \times n$ A é ortogonal, então $A'A = I$, em que I é a matriz identidade de ordem n.

(2) A matriz $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ é ortogonal.

(3) Os vetores $\nu_1 = (1, -2, 1, 1)$, $\nu_2 = (2, 1, 0, 1)$ é $\nu_3 = (1, 0, 1, 0)$ são linearmente dependentes.

(4) Os vetores $w_1 = (1, -1, 0, 1)$, $w_2 = (2, 4, 3, 2)$ é $w_3 = (-4, 3, -6, 7)$ são ortogonais.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Verdadeiro.**

(3) **Falso.**

(4) **Verdadeiro.**

Exercício 45 (ANPEC 2004, Questão 3)

Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

(0) Se $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$ então a única solução do sistema linear $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ é a solução $\vec{x} = \vec{0}$;

(1) O sistema $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ tem solução se e somente se $b_1 + b_2 + b_3 = 0$;

(2) Se $A\vec{x} = \vec{b}$, então $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$;

(3) Existem duas linhas linearmente dependentes na matriz A;

(4) O posto da matriz A é 2.

Solução

⓪ **Falso.**

Seja a matriz ampliada

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & b_1 \\ 1 & -1 & 1 & b_2 \\ -3 & 2 & 2 & b_3 \end{pmatrix} \longrightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -3/2 & b_1/2 \\ 1 & -1 & 1 & b_2 \\ -3 & 2 & 2 & b_3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -2 & b_1/2 \\ 0 & -1/2 & 5/2 & b_2 - b_1/2 \\ 0 & 1/2 & -5/2 & b_3 + 3b_1/2 \end{pmatrix} \longrightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -2 & b_1/2 \\ 0 & -1/2 & 9 & b_2 - b_1/2 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 + b_2 + b_3 \end{pmatrix}.$$

Dado que posto de A é menor a três, $pos(A) = 2 < 3$, então o sistema não possui solução única. Assim o sistema possui infinitas soluções ou não possui solução.

① **Verdadeiro.**

Se $b_1+b_2+b_3 \neq 0$, então $pos(A) \neq pos(M) = 3$ assim o sistema não possui nenhuma solução. Se $b_1 + b_2 + b_3 = 0$, então $pos(A) = pos(M) < 3$, logo sistema é possível e indeterminado.

② **Falso.**

$$\det(A) = 2\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + 1\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} - 3\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = 0.$$

Como $\det(A) = 0$, então não existe A^{-1}.

③ **Falso.**

Duas linhas quaisquer são linearmente independentes porque

$$(2,-1,-3) \neq t(1,-1,1), \qquad (2,-1,-3) \neq t(-3,2,2), \qquad (1,-1,1) \neq t(-3,2,2)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

④ **Verdadeiro.**

O posto de A é 2.

Exercício 46 (ANPEC 2004, Questão 4)

Responda V (verdadeiro) ou F (falso):

⓪ Os vetores $(1, 2, 4, -1, 5, 1), (2, 4, -1, -1, 0, 0)$ e $(6, 1, 0, 2, 2, 2)$ são linearmente independentes.

① Os vetores $(1, 3, 4), (3, -1, 1), (4, 6, -1)$ e $(0, 1, 2)$ são linearmente independentes.

② Os vetores $(1, 1, 1), (1, 2, 3)$ e $(0, 1, 2)$ são linearmente dependentes.

③ Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são dois autovetores de uma matriz X associados a dois autovalores distintos, então $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são colineares.

④ Se X é uma matriz inversível e simétrica, então seus autovetores são dois-a-dois ortogonais.

Solução

⓪ **Verdadeiro.**

① **Falso.**

② **Verdadeiro.**

③ **Falso.**

④ **Verdadeiro.** Deveria ser falso. Ver comentários na página 249.

Exercício 47 (ANPEC 2004, Questão 5)

Responda V (verdadeiro) ou F (falso):

⓪ Seja A uma matriz 2×2 com $\det(A) = 3$ e $\operatorname{tr}(A) = 4$. Se x e y são seus autovalores, então $x^2 + y^2 > 10$.

① Seja X uma matriz 100×8 com posto igual a 8 e seja I a matriz identidade 100×100. Então $\operatorname{tr}(I - X(X'X)^{-1}X') = 100 - 8 \times 8 = 36$, em que tr denota o traço da matriz.

② Sejam A e B duas matrizes $N \times N$. Se $AB \neq BA$, então $\operatorname{tr}(AB) \neq \operatorname{tr}(BA)$, em que tr denota o traço da matriz.

(3) Seja A uma matriz simétrica não-singular definida positiva. então não necessariamente $\mathrm{tr}(A) > 0$, em que tr denota o traço da matriz.

(4) Se A uma matriz simétrica 2×2 não-singular definida negativa. Então $\mathrm{tr}(A) < 0 < \det(A)$, em que tr denota o traço da matriz e det seu determinante.

Solução

(0) **Falso.**

(1) **Falso.**

(2) **Falso.**

(3) **Falso.**

A matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é definida positiva se $x^t Ax > 0$ para todo vetor $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ não nulo. Denotemos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{para } \ i = 1, 2, \cdots, n.$$

Então, $e_i^t\ A\ e_i = a_{ii} > 0$, isto é para todo $i = 1, 2, \cdots, n$.

Portanto $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} > 0$.

(4) **Verdadeiro.**

Exercício 48 (ANPEC 2003, Questão 4)

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

(0) A é inversível.

(1) Todos os autovalores de A são reais.

(2) A é diagonalizável.

③ A tem um autoespaço de dimensão 2.

④ Se P é uma matriz inversível tal que $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, então $c > 0$.

Solução

⓪ **Falso.**

Calculando o determinante de A, temos

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 0 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + 3 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Então não existe A^{-1}.

① **Verdadeiro.**

Dado que $Ax = \lambda x$, então $(A - \lambda I) = 0$, logo

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ -1 & 1 & 0-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^2 \lambda = 0.$$

Então, os autovalores são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ são números reais.

② **Falso.**

(i) Para $\lambda_1 = 0$, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

então $x_1 = -3x_3$ e $x_2 = -3x_3$. O autoespaço para o sistema anterior é o conjunto $\{(-3, -3, 1)x_3;\ x_3 \in \mathbb{R}\}$. Logo, para $\lambda_1 = 0$ um autovetor é $V_1 = (-3, -3, 1)^T$.

(ii) Para $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, temos

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

então $x_1 = x_2$ e $x_3 = 0$. O autoespaço para o sistema anterior é o conjunto $\{(1,1,0)x_1;\ x_1 \in \mathbb{R}\}$. Logo, para $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ os autovetores são $V_2 = V_3 = (1,1,0)^T$.

As matriz formada pelos autovalores e autovetores são, respectivamente,

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } P = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para que a matriz A seja diagonalizável os autovetores V_1, V_2 e V_3 tem que ser L.I. ou o $\det(P) \neq 0$. Dado que $\det(P) = 0$, então a matriz A não é diagonalizável.

3 **Falso.**

Do item 2 temos os autoespaços

$$\{(-3,-3,1)x_3;\ x_3 \in \mathbb{R}\}, \qquad \{(1,1,0)x_1;\ x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Estes conjuntos tem dimensão 1.

4 **Verdadeiro.**

Definição: Uma matriz B é dita semelhante a uma matriz A se há uma matriz invertível P tal que $PAP^{-1} = B$. Neste caso, note que

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Teorema: Matrizes semelhantes têm os mesmos autovalores.

Logo $\det(B - \lambda I) = -\lambda(1-\lambda)(c-\lambda) = 0$, então $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = \lambda_3 =$

$c = 1$.

Exercício 49 (ANPEC 2003, Questão 5)

Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

(0) Se $\vec{\nu}_1$ e $\vec{\nu}_2$ são vetores linearmente independentes no $\Re^n$, então $\left(\vec{\nu}_1+\frac{1}{2}\vec{\nu}_2\right)$ e $\left(2\vec{\nu}_1+2\vec{\nu}_2\right)$ são linearmente independentes no $\Re^n$.

(1) Dados $\vec{\nu}_1, \vec{\nu}_2 \in \Re^n$ e $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \Re$, se $a_1\vec{\nu}_1+a_2\vec{\nu}_2 = b_1\vec{\nu}_1+b_2\vec{\nu}_2$ implica $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$, então $\vec{\nu}_1$ e $\vec{\nu}_2$ são linearmente independentes.

(2) As coordenadas do vetor $(3, -1, 1) \in \Re^3$ na base ordenada $\left\{\vec{\nu}_1 = (1, 0, 0), \vec{\nu}_2 = (1, 1, 0), \vec{\nu}_3 = (1, 1, 1)\right\}$ são $x_1 = 4, x_2 = -2, x_3 = -1$, em que x_i é a coordenada em relação ao vetor $\vec{\nu}_i, i = 1, 2, 3$.

(3) Seja $T : \Re^n \to \Re^n$ uma transformação linear. Se $\vec{x}_0, \vec{x}_1 \in \Re^n$ são tais que $T(\vec{x}_0) = 0$ e $T(\vec{x}_1) = y \neq 0$, então $T(a\vec{x}_0 + b\vec{x}_1) = y$ quaisquer que sejam os números $a, b \in \Re$.

(4) Seja $T : \Re^3 \to \Re$ uma transformação linear. Então, existe $(a_1, a_2, a_3) \in \Re^3$ tal que $T(x, y, z) = a_1x - a_2y + a_3z$.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

Sejam α e $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha(\vec{v}_1 + \frac{1}{2}\vec{v}_2) + \beta(2\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2) = 0,$$
$$(\alpha + 2\beta)\vec{v}_1 + (\frac{\alpha}{2} + 2\beta)\vec{v}_2 = 0.$$

Dado que $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são linealmente independentes, obtemos

$$\alpha + 2\beta = 0,$$
$$\frac{\alpha}{2} + 2\beta = 0.$$

Logo $\alpha = \beta = 0$. Portanto $(\vec{v}_1 + \frac{1}{2}\vec{v}_2)$ e $(2\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2)$ são linealmente independentes.

(1) **Verdadeiro.**

Dado que $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 = b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2$, então $(a_1 - b_1)\vec{v}_1 + (a_2 - b_2)\vec{v}_2 = 0$. Se $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$, então $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são linealmente independentes.

(2) **Falso.**

Sejam α, β e $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned}
(3,-1,1) &= \alpha(1,0,0) + \beta(1,1,0) + \theta(1,1,1),\\
(3,-1,1) &= (\alpha+\beta+\theta, \beta+\theta, \theta),\\
(3,-1,1) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \theta \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Achando a matriz inversa com o método de Gauss-Jordan

$$\begin{array}{c} L1 \\ L2 \\ L3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} L1 - L_2 \\ L2 \\ L3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} L1 \\ L2 - L_3 \\ L3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Logo

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto $x_1 = 4$, $x_2 = -2$ e $x_3 = 1$.

(3) **Falso.**

A transformação linear

$$T(a\vec{x}_0 + b\vec{x}_1) = aT(\vec{x}_0) + bT(\vec{x}_1).$$

Dado que $T(\vec{x}_0) = 0$ e $T(\vec{x}_1) = y \neq 0$, obtemos

$$T(a\vec{x}_0 + b\vec{x}_1) = by, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Logo, só para $b = 1$ temos $T(a\vec{x}_0 + b\vec{x}_1) = y$.

(4) **Verdadeiro.**

Sejam $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tal que

$$\begin{aligned} T(\alpha(x, y, z) + \beta(x_2, y_2, z_2)) &= T(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2), \\ &= a_1(\alpha x_1 + \beta x_2) - a_2(\alpha y_1 + \beta y_2) + a_3(\alpha z_1 + \beta z_2), \\ &= \alpha(a_1 x_1 - a_2 y_1 + a_3 z_1) + \beta(a_1 x_2 - a_2 y_2 + a_3 z_2), \\ &= \alpha T(x_1, y_1, z_1) + \beta T(x_2, y_2, z_2). \end{aligned}$$

Portanto existe $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = a_1 x - a_2 y + a_3 z$ é transformação linear.

(0) **Verdadeiro.**
(1) **Verdadeiro.**
(2) **Falso.**
(3) **Falso.**
(4) **Verdadeiro.**

Exercício 50 (ANPEC 2002, Questão 5)

Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

(0) Os vetores $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$ e $(1, 0, 1)$ formam una base de $\Re^3$.

(1) Se S é o espaço vetorial gerado pelos vetores $(1, 2, -1)$ e $(3, 0, 1)$ e T o espaço vetorial gerado por $(1, 2, 2)$ e $(2, 1, 3)$, então todo vetor que passa pela origem na direção de $(-1, 1, -1)$ pertence à $S \cap T$.

(2) Os vetores $(1, 2, 3)$ e $(4, 1, -2)$ são ortogonais.

(3) O sistema de equações lineares $Ax = b$ possui uma infinidade de soluções se, e somente se, a dimensão do subespaço nulo (núcleo) da matriz A, N_A, for diferente de 0 ($\dim N_A \neq 0$).

(4) O produto AB dos operadores auto-adjuntos A, B é auto-adjunto se, e somente se, $AB = BA$.

Solução

(0) **Falso.**

Seja a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dado que $\det(A) = 0$, então os vetores $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$ e $(1, 0, 1)$ são L.D.

Portanto $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$ e $(1, 0, 1)$ não é uma base de $\Re^3$.

(1) **Verdadeiro.**

Da hipótese, os conjuntos $S = \{a(1, 2, -1) + b(3, 0, 1); a, b \in \mathbb{R}\}$ e $T = \{c(1, 2, 2) + d(2, 1, 3);\ c, d \in \mathbb{R}\}$. Os vetores que passam por $(0, 0, 0)$ na direção $(-1, 1, -1)$ são de forma $v = e(-1, 1, 1)$ para todo $e \in \mathbb{R}$.

Seja $v = e(-1, 1, -1)$, para qualquer $e \in \mathbb{R}$, então para $a = e/2$, $b = -e/2$, $c = e$ e $d = -e$, temos

$$v = e(-1, 1, -1) = a(1, 2, -1) + b(3, 0, 1) \in S$$

$$v = e(-1, 1, -1) = c(1, 2, 2) + d(2, 1, 3) \in T$$

Portanto, para todo $e \in \mathbb{R}$, $\ v \in S \cap T$.

(2) **Verdadeiro.**

Como o produto interno $(1, 2, 3) \cdot (4, 1, -2) = 0$, então os vetores $(1, 2, 3)$

e $(4, 1, -2)$ são ortogonais.

3 **Falso.**

(ii) $(\Rightarrow)$

Se $Ax = b$ possui infinitos soluções então $\dim(N_A) \neq 0$, onde $N_A = \{x; Ax = 0\}$.

Resposta Verdadeira.

Demonstração

Dado que $Ax = b$ possui infinitas soluções, então $\det(A) = 0$, assim N_A tem mais de um vetor, portanto $\dim(N_A) \neq 0$.

(ii) $(\Leftarrow)$

Se $\dim(N_A) \neq 0$ então $Ax = b$ possui infinitas soluções.

Resposta Falsa.

Contraexemplo

Considere $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ então a dimensão de N_A é diferente de zero. Resolvendo o sistema $Ax = b$ temos uma contradição $1 = 2$. Portanto $Ax = b$ não tem solução.

$$V \Leftrightarrow F$$

$$F.$$

4 **Verdadeiro.**

Definição: Seja V un espaço vetorial. O operador $A : V \to V$ é auto-adjunto se e somente se $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \forall\ \ x, y \in V$. Note que A é uma matriz para este caso.

(i) $(\Rightarrow)$ Se AB é auto-adjunto então $AB = BA$.

Demonstração

Dado que AB é auto-adjunto, temos

$$\begin{aligned}
\big\langle ABx, y\big\rangle &= \big\langle ABy, x\big\rangle \ \ ; \ \ \forall\, x, y \in V \\
\big\langle Ay, Bx\big\rangle &= \big\langle ABy, x\big\rangle \ \ ; \ \ A \text{ é auto-adjunto} \\
\big\langle Bx, Ay\big\rangle &= \big\langle ABy, x\big\rangle \ \ ; \\
\big\langle BAy, x\big\rangle &= \big\langle ABy, x\big\rangle \ \ ; \ \ B \text{ é auto-adjunto.}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\big\langle (BA - AB)y, x\big\rangle = 0 \ \ ; \ \ \forall\, x, y \in V.$$

Então $BA - AB = 0$, portanto $AB = BA$.

(ii) $(\Leftarrow)$ Se $AB = BA$ então AB é auto-adjunto

Demonstração

Sejam x e $y \in V$. Da hipótese temos

$$\begin{aligned}
\big\langle ABx, y\big\rangle &= \big\langle BAx, y\big\rangle \ \ ; \\
\big\langle ABx, y\big\rangle &= \big\langle By, Ax\big\rangle \ \ ; \ \ B \text{ é auto-adjunto,} \\
\big\langle ABx, y\big\rangle &= \big\langle Ax, By\big\rangle \ \ ; \\
\big\langle ABx, y\big\rangle &= \big\langle ABy, x\big\rangle \ \ ; \ \ A \text{ é auto-adjunto.}
\end{aligned}$$

Portanto AB é auto-adjunto.

$$V \Leftrightarrow V$$
$$V.$$

Exercício 51 (ANPEC 2002, Questão 6)

Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

0. Seja A uma matriz não-singular com autovalores r_1, r_2 e r_3 com $r_1 < r_2 < r_3$. Se $r_1 = 1$ e traço $(A) = \det(A) = 6$, então $\frac{r_2}{r_1} - r_3 = -2$.
1. Uma matriz é singular se, e somente se, possui um autovalor igual a 0.

2 Seja I uma matriz identidade $n \times n$ e X uma matriz $n \times k$ com posto igual a k. Então, se $A = [I - X(X'X)^{-1}X']$ então A é simétrica de $\det(A'A) > \det(A)$.

3 Sejam A e B matrizes quadradas de mesma dimensão. Se $AB = BA$ então
$\det\left[(A+B)^2\right] = \det(A)^2 + 2\det(A)\det(B) + \det(B)^2$.

4 Sejam A e B matrizes triangulares inferiores $n \times n$, cujos elementos da diagonal principal são dados por $a_{11}, ..., a_{nn}$ e $b_{11}, ..., b_{nn}$, respectivamente. Então
$\det(A+B) = \Pi(a_{ii} + b_{ii})$

Solução

0 **Falso.**

Uma matriz com autovalores r_1, r_2 e r_3 é

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{pmatrix}.$$

Para $r_1 = 1$, temos $\det(A) = r_2 r_3 = 6$ e $tr(A) = 1 + r_2 + r_3 = 6$. Logo $r_2 = 2$ e $r_3 = 3$ ou $r_2 = 3$ e $r_3 = 2$. Portanto $r_2/r_1 - r_3 = -1$ ou $r_2/r_1 - r_3 = 1$.

1 **Verdadeiro.**

(i) $(\Rightarrow)$ Se $\det(A) = 0$, então existe um autovalor $\lambda = 0$ de A.

Demonstração

Da hipótese $\det(A) = \det(A - 0I) = 0$, então existe um autovalor $\lambda = 0$.

(ii) $(\Leftarrow)$ Se $\lambda = 0$ autovalor de A, então $\det(A) = 0$.

Demonstração

Dado que $\lambda = 0$, então $\det(A - \lambda I) = \det(A) = 0$.

$$V \Longleftrightarrow V$$

$$V.$$

(2) **Falso.**

(3) **Falso.**

Sejam as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

talque $AB = BA$. Então

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Logo, $\det[(A+B)^2] = 81 \neq \det(A)^2 + 2\det(A)\det(B) + \det(B)^2 = 25.$

(4) **Verdadeiro.**

Exercício 52 (ANPEC 2001, Questão 5)

Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

(0) Um sistema homogênea de equações lineares sempre tem solução;

(1) A regra de Cramer para resolução de um sistema de equações lineares só pode ser aplicada se a matriz dos coeficientes do sistema for inversível;

(2) Para que um sistema homogêneo de equações lineares tenha infinitas soluções basta que o determinantes da matriz dos coeficientes seja diferente de zero;

(3) Um sistema homogêneo de m equações lineares com n incógnitas tem infinitas soluções se $n > m$;

(4) Qualquer sistema de m equações lineares com n incógnitas tem infinitas soluções se $n > m$.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Falso.**

(3) **Verdadeiro.**

(4) **Falso.**

Exercício 53 (ANPEC 2001, Questão 7)

Seja T o operador linear cuja matriz na base natural $\big\{(1,0),(0,1)\big\}$ é dada por $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

(0) A imagem de T é o R^2;

(1) O núcleo de T é uma reta em R^2;

(2) Os autovalores de T são positivos e distintos;

(3) Os autovetores de T são ortogonais;

(4) O operador T possui um operador inverso T^{-1} tal que para cada ponto $(x,y) \in R^2$ tem-se $T^{-1}(T(x,y)) = (x,y)$.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

(1) **Falso.**

(2) **Verdadeiro.**

(3) **Falso.**

(4) **Verdadeiro.**

Exercício 54 (ANPEC 2000, Questão 9)

Seja T o operador linear cuja matriz na base natural $\big\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big\}$ é dada por $\begin{pmatrix} 4 & \sqrt{6} & 0 \\ \sqrt{6} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

(0) T possui dos autovalores distintos;

(1) T é um operador diagonalizável;

(2) Existe um autoespaço de dimensão 2 associados ao operador T;

(3) Autovetores de T associados à autovalores diferentes são ortogonais;

(4) Os vetores $t\big(-2, \sqrt{6}, \sqrt{6}\big), t \in \Re$, pertencem ao autoespaço de T associados a um dos seus vetores.

Solução

(0) **Verdadeiro.**
$\det(T - \lambda I) = (\lambda - 6)(\lambda - 1)^2 = 0$, então $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 6$.

(1) **Verdadeiro.**

(i) para $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$(T - I)x = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{6} & 0 \\ \sqrt{6} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

então $x_2 = \frac{-\sqrt{6}}{2}\, x_1$. Logo o autoespaço para $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ é $V = \big\{\big(x_1, \frac{-\sqrt{6}}{2}\, x_1, x_3\big); x_1, x_3 \in \mathbb{R}\big\}$. Assim os autovetores são $(0, 0, 1)$ e $(1, \frac{-\sqrt{6}}{2}, 0)$.

(ii) Para $\lambda_3 = 6$

$$(T - GI)x = \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{6} & 0 \\ \sqrt{6} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

então $x_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}\, x_1$ e $x_3 = 0$. Logo o espaço é

$$W = \Big\{\Big(1, \frac{\sqrt{6}}{3}, 0, \Big)x_1; x_1 \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Assim um autovetor é $(1, \frac{\sqrt{6}}{3}, 0)$. Logo denotemos

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{6/2} & \sqrt{6/3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

como $\det(p) \neq 0$, então existe P^{-1}, então $T = PDP^{-1}$. Portanto T é diagonalizável.

2 **Verdadeiro.**
Do item 1, a dimensão de V é 2.

3 **Verdadeiro.**
Do item 1, para os autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ temos os autovetores $(0,0,1)$ e $(1, \frac{-\sqrt{6}}{2}, 0)$. Para $\lambda_3 = 6$ temos o autovetor $(1, \frac{\sqrt{6}}{3}, 0)$. Como $(0,0,1)\ (1, \frac{\sqrt{6}}{3}, 0) = 0$ e $(1, \frac{-\sqrt{6}}{2}, 0)\ (1, \frac{\sqrt{6}}{3}, 0) = 0$, os autovalores são ortogonais.

4 **Verdadeiro.**
Do item 1 $V = \left\{\left(x_1, \frac{-\sqrt{6}}{2}x_1, x_3\right); x_1, x_3 \in \mathbb{R}\right\}$, então para $x_1 = -2t$ e $x_3 = \sqrt{6}t$ temos que $t(-2, \sqrt{6}, \sqrt{6}) \in V$.

Exercício 55 (ANPEC 2000, Questão 12)

Sendo V o espaço vetorial de dimensão 3 sobre o corpo R, munido do produto interno Euclidiano $(\cdot) : x \cdot y \equiv x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \quad ; x, y \in V$, define-se uma norma $\|\cdot\|$ pelo produto interno: $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$, $x \in V$. Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

0 Se $\{u_1, u_2\}$ é um conjunto de vetores LI (linearmente independentes) de V, então $\{u_1, u_2, 0\}$ é também LI em V;

1 Se todos os vetores de V são combinações lineares de $2k+1$ vetores de V (para qualquer k, inteiro positivo) então $2k$ vetores neste espaço são LI;

(2) Se X, Y, Z são vetores LI do espaço vetorial V, então os vetores $A = X + 3Z$; $B = X - \frac{1}{2}Y + Z$; $C = -X + Y + Z$ também serão LI em V;

(3) O ponto $C(3, -16, 18)$ não pertence à reta que passa pelos pontos $A(-5, 0, 2)$ e $B(-4, -2, 4)$;

(4) Sejam u_1, u_2, ν vetores en V tais que $u_1.\nu = D_1$, $u_2.\nu = D_2$ e o vetor $u_1 - u_2$ é paralelo ao vetor ν. Então, $\| u_1 - u_2 \| = \frac{|D_2 - D_1|}{\|\nu\|}$.

Solução

(0) **Falso.**

Da hipótese, se $\alpha_1\ u_1 + \alpha_2\ u_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Então, $\alpha_1\ u_1 + \alpha_2\ u_2 + \alpha_3\ 0 = 0 \Rightarrow$ uma solução é $\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad \wedge \quad \alpha_3 = 1$. Portanto os vetores $\{u_1, u_2, 0\}$ não são LI.

(1) **Falso.**

Como dimensão de V é 3, então existe no máximo 3 vetores LI. Para $k = 2$ temos 4 vetores LI, isto é contraditório.

(2) **Falso.**

Sejam α_1, α_2 e α_3 tal que

$\alpha_1\ A + \alpha_2\ B + \alpha_3\ C = 0$

$\alpha_1(X + 3Z) + \alpha_2\big(X - \frac{1}{2}\ Y + Z\big) + \alpha_3\big(-X + Y + Z\big) = 0$

$\big(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3\big)X + \big(-\frac{\alpha_2}{2} + \alpha_3\big)Y + \big(3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\big)Z = 0.$

Dado que X, Y e Z são L.I, então $\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0, \quad -\frac{\alpha_2}{2} + \alpha_3 = 0,$ $3\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$. Assim temos $\alpha_2 = 2\ \alpha_3$ e $\alpha_1 = -\alpha_3$. Logo, uma solução ao sistema de equações é $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 2$ e $\alpha_3 = 1$.

Portanto os vetores A, B e C são L.D.

(3) **Falso.**

Sejam os vetores $\overrightarrow{AC} = (3, -16, 18) - (-5, 0, 2) = (8, -16, 16)$ e $\overrightarrow{AB} = (-4, -2, 4) - (-5, 0, 2) = (1, -2, 2)$.

Observação: Se C não pertence à reta que passa pelos pontos A e B,

então $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$ não são paralelos, então $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$ são L.I.
Note que $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{AB}$, dado que $\overrightarrow{AC} = 8\ \overrightarrow{AB}$. Portanto $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$ são L.D. e C pertence à reta que passa pelos pontos A e B.

(4) **Verdadeiro.**
Dado que $u_1 - u_2 \parallel \nu$, então existe t tal que $u_1 - u_2 = t\nu$. Logo, $\| u_1 - u_2 \| = |t| \| \nu \|$.
Por outro lado $u_1 \cdot \nu - u_2 \cdot \nu = D_1 - D_2$, então $(u_1 - u_2) \cdot \nu = D_1 - D_2$, da hipótese $u_1 - u_2 = t\nu$, assim temos $t\nu \cdot \nu = D_1 - D_2$, aplicando norma na equação anterior $|t| \| \nu \|^2 = |D_2 - D_1|$. Da ultima equação e da $\| u_1 - u_2 \| = |t| \| \nu \|$ temos

$$\| u_1 - u_2 \| = \frac{|D_2 - D_1|}{\| \nu \|}.$$

Exercício 56 (ANPEC 1999, Questão 1)
Con relação ao sistema de equações:

$$\begin{aligned} 2x + y - \frac{1}{z} &= \frac{13}{2} \\ x - y + \frac{2}{z} &= 0 \\ 2x - 3y + \frac{1}{z} &= -\frac{9}{2} \end{aligned}$$

(0) Possui infinitas soluções.
(1) Não possui solução.
(2) Existe uma solução para a qual $z = 2$.

Solução

(0) **Falso.**
Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, logo $\det(A) = 14$. Dado que $\det(A) \neq 0$,

então o sistema possui uma única solução.

1. **Falso.**
2. **Verdadeiro.**

Aplicando a regra de Cramer

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\det(A)} \det \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 13/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -9/2 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2}.$$

Portanto $z = 2$.

Exercício 57 (ANPEC 1999, Questão 6)

Seja $\mathbf{X}$ matriz quadrada da ordem n cujos elementos são número reais nem todos nulos. Indique se falsa ou verdadeira as afirmações:

0. $\mathbf{X}$ é necessariamente não-singular.
1. Se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ forem os seus valores característicos e se $\mathbf{X}$ for singular, o produto deles será necessariamente nulo.
2. A matriz inversa de $\mathbf{X}$, se existir, atenderá necessariamente à equação: $\mathbf{X}.\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{I}$, donde $\mathbf{I}$ representa a matriz identidade de ordem n.
3. Quando qualquer das linhas de $\mathbf{X}$ pode ser expressa como combinação linear de outra(s), pelo menos um dos valores característicos é nulo.

Solução

0. **Falso.**
1. **Verdadeiro.**
2. **Verdadeiro.**
3. **Verdadeiro.**

Exercício 58 (ANPEC 1999, Questão 14)

Classifique como verdadeiro ou falsa cada uma das afirmativas sobre a matriz

A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(0) Suas colunas são vetores linearmente independentes.

(1) Seu determinante é nulo.

(2) É matriz ortogonal.

(3) Suas colunas constituem uma base para R^4.

(4) Suas linhas constituem uma base para R^4.

Solução

(0) **Falso.**

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Falso.**

(3) **Falso.**

(4) **Falso.**

Exercício 59 (ANPEC 1998, Questão 3)

Uma matriz **A**, quadrada de dimensão **n** é dita ortogonal quando

$$\mathbf{A^t A = A A^t = I_n},$$

onde o superescrito $^{\mathbf{t}}$ denota transposição e $\mathbf{I_n}$ é a identidade de dimensão **n**. Considere uma matriz ortogonal **A** de ordem **n**. Classifique como verdadeira ou falsa cada uma das afirmações (sobre **A**) abaixo:

(0) O valor absoluto do seu determinante é igual a um.

(1) $\mathbf{A^{-1} = A^t}$.

(2) Suas colunas constituem uma base para $\Re^n$.

(3) Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são vetores (coluna) de $\Re^n$ tal que $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ então o comprimento de $\mathbf{y}$ é maior que o comprimento de $\mathbf{x}$.

(4) O produto interno de $\mathbf{Ax}$ por $\mathbf{Ay}$ é igual ao produto interno de $\mathbf{x}$ por $\mathbf{y}$ multiplicado pelo determinante **A**.

⑤ Sua inversa e sua transposta são também matrizes ortogonais.

Solução

⓪ **Verdadeiro.**

① **Verdadeiro.**

② **Verdadeiro.**

③ **Falso.**

④ **Falso.**

Da hipótese

$$< \mathbf{Ax}, \mathbf{Ay} >=< \mathbf{x}, \mathbf{y} > \det(\mathbf{A}).$$

Por definição de matriz ortogonal

$$< \mathbf{Ax}, \mathbf{Ay} >=< \mathbf{x}, \mathbf{y} > .$$

Das ultimas equações

$$\det(\mathbf{A}) = 1.$$

Considere o seguinte contraexemplo. Seja matriz ortogonal

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Então

$$\det(\mathbf{A}) = 1/3,$$

contradição.

⑤ **Verdadeiro.**

Exercício 60 (ANPEC 1998, Questão 15)

Considere uma matriz de números reais $\mathbf{X}$, nem todos nulos,

⓪ A matriz $\mathbf{X^tX}$ é sempre simétrica e singular.

① O escalar $\mathbf{v^tX^tXv}$, onde $\mathbf{v}$ é vetor não nulo, é não-negativo.

② Os valores característicos de $\mathbf{X^tX}$ podem ser negativos.

(3) Se $\mathbf{X}$ é quadrada então $\mathbf{X^tX}$ é invertível.

Solução

(0) **Falso.**

Um contraexemplo simples é,

$$X = X^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

X é simétrica, mas não é singular.

$$V \Rightarrow F$$

$$F.$$

(1) **Verdadeiro.**

Conforme o enunciado, $V^t\ X^t\ X_V$ é um escalar, ou seja , X_V é um vetor. Denotemos $X_V = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$. Logo

$$V^t\ X^t\ X_V = (X_V)^t\ X_V = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2$$

por tanto

$$V^t\ X^t\ X_V \geq 0.$$

(2) **Falso.**

Seja λ um autovalor e V um autovetor correspondente.

Logo

$$X^t X_V = \lambda V$$
$$V^t X^t X_V = \lambda V^t V.$$

Do item (1) $V^t\ X^t\ X_V \geq 0$, então $\lambda\ V^t\ V \geq 0$. Dado que V é um vetor não nulo, então $V^t\ V > 0$. Portanto $\lambda \geq 0$.

(3) **Falso.**

Como contraexemplo simples considere

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então $\det(X\ X^t) = 0$, portanto $X\ X^t$ não é invertível.

Exercício 61 (ANPEC 1997, Questão 13)

Sejam A e B matrizes quadradas de mesma dimensão. Julgue as afirmativas abaixo:

(0) Se A^t é a transporta de A, então $\det(A^tA) \geq 0$.

(1) Se A é simétrica e não-singular, então A^{-1} é simétrica.

(2) O espaço gerado pelas colunas de B é igual ao espaço gerado pelas suas linhas.

(3) Se A é simétrica, então A define um operador linear autoadjunto em relação a uma base ortonormal.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

Por propriedades, temos

$$\det(A^tA) = \det(A^t)\det(A) = \det(A).\det(A) = \overset{2}{\det}(A) \geq 0.$$

(1) **Verdadeiro.**

Dado que $\det(A) \neq 0$, então existe A^{-1}. Notei que $A^t = A$. Por propriedade, temos

$$(A\ \ A^{-1})^t = I,$$

$$A^{-1^t}\ \ A^t = I,$$

$$A^{-1^t}\ \ A = I.$$

Logo da ultima igualdade, obtemos $A^{-1} = A^{-1^t}$.

(2) **Falso.**

Considere o seguinte contraexemplo. Seja a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então o espaço coluna da matriz B é

$$span\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \alpha \ \text{ e } \ \beta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Agora, o espaço linha da matriz B é

$$span\Big\{[1 \ \ 0], [1, 0]\Big\} = \Big\{\alpha[1 \ \ 0] + \beta[1 \ \ 0], \ \alpha \ e \ \beta \in \mathbb{R}\Big\} = \Big\{[\alpha + \beta \ \ 0], \ \alpha \ \text{ e } \ \beta \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Portanto, o espaço linha e o espaço coluna não são iguais.

Observação: O espaço linha de A é igual ao espaço coluna de A^t.

(3) **Verdadeiro.**

Uma matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, não necessariamente simétrica, cujos coeficientes são reais, satisfaz

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle, \quad \text{para todo} \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Da hipótese, temos $A = A^T$, então A é autoadjunto, isto é

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \quad \text{para todo} \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Sejam λ_1 e λ_2 autovalores distintos de A e x, y respectivos autovetores. Então

$$\lambda_1 \langle x, y \rangle = \langle \lambda_1 x, y \rangle = \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle = \langle x, \lambda_2 y \rangle = \lambda_2 \langle x, y \rangle,$$

de modo que $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle x, y \rangle = 0$. Dado que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, concluímos que $\langle x, y \rangle = 0$. Logo, os autovetores são ortogonais um a um. Portanto, a base é ortonormal.

Exercício 62 (ANPEC 1997, Questão 14)

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$. Julgue as afirmativas abaixo:

(0) $[(\det\ A) - 98]^2 + 11 = tr\ A$ (onde $tr\ A$ é o traço de A).

(1) A é uma matriz idempotente.

(2) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{92}$.

(3) O núcleo do operador linear definido pela matriz A é o vetor zero.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

O determinante de A é

$$\det(A) = 4 \times \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - 1 \times \det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 5 \times \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 4 \times 13 - 1 \times (-11) - 5 \times (-7) = 98.$$

Também temos $tr(A) = 11$.

(1) **Falso.**

(2) **Falso.**

$$\det(A \times A^{-1}) = \det(I)$$
$$\det(A) \times \det(A^{-1}) = 1.$$

Então

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{98}.$$

(3) **Verdadeiro.**

Exercício 63 (ANPEC 1997, Questão 15)

Considere o seguinte sistema linear em x, y, z

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ ax - 2z = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

Julgue as afirmativas abaixo:

(0) Quando $a = 10$, o sistema não tem solução não-trivial.

(1) Não existe solução não-trivial, qualquer que seja o valor de a.

(2) Se $a = 5$, existe uma única solução não-trivial.

(3) Existe uma única solução não-trivial, qualquer que seja o valor de a.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

(1) **Falso.**

(2) **Falso.**

(3) **Falso.**

Exercício 64 (ANPEC 1996, Questão 11)

Indique se as afirmativas são verdadeiras ou falsas:

(0) No $\Re^3$, a distância entre os pontos $(1, 2, 3)$ e $(2, 0, 5)$ é 3.

(1) Se x e y são vetores no $\Re^n$, então eles são paralelos se e somente se seu produto interno for zero.

(2) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

(3) Considere $x = (3, 0, 4)$ e $y = \big(2, \sqrt{8}, 2\big)$, vetores no $\Re^3$. Então $\| x \| = 5$, $\| y \| = 4$ e dez vezes o coseno do ângulo entre x e y é igual à 7.

(4) No $\Re^2$, a inclinação da reta que passa nos pontos $\big(-1, 3\big)$ e $\big(0, 0\big)$ é igual à 3.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

(1) **Falso.**

(2) **Verdadeiro.**

(3) **Verdadeiro.**

O produto interno entre $x = (3, 0, 4)$ e $y = \left(2, \sqrt{8}, 2\right)$ é $< x, y >= 14$. Da hipótese $\|x\| = 5$, $\|y\| = 4$ e $\cos(x, y) = 7/10$. Logo, o ângulo entre os vetores x e y é:

$$< x, y >= \|x\|\|y\| \cos(x, y),$$

$$14 = 5 \times 4 \times \frac{7}{10}.$$

(4) **Falso.**

Exercício 65 (ANPEC 1996, Questão 14)

Indique as afirmativas verdadeiras ou falsas:

Considere as matrizes A e B, ambas quadradas de ordem n. Afirma-se:

(0) Se A é não-singular então $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

(1) $|A| = |A'|$.

(2) Traço $\left(A + B\right)$ = traço $\left(A\right)$ + traço$\left(B\right)$.

(3) Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, os autovalores de A. Se A é não singular, $\Pi_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$.

(4) Sejam $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ os autovalores se B, e $B = A^{-1}$. Então

$$\left[\Pi_{i=1}^{n}\ \lambda_i\right] \cdot \left[\Pi_{i=1}^{n} \theta_i\right] = 1.$$

(5) Se A e não singular, então $\left(A'\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)'$.

(6) Se A e B são não singulares, então $\left(AB\right)^{-1} = A^{-1}\ \ B^{-1}$.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

Da hipótese $\det(A^{-1}A) = \det(I) = 1$, então $\det(A^{-1}) \det(A) = 1$. Portanto

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Verdadeiro.**

(3) **Falso.**

Considere o seguinte contraexemplo. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, então

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(1+\lambda) = 0.$$

Logo obtemos $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. Portanto $\lambda_1 \times \lambda_2 < 0$.

(4) **Verdadeiro.**

Dado que $\det(A) \neq 0$ então $\lambda_i \neq 0$ para $i = 1, 2, \cdots, n$. Seja λ_i um autovalor de A então $Ax = \lambda_i x$. Logo

$$A^{-1}x = \frac{1}{\lambda_i}x$$
$$Bx = = \theta_i x,$$

assim temos $\theta_i = 1/\lambda_i$. Portanto $\left[\Pi_{i=1}^n \lambda_i\right] \cdot \left[\Pi_{i=1}^n \theta_i\right] = 1$.

(5) **Verdadeiro.**

(6) **Falso.**

Exercício 66 (ANPEC 1996, Questão 15)

Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Indique as afirmativas verdadeiras e falsas:

(0) O sistema acima não tem solução.

① Caso $x_4 = 0$, o sistema acima tem somente solução trivial.
② Caso $x_4 = -2$, as soluções para x_1, x_2 e x_3 são todas positivas.

Solução

⓪ **Falso.**
① **Verdadeiro.**
② **Falso.**

Exercício 67 (ANPEC 1995, Questão 11)

Dado o sistema

$$\begin{aligned} x + y + kz &= 1 \\ 2x + k^2 z &= -1 \\ x + y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

Indique se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas.

⓪ Para $k = 1$, existem infinitas soluções.
① Para $k = 3$, existe uma única solução.
② Para $k = 2$, existem infinitas soluções.
③ Para $k = 2$, não existe solução.
④ Para $k = 2$, existe uma única solução.

Solução

⓪ **Falso.**
① **Verdadeiro.**
② **Falso.**
③ **Verdadeiro.**
④ **Falso.**

Exercício 68 (ANPEC 1995, Questão 13)

Indique se as afirmativas abaixo são vedadeiras ou falsas.

⓪ Se A é uma matriz ortogonal, então $\det(A)$ pode ser negativo.
① Seja A uma matriz quadrada de ordem ímpar. Se $A' = -A$, então, $\det(A) = 0$.

(2) Seja A uma matriz não singular de ordem n. Se $A = A^{-1}$, então, A é necessariamente uma matriz identidade.

(3) Seja A uma matriz triangular não singular, então, se os elementos fora da diagonal principal são todos negativos, $\det(A)$ é positivo.

(4) Dadas duas matrizes A e B, se duas inversas existem, então, $\det(A) \neq 0$.

Solução

(0) **Falso.**

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Verdadeiro.**

(3) **Falso.**

(4) **Falso.**

Exercício 69 (ANPEC 1994, Questão 8)

Seja a matriz A definido por: $A = I_n - X(X'X)^{-1}X'$. Marque os itens verdadeiros e os falsos.

(0) A matriz A só é definida se a matriz X possuir n colunas.

(1) A matriz A é idempotente.

(2) O traço da matriz A pode ser igual a n.

(3) A matriz A é não-singular.

(4) $A = A'$.

Solução

(0) **Falso.**

Suponha que X seja matriz $n \times k$, i.e., $X \in \mathbb{R}^{n \times k}$. Então $X'X \in \mathbb{R}^{k \times k}$ e portanto $(X'X)^{-1} \in \mathbb{R}^{k \times k}$, se existir. Logo, $X(X'X)^{-1}X' \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Basta portanto que X possua n linhas.

(1) **Verdadeiro.**

Uma matriz é dita idempotente se $A^2 = A$. Note que

$$\begin{aligned}A^2 = (I_n - X(X'X)^{-1}X')(I_n - X(X'X)^{-1}X') \\ = I_n - 2X(X'X)^{-1}X' + X(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}X' \\ = I_n - 2X(X'X)^{-1}X' + X(X'X)^{-1}X' = A.\end{aligned}$$

(2) **Falso.**

Note que

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(I_n - X(X'X)^{-1}X') = n - \operatorname{tr}(X(X'X)^{-1}X') \\ = n - \operatorname{tr}(X'X(X'X)^{-1}) = n - \operatorname{tr}(I_k) = n - k < n.\end{aligned}$$

A igualdade acima baseia-se na incrível igualdade para traços:

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA),$$

para todas matrizes $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

(3) **Falso.**

Basta tomar $n = 1$ e notar que $A = 0$ para $X \neq 0$. Na verdade, para todo X $n \times n$ invertível, temos

$$X(X'X)^{-1}X' = XX^{-1}X'^{-1}X' = I_n \implies A = 0_{n\times n}.$$

Uma elegante solução geral proposta pelo Luciano Venturim (monitor 2022) segue.

Primeiro, os autovalores de uma matriz idempotente só podem ser 0 ou 1: se $AX = \lambda x$ para $x \neq 0$, então

$$\lambda x = Ax = A^2x = \lambda Ax = \lambda^2 x \implies \lambda(1-\lambda)x = 0$$

Portanto $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$. Sejam $\lambda_1 \dots \lambda_n$ os autovalores (possivelmente repetidos) da matriz A. Temos que

$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = n - k.$$

Como os autovalores são 0 ou 1, então A possui $n-k$ autovalores um e k autovalores zero. Mas então

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = 0,$$

e portanto A é *sempre* singular.

(4) **Verdadeiro.**

Basta ver que $X(X'X)^{-1}X'$ é simétrica:

$$(X(X'X)^{-1}X')' = X''((X'X)^{-1})'X' = X((X'X)')^{-1}X' = X(X'X)^{-1}X'.$$

Exercício 70 (ANPEC 1994, Questão 14)

Se A, B e C são matrizes, indique como verdadeira ou falsa cada uma das afirmações abaixo:

(0) Para quaisquer A, B e C, todas quadradas da mesma ordem,

$$\text{tr}(ABC) = \text{tr}(CBA).$$

(1) Se $AB = 0$, então, necessariamente, ou A ou B é nula, ou ambas são nulas.

(2) Se A, B e C são quadradas de mesma ordem e não singulares, então, $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

(3) Para quaisquer A, B e C, quadradas e de mesma ordem,

$$\det(A + B + C) = \det(A) + \det(B) + \det(C).$$

(4) Se A é quadrada e não singular, então $\det(2A) = 2[\det(A)]$.

Solução

0 **Falso.**

1 **Falso.**

Considere o seguinte contraexemplo. Sejam as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

então $AB = 0$, mas as matrizes A e B não são nulas.

2 **Verdadeiro.**

3 **Falso.**

4 **Falso.**

Exercício 71 (ANPEC 1993, Questão 8)

Assinale as afirmações verdadeiras e as falsas:

0 Em $\Re^3$ quatro vetores quaisquer não nulos são sempre linearmente dependentes.

1 O núcleo de uma transformação linear é um subespaço vetorial de dimensão igual a 1.

2 Um espaço vetorial possui uma única base.

3 O conjunto das soluções de um sistema de equações lineares é um espaço vetorial.

4 Os vetores $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{u} = (0, 1, 2)$ e $\vec{w} = (0, 0, 1)$ são linearmente independente em $\Re^3$.

Solução

0 **Verdadeiro.**

1 **Falso.**

2 **Falso.**

3 **Falso.**

4 **Verdadeiro.**

Exercício 72 (ANPEC 1993, Questão 9)

Dados: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$, decida se são verdadeiras ou falsas as afirmações abaixo:

(0) A matriz inversa de A possui cinco elementos negativos.

(1) O sistema $AX = C$ possui a solução única $x = 2,\ y = 3,\ z = 1$.

(2) A matriz A é equivalente à matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

(3) O posto da matriz A é igual a 2.

(4) O traço da matriz A é igual a 0.

Solução

(0) **Falso (Gabarito é Verdadeiro).**

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{6}{17} & \frac{8}{17} & \frac{-5}{17} \\ \frac{-5}{17} & \frac{-1}{17} & \frac{7}{17} \\ \frac{-7}{17} & \frac{2}{17} & \frac{3}{17} \end{bmatrix}$$

(1) **Verdadeiro.**

Do sistema de equações temos $X = A^{-1}c$, então

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & -5 \\ 15 & -1 & 7 \\ -7 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 30 & + \ 64 & - \ 60 \\ -25 & -8 & + \ 84 \\ -35 & + \ 16 & + \ 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 34 \\ 51 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) **Falso.**

(3) **Falso.**

(4) **Verdadeiro.**

Exercício 73 (ANPEC 1992, Questão 7)

Indique, para o sistema abaixo, quais as afirmativas verdadeiras e quais as falsas:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$$

(0) Duas equações podem ser ignoradas ao mesmo tempo, sem que isso altere o conjunto de soluções do sistema.

(1) A quarta equação pode ser ignorada, sem que isso altere o conjunto de soluções do sistema.

(2) A primeira equação pode ser ignorada, sem que isso altere o conjunto de soluções do sistema.

(3) Há um número finito de soluções.

(4) O conjunto de soluções do sistema é vazio.

Solução

(0)

(1)

(2)

(3)

(4)

Exercício 74 (ANPEC 1992, Questão 8)

Dada a matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & -8 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, indique se as afirmativas abaixo são falsas ou verdadeiras:

(0) M é invertível.

(1) Seu posto é três.

2. M é uma matriz anti-simétrica.
3. Há três colunas lineares independentes.
4. As linhas de M são lineares independentes.

Solução

0.
1.
2.
3.
4.

Exercício 75 (ANPEC 1992, Questão 9)

Dada a matriz matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, indique as afirmações verdadeiras e as falsas:

0. Os autovalores têm sinais contrários.
1. Os autovetores são ortogonais.
2. A cada autovalor está associado apenas um autovetor unitário.
3. Os autovalores são imaginários puros.
4. Há autovetores formando ângulo de 120 graus.

Solução

0. **Falso.**
   Dado que $Ax = \lambda x$, então $(A - \lambda I)x = 0$, logo
   $$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0.$$
   Então $\lambda = 2 - \sqrt{3}$ ou $\lambda = 2 + \sqrt{3}$.

1. **Falso.**
   Seja $\lambda = 2 - \sqrt{3}$ e $x = (a, b)$, então do sistema $Ax = \lambda x$, temos $x = (1, -\sqrt{3})a$
   Seja $\lambda = 2 + \sqrt{3}$ e $x = (c, d)$, então do sistema $Ax = \lambda x$, temos $x = (1, \sqrt{3})c$

O produto dos autovetores é $(1, -\sqrt{3})a \times (1, \sqrt{3})c = 2ac$. Para $a \neq 0$ e $c \neq 0$, os autovetores não são ortogonais.

(2) **Falso.**

Para cada autovalor existe infinitos autovetores, então existe infinitos autovetores unitários.

(3) **Falso.**

Do item (0), os autovalores são reais.

(4) **Verdadeiro.**

Do item (1), para $a = 1$ e $b = 1$, temos os autovetores $(1, -\sqrt{3})$ e $(1, \sqrt{3})$. Então

$$\cos(120°) = \frac{\left\langle (1, -\sqrt{3}), (1, \sqrt{3}) \right\rangle}{\|(1, -\sqrt{3})\| \, \|(1, \sqrt{3})\|} = -\frac{1}{2}.$$

Exercício 76 (ANPEC 1992, Questão 11)

Se uma matriz quadrada A, de ordem n, tem todos os elementos da diagonal principal diferentes de zero e cada $a_{ij} = 0$ se $i < j$, classifique como falsa ou verdadeira:

(0) O posto da matriz não pode ser inferior a n.

(1) $\det(A) = 2n$ se cada elemento da diagonal principal for igual a dois.

(2) O determinante só pode ser calculado se cada $a_{ij}, i > j$, for conhecido.

(3) A matriz A é triangular.

(4) $\det(A) = 4$ se $n = 2$ e $a_{11} = a_{22} = 2$, independentemente dos elementos abaixo da diagonal principal.

Solução

(0)

(1)

(2)
(3)
(4)

Exercício 77 (ANPEC 1991, Questão 8)

Sabendo-se que $A = [3 \quad 1 \quad 2], B = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 5.1 \\ 6.1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, indique se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas.

(0) O produto ABC tem dimensão 1×1.
(1) O produto B^tC não está definido.
(2) O produto B^tA^t está definido.
(3) Para achar BC somamos a primeira coluna de B a 3 vezes a segunda coluna de B.
(4) B tem duas linhas linearmente independentes.

Solução

(0)
(1)
(2)
(3)
(4)

Exercício 78 (ANPEC 1991, Questão 10)

Determine o posto da matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$.

Solução

Dada uma matriz A de ordem $n \times n$, o posto de matriz, pos (A), é dada pela ordem da maior submatriz não singular da matriz dada.

As matrizes $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ e $A_3 = \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix}$ são submatrizes de A. Então temos $\det(A_1) = 0$, $\det(A_2) \neq 0$ e $\det(A_3) = 1$. Portanto posto$(A) = 2$.

Resposta 2.

Exercício 79 (ANPEC 1990, Questão 9)

Dados $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 9 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, determine o vetor correspondente à solução do sistema $Ax = b$. Em cada opção assinale se falsa ou verdadeira.

(0) $[-1 \quad 0 \quad 3]^T$.
(1) $[-3 \quad 4 \quad 5]^T$.
(2) $[-2 \quad 1 \quad 2]^T$.
(3) $[-5 \quad 0 \quad 3]^T$.
(4) $[-2 \quad -1 \quad 0]^T$.

Solução

A seguir vamos efetuar algumas transformações elementares nas linhas da matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 9 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & 1 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & \frac{1}{3} \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -20 & 4 \end{array}\right).$$

Voltando a forma de equações, temos da última linha que $x_3 = -1/5$. Da segunda linha obtemos $x_2 = 14/15$. Finalmente, da primeira linha $x_1 = -11/5$. Então a solução do sistema é $[-\frac{11}{5} \quad \frac{14}{15} \quad -\frac{1}{5}]^T$.

(0) **Falso.**
(1) **Falso.**
(2) **Falso.**
(3) **Falso.**
(4) **Falso.**

Exercício 80 (ANPEC 1990, Questão 10)

Em cada opção abaixo assinale se falsa ou verdadeira:

O determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ é ...

(0) Igual a 3.

(1) Menor que zero.

(2) Menor que 10.

(3) Maior que 15.

(4) Maior que 30.

Solução

$\det(A) = 2 \times \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 4 \times \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\det(A) = 2 \times 4 + 4 \times 3 + 0 = 20.$

(0) **Falso.**

(1) **Falso.**

(2) **Falso.**

(3) **Verdadeiro.**

(4) **Falso.**

Exercício 81 (ANPEC 1990, Questão 11)

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, determine os valores de $\lambda(\lambda \neq 0)$ que satisfazem a equação $Ax = \lambda x$, assinale cada opção como falsa ou verdadeira.

(0) 1 e -1.

(1) 2 e 3.

(2) -2 e 4.

(3) -4 e 5.

(4) -3 e 3.

Solução

Dado que $Ax = \lambda x$, então $(A - \lambda I) = 0$, logo

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Portanto $\lambda = 3$ ou $\lambda = 2$.

0 **Falso.**

1 **Verdadeiro.**

2 **Falso.**

3 **Falso.**

4 **Falso.**

CAPíTULO 15

Limites de funções

[1]

15.1. Questões ANPEC Trabalhadas

ANPEC 2020, Questão 14. Considere a afirmativa:

> (4) O limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin(x)}{x}$ não existe.

Note que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}.$$

Apesar de $\lim_{x\to+\infty} \sin x$ não existir, temos que $\sin x$ é limitada, i.e., $|\sin x| \leq 1$. Logo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

ANPEC 2019, Questão 5. A questão começa fornecendo as seguintes informações.

> Considere os seguintes limites fundamentais:
>
> $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$$
>
> com a diferente de zero, e $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = 1$, com e sendo a base do logaritmo natural.

Tem um erro crasso na afirmativa acima, pois $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$, e não igual a 1 como é afirmado. Isto levará à anulação do item (4).

> (2) $\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \cos a$.

[1] Última Atualização: 21/06/2022

Verdade. Note que há duas formas de se calcular o limite acima, que é da forma indeterminada $0/0$. A primeiro á via l'Hôspi tal:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\cos x=\cos a.$$

A outra forma é notar que o limite acima é a definição de derivada de $\sin x$ em $x=a$. De fato, se chamarmos $h=x-a$, temos

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}=\sin' a.=\cos a.$$

3 $\lim_{x\to 0}\frac{5^x-2^x}{x}=\ln 2-\ln 5.$

Falso. O limite acima é indeterminado da forma $0/0$. Para aplicar l'Hôspital, calculamos a derivada de 5^x. Note que, derivando ambos os lados de $\ln 5^x=x\ln 5$ obtemos

$$\frac{(5^x)'}{5^x}=\ln 5\implies(5^x)'=5^x\ln 5$$

De forma análoga, calculamos $(2^x)'=2^x\ln 2$. Portanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{5^x-2^x}{x}=\lim_{x\to 0}(5^x\ln 5-2^x\ln 2)=\ln 5-\ln 2.$$

Outra forma de se ver que o limite é falso, é notando que $(5^x-2^x)/x>0$ para $x>0$, e portanto $\lim_{x\to 0}(5^x-2^x)/x\geq 0$. Mas $\ln 2-\ln 5<0$.

4 $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{2x})^x=\sqrt{e}.$

Note que, denotando $y=2x$ temos

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{2x})^x=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{y})^{y/2}=\lim_{y\to\infty}[(1+\frac{1}{y})^y]^{1/2}=[\lim_{y\to\infty}(1+\frac{1}{y})^y]^{1/2}=\sqrt{e}.$$

Apesar da afirmativa ser verdadeira, a questão teve que ser anulada pois o anunciado apresenta uma informação falsa.

ANPEC 2003, Questão 7. Considere as afirmativas abaixo.

(1) $\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{\frac{1}{x}} - x^2 = 0.$

Este limite é do tipo $\infty - \infty$, e l'Hôspital não pode ser aplicada diretamente. devemos reescrever a expressão:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{\frac{1}{x}} - x^2 = \lim_{x\to+\infty} x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1).$$

Mudamos a indeterminação para uma do tipo $\infty \cdot 0$. Mudando de variável $y = 1/x$ temos

$$\lim_{x\to+\infty} x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{e^y}{2y} = +\infty$$

Uma interessante resolução alternativa é apresentada na página 366.

(4) $\lim_{n\to+\infty} \frac{-1+\left(\cos(\frac{\pi x}{2})\right)^n}{1+\left(\cos(\frac{\pi x}{2})\right)^n} = -1$, para $0 < x < 1$.

Verdade. Note que $0 < x < 1$ implica em $\cos(\frac{\pi x}{2}) \in (0,1)$. Portanto,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)^n = 0.$$

para todo $x \in (0,1)$. Logo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-1+\left(\cos(\frac{\pi x}{2})\right)^n}{1+\left(\cos(\frac{\pi x}{2})\right)^n} = \frac{-1+\lim_{n\to+\infty}\left(\cos(\frac{\pi x}{2})\right)^n}{1+\lim_{n\to+\infty}\left(\cos(\frac{\pi x}{2})\right)^n} = \frac{-1}{1} = -1,$$

e a afirmativa é verdadeira.

É interessante ver que

$$\lim_{x\to 0^+} \lim_{n\to+\infty} \frac{-1+\left(\cos(\frac{\pi x}{2})\right)^n}{1+\left(\cos(\frac{\pi x}{2})\right)^n} = \lim_{x\to 0^+} (-1) = -1,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to 0^+} \frac{-1+\left(\cos(\frac{\pi x}{2})\right)^n}{1+\left(\cos(\frac{\pi x}{2})\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{0}{2} = 0.$$

Este caso ilustra bem que, em geral, *limites não comutam*.

ANPEC 2002, Questão 7.

0 $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x})^{2x+5} = e^5$.

Afirmativa falsa. Note que

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x+5} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{\frac{3}{x}(2x+5)}$$

Denotando $y = \left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{\frac{3}{x}(2x+5)}$, temos

$$\ln y = \frac{3}{x}(2x+5)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}$$

e

$$\lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty}\frac{3(2x+5)}{x}\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3(2x+5)}{x}\ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}$$
$$= 6\ln e = 6.$$

Como ln é função contínua, temos

$$6 = \lim_{x\to\infty}\ln y = \ln\lim_{x\to\infty} y \implies \lim_{x\to\infty} y = e^6$$

1 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^3)}{x^2} = 3/2$.

Falso. É claro que l'Hôspital pode ser usado aqui, mas é mais simples ver que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^3)}{x^2} = \lim_{x\to 0} x\frac{\sin(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0} x\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^3)}{x^3} = 0\cdot 1 = 0.$$

4 $\lim_{x\to -3}\sqrt{\frac{x^2-10x-39}{x^2+2x-3}} = 4$.

A dica neste caso é "esquecer" a raiz e calcular

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-10x-39}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to -3}\frac{2x-10}{2x+2} = \frac{16}{4} = 4.$$

Então

$$\lim_{x\to -3}\sqrt{\frac{x^2-10x-39}{x^2+2x-3}} = \sqrt{\lim_{x\to -3}\frac{x^2-10x-39}{x^2+2x-3}} = \sqrt{4} = 2.$$

ANPEC 2001, Questão 4.

(2) $\lim_{x\to 3} \sqrt{\frac{x^2+2x-15}{x^2-4x+3}} = 1;$

Quase igual ao item 4 da questão 7 de 2002 (página 360).

(4) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1+x^{2x}}{x^{4x}} = 1.$

A afirmativa á falsa. Esta questão envolve o cálculo do importante limite $\lim_{x\to 0^+} x^x$. A indeterminação é do tipo 0^0. Seja $y = x^x$. Então

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{z\to\infty} \frac{\ln(1/z)}{z} = \lim_{z\to\infty} z(-\frac{1}{z^2}) = 0.$$

Finalmente,

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = 0 \implies \lim_{x\to 0^+} y = 1 \implies \lim_{x\to 0^+} x^x = 1.$$

Voltando ao item,

$$\lim_{x\to 0^+} x^{2x} = \lim_{x\to 0^+} (x^x)^2 = (\lim_{x\to 0^+} x^x)^2 = 1$$

Similarmente, $\lim_{x\to 0^+} x^{4x} = 1$. Logo,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1+x^{2x}}{x^{4x}} = \frac{1+\lim_{x\to 0^+} x^{2x}}{\lim_{x\to 0^+} x^{4x}} = \frac{1+1}{1} = 2.$$

ANPEC 1994, Questão 9. Considere as seguintes afirmativas.

(3) $\lim_{x\to 0} (e^x + x)^{1/x} = 1.$

Seja $y = (e^x + x)^{1/x}$. Então

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(e^x + x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + 1}{e^x + x} = 2.$$

Logo, $\lim_{x\to 0} y = e^2$.

(4) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}.$

Falso. Esta indeterminação é do tipo $\infty - \infty$. Simplificando a expressão, temos

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^x}{e^x - 1 + xe^x} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{e^x + e^x + xe^x} = -\frac{1}{2}.$$

15.2. Questões ANPEC Resolvidas

Exercício 1 (ANPEC 2020, Questão 14)

Avalie as afirmações abaixo quanto a sua veracidade:

(0) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x^2} = +\infty$.

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} e^{-x} = 1$.

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 1$.

(3) $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = -\infty$.

(4) O limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin(x)}{x}$ não existe.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

Aplicando a regra de L′ Hôpital duas vezes, obtemos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x \ln 2}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x \ln 2 \ln 2}{2} = +\infty.$$

(1) **Verdadeiro.**

Aplicamos o produto dos limites,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0} e^{-x} = 0.$$

Então

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} e^{-x} = 1.$$

(2) **Falso.**

Usando a regra de L′ Hôpital, temos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} -\sin(x) = 0.$$

(3) **Falso.**

Aplicando a regra de L′ Hôpital, juntamos

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\ln x}{1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0.$$

(4) **Falso.**

Primeiro calculemos o limite de $\sin(x)/x$, então para $x > 0$, temos

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1,$$
$$\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Aplicando o limite, obtemos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x},$$
$$0 \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \leq 0,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0.$$

Logo,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Exercício 2 (ANPEC 2019, Questão 5)

Considere os seguintes limites fundamentais: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$, com a diferente de zero, e $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = 1$, com e sendo a base do logaritmo natural. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas?

(0) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \sin 3x}{x + \sin\ 2x} = \dfrac{2}{3}.$

(1) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1.$

(2) $\lim_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x - a} = \cos a.$

③ $\lim_{x\to 0} \dfrac{5^x - 2^x}{x} = \ln 2 - \ln 5.$

④ $\lim_{x\to\infty} (1 + \dfrac{1}{2x})^x = \sqrt{e}.$

Solução

⓪ **Falso.**

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin 3x}{x + \sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\frac{\sin 2x}{2x}} = \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = -\frac{2}{3}.$$

① **Verdadeiro.**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)}\frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

② **Verdadeiro.**

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x\to a} \cos x = \cos a.$$

③ **Falso.**

$$\lim_{x\to 0} \frac{5^x - 2^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{5^x - 1}{x} + \frac{1 - 2^x}{x} = \ln 5 - \ln 2.$$

④ **Verdadeiro (item anulado).**

Denotemos $y = 2x$, dado que $x \to \infty$ então $y \to \infty$. Logo temos

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x = \lim_{y\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right)^{1/2} = \sqrt{e}.$$

Exercício 3 (ANPEC 2005, Questão 6)

Avalie as afirmativas:

⓪ $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 1$.
① $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-x+3}{3x^2+5} = \frac{2}{3}$.
② Se $f(x)$ e $g(x)$ são polinômios, então $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 0$, desde que $\text{grau}(f(x)) < \text{grau}(g(x))$.
③ Se $\frac{2x-3}{x} < f(x) < \frac{2x^2+5x}{x^2}$, então $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$.
④ $\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos(\theta)-1}{\theta^2} = \frac{1}{2}$.

Solução

⓪ **Falso.**

Aplicando a regra de L′ Hôspital, temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

① **Verdadeiro.**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-x+3}{3x^2+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-1/x+3/x^2}{3+5/x^2} = \frac{2}{3}.$$

② **Verdadeiro.**

Sejam os polinômios

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0,$$

onde $n < m$. Logo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n/x^m + a_{n-1}x^{n-1}/x^m + \cdots + a_2 x^2/x^m + a_1 x^1/x^m + a_0/x^m}{b_m + b_{m-1}1/x + \cdots + b_2 1/x^{m-2} + b_1 1/x^{m-1} + b_0/x^m} = 0$$

3 **Verdadeiro.**

Da hipótese, temos

$$2 - \frac{3}{x} < f(x) < 2 + \frac{5}{x},$$
$$\lim_{x\to\infty} 2 - \frac{3}{x} \leq \lim_{x\to\infty} f(x) \leq \lim_{x\to\infty} 2 + \frac{5}{x},$$
$$2 \leq \lim_{x\to\infty} f(x) \leq 2.$$

Portanto $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$.

4 **Falso.**

Aplicando a regra de L$'$ Hôspital, juntamos

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{cos(\theta) - 1}{\theta^2} = \lim_{\theta\to 0} \frac{-\sin(\theta)}{2\theta} = \frac{-1}{2} \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = \frac{-1}{2}.$$

Exercício 4 (ANPEC 2003, Questão 7)

Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

0 $\lim_{x\to 5} \left[\frac{(4x^2-100)}{x-5}\right] = 40$.

1 $\lim_{x\to +\infty} x^2 e^{\frac{1}{x}} - x^2 = 0$.

2 $\lim_{x\to 1} \frac{x\ln(x)}{x^2-1} = 1$.

3 Se $\cos(x + A) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x)$ então $A = -\frac{\pi}{6}$.

4 $\lim_{n\to +\infty} \frac{-1+\left(\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)^n}{1+\left(\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)^n} = -1$, para $0 < x < 1$.

Solução

0 **Verdadeiro.**

Usando a regra de L$'$ Hôspital, obtemos

$$\lim_{x\to 5} \left[\frac{4x^2 - 100}{x - 5}\right] = \lim_{x\to 5} \frac{8x}{1} = 40.$$

① **Falso.**

Note que, para todo $x > 0$;

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} + 1 &\leq e^{\frac{1}{x}}\\ x + x^2 &\leq x^2 e^{\frac{1}{x}}\\ x &\leq x^2 e^{\frac{1}{x}} - x^2\end{aligned}$$

Aplicando o limite, na desigualdade anterior, juntamos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x &\leq \lim_{x\to+\infty} x^2 e^{\frac{1}{x}} - x^2\\ +\infty &\leq \lim_{x\to+\infty} x^2 e^{\frac{1}{x}} - x^2.\end{aligned}$$

Portanto

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{\frac{1}{x}} - x^2 \neq 0.$$

② **Falso.**

Aplicando a regra de L′ Hôspital, obtemos

$$\lim_{x\to 1} \frac{x\ln(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x) + 1}{2x} = \frac{1}{2}.$$

③ **Falso.**

Seja $x = \pi/6$, então $\cos(x+A) = \cos(0) = 1$, $\cos(x) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3/2}$ e $\sin(x) = \sin(\pi/6) = 1/2$. Logo

$$\cos(x + A) = 1 \neq \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x) = \frac{1}{2}.$$

(4) **Verdadeiro.**

Dado que $0 < x < 1$, temos

$$0 < \frac{\pi x}{2} < \frac{\pi}{2},$$
$$0 < \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) < 1.$$

Logo

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)^n = 0.$$

Portanto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-1 + \left(\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)^n}{1 + \left(\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)^n} = -1.$$

Exercício 5 (ANPEC 2002, Questão 7)

Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

(0) $\lim_{x\to\infty}(1 + \frac{3}{x})^{2x+5} = e^5$.

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3)}{x^2} = 3/2$.

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{e^{2x}-2x-1} = 1$.

(3) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$.

(4) $\lim_{x\to -3} \sqrt{\frac{x^2-10x-39}{x^2+2x-3}} = 4$.

Solução

(0) **Falso.**

Usando o limite exponencial fundamental

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x+5} = \lim_{x\to\infty} \left[\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{\frac{3}{x}(2x+5)} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x}(2x+5)} = e^6.$$

(1) **Falso.**

Os valores

$$\lim_{x\to 0} x = 0, \text{ e } \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3)}{x^3} = \lim_{x^3\to 0} \frac{\sin(x^3)}{x^3} = 1,$$

então

$$\lim_{x\to 0} x . \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3)}{x^3} = 0.$$

(2) **Falso.**

Usando a regra de L′ Hôspital duas vezes, juntamos

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{e^{2x} - 2x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{2e^{2x} - 2} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{4e^{2x}} = \frac{1}{2}.$$

(3) **Verdadeiro.**

Aplicando a regra de L′ Hôspital, obtemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2x^{1/2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^{1/2}} = 0.$$

(4) **Falso.** Ver solução na página 360.

Exercício 6 (ANPEC 2001, Questão 4)

A respeito dos limites abaixo, responda V (verdadeiro) ou F (falso).

(0) $\lim_{x\to+\infty}(1 + \frac{3}{x})^{\frac{x}{5}} = e^{5/3}$;

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin^2(1/x)}{\sin^2(1/x)+\cos^2(1/x)} = 0$;

(2) $\lim_{x\to 3} \sqrt{\frac{x^2+2x-15}{x^2-4x+3}} = 1$;

(3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2}\sin(4/x^2) = 2$;

(4) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1+x^{2x}}{x^{4x}} = 1$.

Solução

(0) **Falso.**

Denotemos $L = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{x/5}$, então $L = e^{\ln(L)}$. Logo

$$\ln(L) = \ln\left(\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{x/5}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{5}\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)$$

Seja $y = 1/x$, dado que $x \to +\infty$, então $y \to 0^+$. Assim

$$\ln(L) = \lim_{y\to 0^+} \frac{\ln(1+3y)}{5y} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\frac{3}{1+3y}}{5} = \lim_{y\to 0^+} \frac{3}{5(1+3y)} = \frac{3}{5}$$

portanto $L = e^{\ln(L)} = e^{3/5}$.

(1) **Verdadeiro.**

Denotemos $y = 1/x$, dado que $x \to 0$, então $y \to \infty$.

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\frac{\sin^2(y)}{y}}{\sin^2(y) + \cos^2(y)} = \lim_{y\to\infty} \frac{\sin^2(y)}{y}.$$

Sabemos $-1 \leq \sin(y) \leq 1$, então $0 \leq \sin^2(y) \leq 1$, dado que $y > 0$, temos

$$\lim_{y\to\infty} 0 \leq \lim_{y\to\infty} \frac{\sin^2(y)}{y} \leq \lim_{y\to\infty} \frac{1}{y}.$$

Portanto $\lim_{y\to\infty} \sin^2(y)/y = 0$.

(2) **Falso.**

$$\lim_{x\to 3} \sqrt{\frac{x^2+2x-15}{x^2-4x+3}} = \lim_{x\to 3} \sqrt{\frac{(x+5)(x-3)}{(x-1)(x-3)}} = \lim_{x\to 3} \sqrt{\frac{x+5}{x-1}} = 2.$$

(3) **Verdadeiro.**

Denotemos $y = 4/x^2$, dado que $x \to +\infty$ então $y \to 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2} \sin\left(\frac{4}{x^2}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{2}{y} \sin(y) = 2 \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 2.$$

(4) **Falso.**

Mostremos que $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$. Seja $L = \lim_{x\to 0^+} x^x$, então $L = e^{\ln(L)}$. Agora

$$\ln(L) = \ln\left(\lim_{x\to 0^+} x^x\right) = \lim_{x\to 0^+} \ln(x^x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$$

portanto $L = e^{\ln(L)} = e^0 = 1$.

Agora

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1+x^{2x}}{x^{4x}} = \frac{1+1}{1} = 2.$$

Exercício 7 (ANPEC 1999, Questão 4)

Classifique como falsas ou verdadeiras as afirmações:

(0) $\log_{\sqrt[3]{25}} \sqrt{125} = \frac{9}{4}$

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)}{\sin(x)} = 0$

Solução

(0) **Verdadeiro.**

Seja $x = \log_{\sqrt[3]{25}} \sqrt{125}$, então $\sqrt[3]{25}^x = \sqrt{125}$. Logo $5^{2x/3} = 5^{3/2}$. Assim, $2x/3 = 3/2$. Portanto $x = 9/4$.

(1) **Falso.**

Aplicando a regra de L$'$ Hôspital, temos

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\cos(x)} = 1.$$

Exercício 8 (ANPEC 1998, Questão 6)

Responda V ou F;

(0) $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\sin\ x)^2}{e^{x^2}-1} = 0$;

(1) $\lim_{x\to 0} xe^{1/x} = +\infty$;

(2) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1+3x^x}{x^x} = 3$;

(3) $\lim_{x\to 0}(1+a/x)^{bx} = e^{a+b}$, onde a e b são números reais não nulos;

Solução

(0) **Verdadeiro.**

Sabemos que $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, então $0 \leq \sin^2(x) \leq 1$.

Dado que $x \to +\infty$, então

$$0 \leq \frac{\sin^2(x)}{e^{x^2}-1} \leq \frac{1}{e^{x^2}-1}$$
$$\lim_{x\to+\infty} 0 \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin^2(x)}{e^{x^2}-1} \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x^2}-1}$$
$$0 \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin^2(x)}{e^{x^2}-1} \leq 0.$$

1 **Verdadeiro.**

Denotemos $x = 1/\ln(y)$, dado que $x \to 0$, então $y \to +\infty$, logo

$$\lim_{x\to 0} xe^{1/x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{\ln(y)} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{y}} = \lim_{y\to+\infty} y = +\infty.$$

2 **Falso.**

Mostremos que $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$.

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^{\ln\left(\lim_{x\to 0^+} x^x\right)} = e^{\lim_{x\to 0^+} \ln(x^x)} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)} = e^0 = 1.$$

Portanto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1+3x^x}{x^x} = \frac{1+3}{1} = 4.$$

3 **Falso.**

Seja $L = \lim_{x\to 0} \left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}$, então $L = e^{\ln(L)}$. Logo

$$\ln(L) = \ln\left(\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}\right) = \lim_{x\to 0} bx\ \ln\left(1+\frac{a}{x}\right).$$

Denotemos $y = 1/x$, dado que $x \to 0$, então $y \to \infty$. Logo temos

$$\ln(L) = \lim_{y\to\infty} \frac{b\ \ln(1+ay)}{y} = \lim_{y\to\infty} \frac{\frac{b}{1+ay}}{1} = \lim_{y\to\infty} \frac{b}{1+ay} = 0.$$

Portanto

$$L = e^{\ln(L)} = e^0 = 1.$$

Exercício 9 (ANPEC 1997, Questão 3)

Classifique como verdadeira ou falsa as afirmações a seguir:

(0) $\lim_{x\to 1}(x-1)\{(x^{1/2}-1)\}^{-1} = 3.$

(1) $\lim_{x\to 64}(x^{\frac{1}{2}}-8)(x^{\frac{2}{3}}-4)^{-1} = 3.$

(2) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+5\sin(x)}{x-\cos(x)} = 3.$

Solução

(0) **Falso.**

Denotemos $x = y^2$, dado que $x \to 1$, então $y \to 1$. Assim temos

$$\lim_{y\to 1} \frac{y^2-1}{y-1} = \lim_{y\to 1} y+1 = 2.$$

(1) **Verdadeiro.**

Denotemos $x = y^6$, dado que $x \to 64$, então $y \to 2$. Assim temos

$$\lim_{y\to 2} \frac{y^3-8}{y^2-4} = \lim_{y\to 2} \frac{y^2+2y+4}{y+2} = 3.$$

(2) **Falso.**

$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$, aseguir demostramos isto, sabemos que

$$-1 \le \sin(x) \le 1.$$

Sem perda de generalidade, considere $x \to +\infty$, então x é positivo. Logo

$$\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$$
$$0 \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \leq 0$$

portanto $\lim_{x\to+\infty} \sin(x)/x = 0$, também temos $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + 5\sin(x)}{x - \cos(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + 5\frac{\sin(x)}{x}}{1 - \frac{\cos(x)}{x}} = 1.$$

Exercício 10 (ANPEC 1994, Questão 9)

Assinale como verdadeira ou falsa cada uma das afirmações abaixo:

0 $\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x} = 1$.

1 $\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = 1$.

2 $\lim_{x\to0} x(e)^{1/x} = 0$.

3 $\lim_{x\to0}(e^x + x)^{1/x} = 1$.

4 $\lim_{x\to0} \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}$.

Solução

0 **Falso.**

Pela propriedade

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x} = e.$$

1 **Verdadeiro.**

Seja $L = \lim_{x\to\infty} x^{1/x}$, então $L = e^{\ln(L)}$. Logo

$$\ln(L) = \ln\left(\lim_{x\to\infty} x^{1/x}\right) = \lim_{x\to\infty} \ln(x^{1/x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x}.$$

Assim obtemos

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x}},$$

pela regra de L' Hôspital, obtemos

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}} = e^0 = 1.$$

(2) **Falso.**

Denotemos $x = 1/\ln(y)$, dado que $x \to 0$ então $y \to \infty$, logo

$$\lim_{x\to 0} x\, e^{1/x} = \lim_{y\to\infty} = \frac{y}{\ln(y)} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{y}} = \lim_{y\to\infty} y = \infty.$$

(3) **Falso.**

Seja $L = \lim_{x\to 0}(e^x + x)^{1/x}$, então $L = e^{\ln(L)}$. Logo

$$\ln(L) = \ln\left(\lim_{x\to 0}(e^x + x)^{1/x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\ln(e^x + x)^{1/x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(e^x + x)}{x}\right)$$

Aplicando a regra de L' Hôspital, temos

$$\ln(L) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x + 1}{e^x + x}\right) = 2.$$

Portanto $L = e^2$.

(4) **Falso.**

Aqui também aplicamos a regra de L' Hôspital

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2^x - 1} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^x}{e^x - 1 + xe^x}$$

aplicamos de novo a regra de L' Hôspital

$$\lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \frac{-1}{2}.$$

CAPíTULO 16

Continuidade de Funções

[1]

16.1. Questões ANPEC Trabalhadas

ANPEC 2011, Questão 1. Julgue as seguintes afirmativas:

(2) Se $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, tal que $(2x - \pi)h(x) = 1 - \sin x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Falsa. Note que como

$$h(x) = \frac{1 - \sin x}{2x - \pi}$$

para todo $x \neq \pi/2$. Como h é contínua, então

$$h(\pi/2) = \lim_{x \to \pi/2} h(x) = \lim_{x \to \pi/2} \frac{1 - \sin x}{2x - \pi} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{1 - \cos x}{2} = 0.$$

Note que aplicamos l'Hôspital a fim de obter o limite.

ANPEC 2005, Questão 9. Avalie as afirmativas abaixo.

(1) Se uma função $f(x, y)$ é contínua em um ponto (x_0, y_0), então as funções $\phi(x) = f(x, y_0)$ e $\varphi(y) = f(x_0, y)$ são contínuas em x_o e y_o, respectivamente.

Verdadeira. Note que uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é contínua em (x_0, y_0) se "(x, y) próximo de (x_0, y_0) implica em $f(x, y)$ próximo de $f(x_0, y_0)$". Sendo um pouco mais formal, se uma sequência (x_n, y_n) converge para (x_0, y_0), então $f(x_n, y_n)$ converge para $f(x_0, y_0)$.

[1] Última Atualização: 28/06/2022

Um caso particular é a sequência (x_n, y_0). Então

$$\lim_{x_n \to x_0} \phi(x_n) = \lim_{x_n \to x_0} f(x_n, y_0) = \lim_{(x_n,y_0)\to(x_0,y_0)} f(x_n, y_0) = f(x_0, y_0) = \phi(x_0),$$

e portanto ϕ é contínua em x_o. O mesmo vale para φ em y_0.

(2) A função $f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ é contínua em $(0, 0)$.

Note que f não está definida em $(0, 0)$ e portanto a função não pode ser contínua.

Possivelmente entretanto, o examinador tinha em mente definir $f(0, 0) = 0$. Neste caso, considere $x = y$ e tome $x \to 0$. Teremos

$$\lim_{x\to 0} f(x, x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2x^2}{x^4 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \neq f(0, 0).$$

A função seria então descontínua.

(4) Seja $h(x) = f(x)g(x)$. Se $h(x)$ é contínua, então f e g também o são.

Falso. Tome como exemplo

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}.$$

Neste caso teríamos $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

ANPEC 1993, Questão 3. Indique quais das afirmações abaixo são verdadeiras e quais são falsas:

(0) A função $y = \frac{e^x}{x^2-1}$ é contínua no intervalo $[0, 2]$.

A afirmativa é falsa. Note que a função não está nem definida em $x = 1$, e portanto não faz sentido afirmar que é contínua neste ponto. E portanto não pode ser contínua no intervalo $[0, 2]$.

(3) Para que a função $y = \frac{x^2-4x+3}{x-3}$, $x \neq 3$ possa ser estendida continuamente a toda a reta R, é necessário atribuir-lhe o valor 2 no ponto $x = 3$.

Verdade. Para que a função possa ser estendida continuamente definindo-se $y(3) = 2$, é preciso que $\lim_{x\to 3} y(x) = 2$, i.e., que y seja contínua em $x = 3$. Note que, de fato,

$$\lim_{x\to 3} y(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = \lim_{x\to 3}(2x - 4) = 2.$$

16.2. Questões ANPEC Resolvidas

EXERCÍCIO 1 (ANPEC 2016, Questão 5). *Seja $f : [0, 1] \to [0, 1]$ uma função tal que $f([0, 1]) = [0, 1]$, isto é, a imagem de f é $[0, 1]$.*
Defina o conjunto $A = \{x \in [0, 1] : f(x) - x = 0\}$. Julgue as seguintes afirmativas:

- (0) *O conjunto A é diferente do vazio, para qualquer f nas condições do enunciado;*
- (1) *Se f é contínua, então o conjunto A é unitário;*
- (2) *Se f é contínua, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, então o conjunto A é diferente do vazio;*
- (3) *Se f é contínua e estritamente crescente, então A é únitario;*
- (4) *O conjunto A sempre é finito, para qualquer f nas condições do enunciado.*

Solução

(0) **Falso.**

Consideremos a seguinte função

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se\ x = 0 \\ 2x & se\ 0 < x \le 1/2 \\ 0 & se\ 1/2 < x \le 1 \end{cases}.$$

Logo, se $x = 0$ então $f(x) - x = 1$, se $x \in (0, 1/2]$ então $f(x) - x = x \in (0, 1/2]$ e se $x \in (1/2, 1]$ então $f(x) - x = -x \in [-1, 1/2)$. Portanto, o conjunto $A = \{x \in [0, 1] : f(x) - x = 0\} = \phi$.

(1) **Falso.**

Definamos a função $f : [0, 1] \to [0, 1]$, dado por $f(x) = x$. Para esta função *contínua, o conjunto* $A = [0,1]$ *não é unitário.*

2 **Verdadeiro.**

Consideremos a uma função auxiliar $g(x) = f(x) - x$, *dado que* f *é contínua então* g *é contínua. Como* $f([0,1]) = [0,1]$ *temos* $f(0) \geq 0$ *e* $f(1) \leq 1$, *assim* $g(0) \geq 0$ *e* $g(1) \leq 0$. *Logo pelo teorema do valor intermédio, existe um* $x \in [0,1]$ *tal que* $g(x) = 0$, *isto é* $f(x) = x$. *Portanto o conjunto* $A \neq \phi$.

3 **Falso.**

A função definida no item 1 *é crescente e contínua, mas o conjunto* A *não é unitário.*

4 **Falso.**

Considerando, também, a função definida no item 1. *O conjunto* A *não e finito.*

Exercício 2 (ANPEC 2011, Questão 1). *Julgue as seguintes afirmativas:*

0 *Se* $A = \{x \in \mathbb{R} : 3x^2 + 4x < 4\}$ *e* $B = \{x \in \mathbb{R} : 2(x^2+1) \geq 5x\}$ *então* $A \cap B \subset \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 4\}$.

1 *Se* $A \subset B$ *são conjuntos finitos não vazios e* $f : A \to B$ *é sobrejetiva, então* $A = B$.

2 *Se* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função contínua, tal que* $(2x - \pi)h(x) = 1 - \sin x$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$, *então* $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

3 *Se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = |5 - x| + |x - 3|$. *A função não é sobrejetiva e* $f(x) \geq 2$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

4 *Sejam* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dadas por* $f(x) = |x+3| - 3$ *e* $g(x) = x/2$. *A função composta* $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é sobrejetiva.*

Solução

(0) **Verdadeiro.**

Do conjunto A temos $(3x-2)(x+2)<0$*, então*

$$\begin{gathered}(\ 3x-2<0 \quad \wedge \quad (x+2)>0\ )\vee(\ 3x-2>0 \quad \wedge \quad x+2<0\ )\\ (\ x<2/3 \quad \wedge \quad x>-2\ )\vee(\ x>2/3 \quad \wedge \quad x<-2\ )\\ -2<x<2/3\vee\phi.\end{gathered}$$

Logo $A=<-2,2/3>$.

Do conjunto B temos $(2x-1)(x-2)\geq 0$*, então*

$$\begin{gathered}(\ 2x-1\leq 0 \quad \wedge \quad x-2\leq 0\ )\vee(\ 2x-1\geq 0 \quad \wedge \quad x-2\geq 0\ )\\ (\ x\leq 1/2 \quad \wedge \quad x\leq 2\ )\vee(\ x\geq 1/2\wedge x\geq 2\ )\\ x\leq 1/2\vee x\geq 2.\end{gathered}$$

Logo $B=<-\infty,1/2]\cup[2,+\infty>$. *Assim temos* $A\cap B=<-2,1/2]$. *Portanto* $A\cap B\subset[-2,2]$.

(1) **Verdadeiro.**

Se f *é sobrejetiva então* $\mathrm{card}(B)<\mathrm{card}(A)$.

Dado que $A\subset B$ *temos* $A=B$.

(2) **Falso.**

Dado que h *é contínua, então*

$$\lim_{x\to\pi/2}h(x)=\lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\sin(x)}{2x-\pi}=h(\pi/2).$$

Aplicando a regra de L' *Hôspital, na equação anterior, obtemos*

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{-\cos(x)}{2}=0=h(\pi/2).$$

(3) **Verdadeiro.**

Dado que $f(x) = |x-5| + |x-3|$, *temos*

$$f(x) = \begin{cases} -2x+8 & ; \quad x \in <-\infty, 3], \\ 2 & ; \quad x \in <3, 5], \\ 2x-8 & ; \quad x \in <5, +\infty]. \end{cases}$$

f *não é sobrejetiva por que para* $y = -1$ *não existe* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = -1$. *Da função* f *temos* $f(x) \geq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

(4) **Falso.**

A função composta $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f(g(x)) = f(x/2) = \left|\frac{x}{2} + 3\right| - 3.$$

Seja $-4 \in \mathbb{R}$, *então*

$$f(g(x)) = \left|\frac{x}{2} + 3\right| - 3 = -4,$$
$$\left|\frac{x}{2} + 3\right| = -1.$$

Logo, para $-4 \in \mathbb{R}$ *não existe um* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(g(x)) = -4$.

Exercício 3 (ANPEC 2005, Questão 9). *Avalie as afirmativas:*

(0) *A soma dos quadrados dos autovalores de* $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ *é* -6.

(1) *Se uma função* $f(x,y)$ *é contínua em um ponto* (x_0, y_0), *então as funções* $\phi(x) = f(x, y_0)$ *e* $\varphi(y) = f(x_0, y)$ *são contínuas em* x_o *e* y_o, *respectivamente.*

(2) *A função* $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ *é contínua em* $(0,0)$.

(3) *Dada uma matriz* $n \times n$ *simétrica* A, *se para todo* $\nu \in \Re^n$, *não nulo, com* n *ímpar,* $\nu' A \nu < 0$, *então o determinante de* A *é negativo.*

(4) *Seja* $h(x) = f(x)g(x)$. *Se* $h(x)$ *é contínua, então* f *e* g *também o são.*

Solução

(0) **Falso.**

O polinômio característico da matriz A é $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 9 = 0$. *Então, os autovalores são* $\lambda_1 = -3i$ *e* $\lambda_2 = 3i$. *Podemos concluir que* $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = -18$.

(1) **Verdadeiro.**

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Dado que $\phi(x) = f(x, y_0)$ *e* $\varphi(y) = f(x_0, y)$, *então existem* $\phi(x_0)$ *e* $\varphi(y_0)$.

$$\lim_{x\to x_0} \phi(x) = \lim_{x\to x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0) = \phi(x_0)$$
$$\lim_{y\to y_0} \varphi(y) = \lim_{y\to y_0} f(x_0, y) = f(x_0, y_0) = \varphi(y_0).$$

(2) **Falso.**

Não existe $f(0,0)$.

(3) **Verdadeiro.**

Se uma matriz é simétrica, então seus autovalores são números reais.
Teorema: O produto dos autovalores da matriz A é igual ao determinante da matriz A.
Seja λ um autovalor de A e ν seu autovetor correspondente, então $A\nu = \lambda\nu$.
logo

$$\nu' A\nu = \nu'\lambda\nu = \lambda\nu'\nu < 0.$$

Portanto se λ é um autovalor de A então $\lambda < 0$.
Dado que n é impar temos $\det(A) < 0$.

(4) **Falso.**

Um exemplo simples é $f(x) = x$, *e* $g(x) = \frac{1}{x}$ *para* $x \neq 0$ *e* $g(0) = 1$. *Neste caso,* $h(x) = f(x)g(x) = 1$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$. *A função h é continua em todo* $\mathbb{R}$, *mas g não é contínua em* $x = 0$.

Exercício 4 (ANPEC 1993, Questão 3). *Indique quais das afirmações abaixo são verdadeiras e quais são falsas:*

0 *A função* $y = \frac{e^x}{x^2-1}$ *é contínua no intervalo* $[0, 2]$.

1 $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2} = -1.$

2 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 0.$

3 *Para que a função* $y = \frac{x^2-4x+3}{x-3}$, $x \neq 3$ *possa ser estendida continuamente a toda a reta* R, *é necessário atribuir-lhe o valor* 2 *no ponto* $x = 3$.

4 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x^3-2x^2+100x-200}{3x^3-1} = 3.$

Solução

0 **Falso.**

Note que a função não está definida em $x = 1$, *e portanto não pode ser contínua neste ponto.*

1 **Verdadeiro.**

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-3)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x - 3 = -1.$$

2 **Falso.**

Usando l'Hôspital, temos que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

3 **Verdadeiro.**

Ver solução da página 378.

4 **Falso.**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6x^3-2x^2+100x-200}{3x^3-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{6-2/x+100/x^2-200/x^3}{3-1/x^3} = 2.$$

Exercício 5 (ANPEC 1992, Questão 5). *Dado que* $f(x) = \frac{\sin 8x}{x}$ *para* $x \neq 0$, *quando deve valer* $f(0)$ *para que* f *seja contínua em* R?

Solução

Se f *é contínua para* $x = 0$, *então*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} f(x) &= f(0), \\ \lim_{x \to 0} \frac{\sin 8x}{x} &= f(0), \\ 8 &= f(0). \end{aligned}$$

CAPíTULO 17

Diferenciação

[1]

17.1. Questões ANPEC Trabalhadas

17.1.1. Existência de derivadas. Por vezes, uma função é definida "por partes", e para determinar se esta função é ou não derivável num determinado ponto, é necessário usar a definição de derivada:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

se o limite existir. Lembre que o limite só existe se existirem o limite à esquerda e à direita e estes forem iguais. Outra lembrança importante é que uma função derivável num ponto é contínua neste ponto.

ANPEC 2022, Questão 4. As seguintes definições são dadas:

> Considere as funções $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas, respectivamente, por $f(x) = (\max\{x, 0\})^2$, $g(x) = -(\min\{x, 0\})^2$, e $h(x) = [f(x - 1) + g(x - 1)]^3$.

Julgue as seguintes afirmativas:

> 2 A função f é contínua em $x = 0$.

Verdadeiro. Note que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

A f será contínua se e somente se

$$\lim_{h \to 0^+} f(h) = \lim_{h \to 0^-} f(h) = f(0).$$

[1] Última Atualização: 13/07/2022

No caso, para limites pela direita temos

$$\lim_{h\to 0^+} f(h) = \lim_{h\to 0^-} h^2 = 0 = f(0).$$

Para limites pela esquerda,

$$\lim_{h\to 0^-} f(h) = \lim_{h\to 0^-} 0 = 0 = f(0).$$

(3) A função g não é derivável em $x = 0$.

Falso. Note que

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

A função g será derivável em $x = 0$ se e somente se existirem os limites laterais e estes forem iguais:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{g(h) - g(0)}{h}$$

Neste caso,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h^2}{h} = 0, \qquad \lim_{h\to 0^+} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{0}{h} = 0.$$

Então, como os limites são iguais entre si, g é diferenciável em $x = 0$. Portanto, a afirmativa é falsa.

(4) A função h possui um ponto de inflexão em $x = -1$.

Note que

$$h(x) = \begin{cases} -(x-1)^6 & \text{se } x - 1 \leq 0 \\ (x-1)^6 & \text{se } x - 1 > 0 \end{cases} = \begin{cases} -(x-1)^6 & \text{se } x \leq 1 \\ (x-1)^6 & \text{se } x > 1 \end{cases}.$$

Portanto não há nada de "especial" no ponto $x = -1$, e podemos considerar a função $\phi(x) = -(x-1)^6$. Veja que

$$\phi'(x) = -6(x-1)^5, \qquad \phi''(x) = -30(x-1)^4,$$

Portanto $\phi''(-1) \neq 0$, e o ponto não é de inflexão (todo ponto de inflexão tem segunda derivada nula).

ANPEC 2020, Questão 3. Considere as seguintes informações.

Seja $a > 0$. Considere a seguinte função f de variável real com valores reais, definida da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(x-1)^2 & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ a + \ln\sqrt{x-1} & \text{se } x > 2 \end{cases}.$$

Julgue as afirmativas abaixo.

(0) Para todos os valores de $a > 0$, a função f é contínua em todo seu domínio.

Falso. A f será contínua num ponto x se e somente se

$$\lim_{h\to 0^+} f(x+h) = \lim_{h\to 0^-} f(x+h) = f(x).$$

No caso, há dois pontos candidatos a descontinuidade: $x = 1$ e $x = 2$. Mas como a continuidade no ponto $x = 2$ depende do valor de a, a função não pode ser contínua para todo a:

$$\lim_{h\to 0^+} f(2+h) = \lim_{h\to 0^+} (a + \ln\sqrt{1+h}) = a, \qquad \lim_{h\to 0^-} f(2+h) = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{2}(1+h)^2 = \frac{1}{2}.$$

Logo, f é contínua em $x = 2$ somente se $a = 1/2$.

(1) Para $a = 1/2$, a função f é diferenciável em todos os pontos do domínio.

Falso, apesar do gabarito ter dado como verdadeiro. Pelo item (0), f é contínua em $x = 2$ quando $a = 1/2$. Para checar diferenciabilidade, temos que a função f será derivável em x se e somente se existirem os limites laterais e estes forem iguais:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Temos, para $x = 2$,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{1}{2}(1+h)^2 - \frac{1}{2}}{h} = \frac{1}{2}\lim_{h\to 0^-} \frac{h^2+2h}{h} = 1,$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{a+\ln\sqrt{1+h}-\frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\ln\sqrt{1+h}}{h} = \frac{1}{2}\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{1+h} = \frac{1}{2}$$

Portanto a função não é derivável em $x = 2$.

(2) Se $a = 1/2$, $f'(2)$ existe e $f'(2) > 1$.

Falso, vide item (1).

(3) O ponto $x = 1$ é um ponto de inflexão. Ou seja, a função muda de concavidade em $x = 1$.

Verdade. Primeiro conferimos que f é derivável em $x = 1$ e $f'(1) = 0$:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h^2}{h} = 0, \qquad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2}\frac{h^2}{h} = 0.$$

Quanto à mudança de concavidade, para $x < 1$, temos que

$$f'(x) = -2(x-1), \qquad f''(x) = -2 < 0.$$

Para $x > 1$:

$$f'(x) = (x-1), \qquad f''(x) = 1 > 0.$$

(4) A função f atinge um máximo relativo em $x = 1$, pois $f'(1) = 0$.

Falso. Note que $x = 1$ não pode ser máximo relativo pois $f(x) > 0$ para $x > 1$ e $f(x) < 0$ para $x < 1$. De fato, como $x = 1$ é ponto de inflexão, não pode ser de máximo local.

17.1.2. Funções crescentes/decrescentes, côncavas/convexas; pontos críticos e de inflexão.

ANPEC 2018, Questão 4. Julgue as seguintes afirmativas abaixo.

(0) A função $f(x) = \ln(x^2 - 1)$ é convexa no seu domínio;

Falso. Note que o domínio da f é dado pelos pontos $x \in \mathbb{R}$ tais que $x^2 - 1 > 0$, i.e., $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Calculando as derivadas:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}, \qquad f''(x) = \frac{-2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}.$$

Portanto $f''(x) < 0$, para todos pontos do domínio e f é côncava.

(1) A função $f(x) = (\ln x)^2 - 1$ tem um ponto de inflexão no menor ponto onde ela se anula;

Falso. O domínio da função f é $(0, +\infty)$. Os pontos onde a função se anula são dados por $f(x) = (\ln x)^2 - 1 = 0$. Logo $x = e^{-1}$ ou $x = e$. Para determinar se $x = e^{-1}$ é de inflexão, calculamos

$$f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}, \qquad f''(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{2 \ln x}{x^2},$$

Como $f''(1/e) \neq 0$, então $x = e^{-1}$ não é ponto de inflexão.

(2) A função $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$ tem três pontos de inflexão;

Verdadeiro. Note que

$$f'(x) = \frac{1 - 2x - x^2}{(1 + x^2)^2}, \qquad f''(x) = \frac{(1 - x)(2x^2 + 8x + 2)}{(1 + x^2)^3}.$$

Temos então três candidatos a pontos de inflexão: $x_1 = -2 - \sqrt{3}$, $x_2 = 1$ e $x_3 = -2 + \sqrt{3}$. Note que a segunda derivada é positiva para $x \in (-\infty, -2 - \sqrt{3})$ e negativa para $x \in (-2 + \sqrt{3}, \infty)$. Como $2x^2 + 8x + 2 < 0$ em $(-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3})$, então a segunda derivada troca de sinal em $x = -1$. Portanto f tem três pontos de inflexão.

(3) A função do item anterior tem dois pontos críticos e nenhum deles é um extremo da função;

Falso. Do item (2), temos dois pontos críticos $x_1 = \sqrt{2} - 1$ e $x_2 = -\sqrt{2} - 1$. Dado que $f''(\sqrt{2} - 1) < 0$, então x_1 é ponto de máximo. Portanto existe pelo menos um ponto crítico que é extremo.

(4) A função do item (2) decresce quando o valor absoluto de x tende para o infinito.

Anulada. Para $|x| > 4$ e do item (2), temos que $f'(x) < 0$. Então a função é estritamente decrescente para $|x| > 4$. Logo para a função f é decrescente desde que $|x| > 4$. Entretanto os valores de f *crescem* quando $x \to -\infty$, o que tornou a pergunta ambígua.

17.1.3. Pontos extremos.

ANPEC 2020, Questão 13. As seguintes funções são definidas:

Sejam $f(x) = (4x - 1)e^{-2x}$ e $g(x) = (4x + 1)e^{-2x}$.

Julgue as seguintes afirmativas.

(0) As funções f e g atingem seus pontos de máximo no intervalo $[2, \infty]$.

O gabarito afirma que a afirmativa é falsa. Na verdade, a questão á confusa, ao incluir o valor ∞ no intervalo, levantando dúvidas sobre qual seria o domínio das funções (reais estendidos?). Bom, mesmo supondo que o domínio das funções é $(-\infty, \infty)$, a questão ainda é dúbia. Um primeira interpretação é que os pontos de máximo das funções são atingidos e pertencem ao intervalo $[2, \infty)$ (neste caso a afirmativa é falsa). Outra possibilidade é que a função, quando definida no intervalo $[2, \infty)$, atinge seu ponto de máximo (neste caso, a afirmativa é verdadeira).

Aparentemente, vale a primeira interpretação. Neste caso, os pontos extremos, se forem atingidos, são pontos críticos. Derivado as funções f e g, obtemos

$$f'(x) = 2(3 - 4x)e^{-2x}, \qquad g'(x) = 2(1 - 4x)e^{-2x}.$$

Os pontos críticos para f e g são $x = 3/4$ e $x = 1/4$. Então os possíveis pontos de máximo ou mínimo são menores de 1.

(1) Sejam x_0 e y_0 os pontos de máximo das funções f e g, respectivamente. Então $f(x_0) > g(y_0)$.

Falso. Antes de mais nada, note que, como

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0,$$

e como tanto a f como a g tomam valores positivos, então os pontos de máximo são atingidos. Note que

$$4x - 1 < 4x + 1 \implies f(x) < g(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$f(x_0) < g(x_0) \leq g(y_0).$$

ANPEC 2019, Questão 8. Quais dos itens abaixo são verdadeiros e quais são falsos:

(1) A função $f(x) = \frac{e^{-x}-1}{x-1} > 0$, para $x > 1$.

Falso. Em particular, $f(2) < 0$.

(2) A função do item (1) é estritamente crescente e limitada superiormente por zero.

Anulada (o gabarito original foi que a afirmativa é verdadeira). Note que não é claro pelo item (1) qual é o domínio da f. Pode ser $(1, \infty)$ como o item (1) parece indicar, ou $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. Considerando-se o domínio como $x > 1$, então

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}(x-1) - e^{-x} + 1}{(x-1)^2} = \frac{1 - xe^{-x}}{(x-1)^2} > 0$$

pois xe^{-x} é estritamente decrescente (mostre isto) e $xe^{-x} < 1$ para $x > 1$. Como f' é positiva em todo domínio $(1, \infty)$, então f é estritamente crescente. Finalmente, f é limitada superiormente por zero em $(1, \infty)$, pois $e^{-x} - 1 < 0$ e $x - 1 > 0$ para $x > 1$.

Já em $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, como $f(0) = 0 > f(2) = e^{-2} - 1$, a função não é crescente nem limitada superiormente por zero.

(3) Se f é a função do item (1), então temos que $\sup_{x>1} f(x) > 0$, em que $\sup_{x>1} f(x)$ é o supremo de f para $x > 1$.

Falso. Para $x > 1$, temos $e^{-x} - 1 < 0$ e $x - 1 > 0$. Portanto, $f(x) < 0$ em $(1, \infty)$. Logo, f é limitada por zero e portanto $\sup_{x>1} f(x) \leq 0$.

A questão foi anulada, sem motivo aparente. Talvez por causa do domínio $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ não ser um intervalo.

(4) O mínimo da função $1 - xe^{-x}$ é atingido em $x = 1$.

Verdadeira. Na verdade, não é possível determinar se a afirmativa é verdadeira ou falsa, pois o domínio da função não foi determinado.

Vamos supor que o domínio seja $\mathbb{R}$, e seja $f(x) = 1 - xe^{-x}$. Então

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = 1.$$

Como $f(1) = 1 - e^{-1} < 1$, então f atinge seu mínimo. Buscando pontos críticos, calculamos

$$f'(x) = -e^{-x} + xe^{-x} = 0 \implies x = 1.$$

Como $x = 1$ é o único ponto crítico, ele tem que ser ponto de mínimo. A afirmativa seria então verdadeira.

ANPEC 2018, Questão 5. Nesta questão, as seguintes informações são dadas:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^3 (isto é, existem as derivadas de f até terceira ordem e f''' é contínua).

Considere então as seguintes afirmativas.

(0) Se $f'(x^*) = 0$ e $f''(x^*) < 0$, então x^* é ponto de máximo global de f;

Falso. Da definição, se $f'(x^*) = 0$ e $f''(x^*) < 0$, então x^* é um ponto de máximo local, mas não necessariamente é máximo global. Considere a seguinte função

$$f(x) = -x^2 + x^6.$$

Então $f'(0) = 0$ e $f''(0) < 0$, mas $x = 0$ não é máximo global pois $\lim_{x\to\infty} = \infty$ e a função não tem máximo global.

(1) Se a expansão em Taylor em segunda ordem de $f(x)$ em torno de $x = 2$ é $P_2(x) \approx 10 + 2(x-2)^2$, então podemos afirmar que $f(x)$ tem um máximo local em 2;

Falso. Pelo polinômio de Taylor, em segunda ordem, em torno de $x_0 = 2$, temos

$$P_2(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 = 10 + 2(x-2)^2.$$

Logo, $f(2) = 10$, $f'(2) = 0$ e $f''(2) = 4$. Dado que $f'(2) = 0$ e $f''(2) = 4 > 0$, o ponto $x = 2$ é mínimo local.

(2) Assuma que $f''(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e que $f'(3) = 0$. Nestas condições, $x = 3$ é um mínimo global;

Verdadeiro. Dado que $f''(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então f é estritamente convexa em $\mathbb{R}$. Como $x = 3$ é mínimo local (pois $f'(3) = 0$ e $f''(3) > 0$), então é também mínimo global.

(3) Os pontos de máximo e de mínimo local de $f(x) = e^{x^3-x}$ são, respectivamente, $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\frac{1}{\sqrt{3}}$;

Verdadeiro. Derivando as funções f e f', segue que

$$f'(x) = (3x^2-1)e^{x^3-x}, \qquad f''(x) = 6xe^{x^3-x} + (3x^2-1)^2 e^{x^3-x}.$$

Os pontos críticos são determinados por $f'(x) = 0$, e então $x = -\sqrt{1/3}$ ou $x = \sqrt{1/3}$. Nestes casos $f''(-\sqrt{1/3}) < 0$ e $f''(\sqrt{1/3}) > 0$. Portanto, $x = -\sqrt{1/3}$ é ponto de máximo local e $x = \sqrt{1/3}$ é ponto de mínimo local. Como estes são os únicos pontos críticos, não há outros pontos de máximo ou mínimo.

(4) Se $f'(x^*) = f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) < 0$, então x^* não é máximo nem mínimo local.

Verdadeiro. Dado $f'(x^*) = 0$, então x^* é ponto crítico, que é candidato a ser de mínimo ou de máximo, i.e., ponto extremo. Já que $f''(x^*) = 0$ não se pode concluir que x^* seja ponto extremo. Por outro lado x^* é candidato a ponto de inflexão já que $f''(x^*) = 0$. Dado que $f'''(x) < 0$, existe um intervalo $(x^* - \delta, x^* + \delta)$, com $\delta > 0$, tal que f'' é estritamente decrescente. Portanto, $f''(x^*) > 0$, em $(x^* - \delta, x^*)$ e $f''(x^*) < 0$, em $(x^*, x^* + \delta)$. Como $f''(x^*) = 0$, muda de sinal, então x^* é ponto de inflexão.

17.1.4. Polinômio de Taylor.

ANPEC 2019, Questão 9.

> Os computadores calculam algumas funções matemáticas usando o Polinômio de Taylor. Para ilustrar este procedimento, calcule
>
> $$\left(f\left(\frac{3}{10}\right) - P_2\left(\frac{3}{10}\right)\right) \times 10^4,$$
>
> em que $f(x) = \ln(1+x)$ e $P_2(x)$ é o Polinômio de Taylor de segunda ordem da função $f(x)$, em torno de $x = 0$. Para fazer este cálculo use $0,2623$ como valor para $\ln(1,3)$.

O polinômio de Taylor de segunda ordem, em torno de $x = 0$ é

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + f''(0)\frac{(x-0)^2}{2}.$$

Já que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ e $f''(0) = -1$ temos

$$P_2(x) = x - \frac{x^2}{2} \implies P_2\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{51}{200}.$$

Então

$$\left(f\left(\frac{3}{10}\right) - P\left(\frac{3}{10}\right)\right) \times 10^4 = \left(\ln(1,3) - \frac{51}{200}\right) \times 10^4 = 73.$$

ANPEC 2014, Questão 7.

(4) O coeficiente de x^2 no desenvolvimento de Taylor de terceiro grau de $\nu(x) = \sqrt{x}$ no ponto $x_0 = 1$ é $1/16$.

Falso. O polinômio de Taylor de terceiro grau

$$\begin{aligned} p(x) &= \nu(1) + \nu'(1)(x-1) + \frac{\nu''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{\nu'''(1)}{6}(x-1)^3 \\ &= [\nu(1) - \nu'(1) + \dots] + [\nu'(1) + \dots]x + \left[\frac{\nu''(1)}{2} - \frac{\nu'''(1)}{6}\right]x^2 + [\dots]x^3. \end{aligned}$$

Derivando ν, temos

$$\nu'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \nu''(x) = -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x^3}}, \quad \nu'''(x) = \frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{x^5}}$$

Logo para $x = 1$ tem-se $\nu'(1) = 1/2, \quad \nu''(1) = -1/4$ e $\nu'''(1) = 3/8$. Do polinômio de Taylor, nós interessa o coeficiente de x^2:

$$\frac{\nu''(1)}{2} - \frac{\nu'''(1)}{2} = \frac{\nu''(1) - \nu'''(1)}{2} = -\frac{5}{16}.$$

ANPEC 2012, Questão 13. As afirmativas abaixo levam em conta a expansão de Taylor para a função $y = f(x)$ em torno do ponto $x = 0$.

(0) Se $f(x) = \sin x$, então a série de Taylor só tem termos de grau ímpar.

Verdadeiro. A série de Taylor em torno de 0 é

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots .$$

Para $f(x) = \sin(x)$, temos

$$\sin(x) = \sin(0) + \cos(0)x - \frac{\sin(0)}{2!}x^2 - \frac{\cos(0)}{3!}x^3 + \frac{\sin(0)}{4!}x^4 + \cdot$$

e portanto

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

1 Se $f(x)$ é um polinômio de grau n, então a expansão de Taylor de f em torno de 0 é o próprio polinômio.

Verdadeiro. Seja um polinômio de grau n

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

Derivando este polinômio, temos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} \\
f''(x) &= 2!a_2 + 3 \times 2 \times a_3x + 4 \times 3a_4x^2 + \cdots + n \times (n-1)a_nx^{n-2} \\
f'''(x) &= 3!a_3 + 4 \times 3 \times 2a_4x + 5 \times 4 \times 3a_5x^2 + \cdots + n \times (n-1)(n-2)a_nx^{n-3} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= n!a_n \\
f^{(n+1)}(x) &= 0.
\end{aligned}$$

Logo

$$f(0) = a_0, \quad f'(0) = a_1, \quad f''(0) = 2!a_2, \quad f'''(0) = 3!a_3, \cdots, f^{(n)}(x) = n!a_n.$$

A expansão de Taylor em torno de 0 é portanto

$$\begin{aligned}
&f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \\
&\qquad = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\
&\qquad\qquad = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = f(x).
\end{aligned}$$

2 Seja k uma constante positiva. Se $f(x) = e^{kx}$ e os coeficientes dos termos de 2ª e 3ª ordem são iguais, então $k = 3$.

Verdadeiro. Derivando a função $f(x) = e^{kx}$, temos

$$f'(x) = ke^{kx}, f''(x) = k^2e^{kx}, f'''(x) = k^3e^{kx}, \cdots, f^{(n)}(x) = k^ne^{kx}.$$

Pela série de Taylor em torno de 0, obtemos

$$f(x) = 1 + kx + \frac{k^2}{2!}x^2 + \frac{k^3}{3!}x^3 + \cdots .$$

Se os coeficiente dos termos de 2^a e 3^a ordem forem iguais,

$$\frac{k^2}{2!} = \frac{k^3}{3!}.$$

Assim $k = 0$ ou $k = 3$. Como k é positiva, então $k = 3$.

17.1.5. Questões interessantes.

ANPEC 2016, Questão 3. Considere as seguintes afirmações.

1 Se $f(x) = 4x(1-x)$ e $g(x) = f^{(n)}(x)$ (composição de f consigo mesma "n" vezes), então $g'(3/4) = (3/4)^n$;

Falso. Tome $n = 1$ e faça as contas: $g(x) = f(x) = 4x - 4x^2$ e $g'(x) = 4 - 8x$. Logo $g'(3/4) = -2$.

4 Se $f(x) = 4x(1-x)$ é definida no domínio $[0,1]$, a função $f^{(3)}(x) = f(f(f(x)))$ tem 4 máximos absolutos em $[0,1]$.

Verdadeiro. Sejam $f(x) = y$ e $f(y) = z$, então

$$f(f(f(x))) = f(z) = 4z - 4z^2.$$

Note que para cada $\alpha \in [0,1)$, existem duas raízes distintas de $f(x) = \alpha$, mas somente uma para $f(x) = 1$, i.e., $x = 1/2$. Note que $x = 1/2$ é ponto de máximo, e existem dois valores distintos z_1 e z_2, ambos diferentes de $1/2$, tais que $f(z_i) = 1/2$. Como $f(y_i) \neq 1$, então existem dois valores distintos y_1^1 e y_2^1 tais que $f(y_j^1) = y_1$. Analogamente, existem dois valores distintos y_1^2 e y_2^2 tais que $f(y_j^2) = y_2$. Todos os valores são distintos pois têm imagens distintas.

Resumindo:

$$f(f(f(x))) = 1 \implies f(f(x)) = 1/2 \implies f(x) \in \{z_1, z_2\} \implies f(x) \in \{y_1^1, y_2^1, y_1^2, y_1^2\}.$$

ANPEC 2015, Questão 14.

Se f é uma função inversível e de classe C^1 (diferenciável, com derivada contínua), com inversa f^{-1} de classe C^1, tal que $f(1) = 1$ e $f'(1) = 2$, calcular o seguinte limite:

$$L = \lim_{h\to 0} \frac{f(1-h) - f(1+2h)}{f^{-1}(1+3h) - f^{-1}(1+h)}.$$

Dar como resposta $|10L|$.

Resposta: 60. Chame $g(x) = f^{-1}(x)$, e note que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1-h) - f(1+2h)}{f^{-1}(1+3h) - f^{-1}(1+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(1-h) - f(1+2h)}{h} \left(\lim_{h\to 0} \frac{g(1+3h) - g(1+h)}{h} \right)^{-1}$$

se os limites existirem. Agora, usando Taylor,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1-h) - f(1+2h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(1) - hf'(1) - [f(1) + 2h]f'(1) + h^2(\dots)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-3hf'(1)}{h} = -3f'(1).$$

Similarmente,

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(1+3h) - g(1+h)}{h} = 2g'(1)$$

Como $g(x) = f^{-1}(x)$, então $g'(y) = 1/f'(x)$ onde $y = f(x)$. Portanto, como $f(1) = 1$, temos que $g'(1) = 1/f'(1)$ e

$$L = \lim_{h\to 0} \frac{f(1-h) - f(1+2h)}{f^{-1}(1+3h) - f^{-1}(1+h)} = -3f'(1)/[2f'(1)]^{-1} = -3[f'(1)]^2/2 = -6.$$

ANPEC 2007, Questão 10.

Sejam $Q \subset R$ o conjunto dos números racionais e $g : R \to R$ a função definida por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in Q \\ 81 & \text{se } x \notin Q \end{cases}$$

em que $f : R \to R$ é a função dada por $f(x) = (x^2 - 9)^2$.

0 g é contínua em apenas três pontos: $-3\sqrt{2}, 0, 3\sqrt{2}$.

(0) Verdadeiro. A função g vai ser contínua nos pontos onde $f(x) = 81$. Portanto, g é contínua em $x_1 = -3\sqrt{2}, x_2 = 0$ e $x_3 = 3\sqrt{2}$.

ANPEC 2004, Questão 7.

(0) Seja $f : \Re \to \Re$ uma função estritamente côncava e duas vezes continuamente diferenciável. Se $a < b$, então $f'(a) > f'(b)$.

Verdadeiro. Usar

$$f'(b) - f'(a) = \int_a^b f''(s)\,ds < 0.$$

(1) Seja $f : \Re \to \Re$ uma função duas vezes continuamente diferenciável tal que existem $a < b$ com $f'(a) = f'(b) = 0$ e $f(a) = f(b) = 1$. Se existe c tal que $a < c < b$ e $f(c) = 0$, então existe d tal que $a < d < c$ e $f''(d) = 0$.

Falso.

ANPEC 2003, Questão 8. Assinale V (Verdadeiro) ou F (Falso):

(4) $f''(x) > 0$, para todo $x \in [a, b]$, então $f(x) < f'(b)(x-b)+f(b)$, para $x \in [a, b]$.

Falso. Tome $x = b$.

ANPEC 2002, Questão 4.

(0) Se

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases},$$

então $f'(0) = f''(0) = 0$.

Verdadeiro. Esta função tem infinitas derivadas e a k-ésima derivada $f^{(k)}(0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

ANPEC 2000, Questão 2.

(2) Se $f : \Re \to \Re$ é tal que $\lim_{s\to 0} \frac{f(x+s)-f(x-s)}{2s} \in \Re$ então f é derivável em x;

Falso. A função não precisa ser nem contínua para tal limite existir. Tome $f(x) = 0$ para $x \neq 0$ e $f(1) = 1$. Então f não é derivável no zero pois não é contínua. Entretanto,

$$\lim_{s\to 0} \frac{f(x+s)-f(x-s)}{2s} = 0$$

(4) Se f é tal que $f(0) = 5$ e $f'(t) = \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\ln(e+t)\right)$, então $(f^{-1})'(5) = 4$.

Verdadeiro. Se $g(x) = f^{-1}(x)$, então $g'(y) = 1/f'(x)$, onde $y = f(x)$. Então, como $5 = f(0)$,

$$g'(5) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\ln e\right)} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 4.$$

EXERCÍCIO 6 (ANPEC 2000, Questão 7). *Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):*

(0) *Se f' é estritamente crescente no intervalo (a, b) então f é estritamente convexa neste intervalo;*

(1) *Se f e g são funções côncavas na reta $\Re$, deriváveis até a ordem 2 e $f'(x) \geq 0$, para todo $x \in \Re$ então $(f \circ g)(x)$ é uma função côncava em $\Re$;*

(2) *Se f é estritamente côncava em (a, b), então vale a desigualdade $\frac{f(b)-f(x)}{b-x} > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ para todo $x \in (a, b)$;*

(3) *Se f é côncava e derivável no intervalo aberto (a, b), então $f(y) - f(x) \leq f'(x)(y - x)$, para todo $x, y \in \Re$;*

Solução

(0) **Verdadeiro.**

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Falso.**

(3) **Falso.**

EXERCÍCIO 7 (ANPEC 1999, Questão 3). *Sejam $f : R \to R$ e $g : R \to R$ funções contínuas. Ponha $h(x) = f(g(x))$ e $u(x) = g(f(x))$. Classifique como V ou F as afirmações abaixo.*

(0) *$u(x) = h(x)$ para $x = 0$.*
(1) *Se f é derivável então h também o é.*
(2) *h é contínua.*
(3) *Se h e u são deriváveis então $h'(x) = u'(x)$ para todo x.*

Solução

(0) **Falso.**
(1) **Falso.**
(2) **Verdadeiro.**
(3) **Falso.**

EXERCÍCIO 8 (ANPEC 1997, Questão 4). *Classifique como verdadeira ou falsa as afirmações a seguir*

(0) *Se f e g são funções reais de variável real tais que $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$, para todo x, então a função composta $h(x) \equiv f(g(x))$ é crescente.*
(1) *Se f e g são funções reais de variável real tais que f é convexa e g é côncava, então $5f - 2g$ é convexa.*
(2) *Se f e g são funções reais de variável real tais que $f, f'g$ e g são crescentes,então a função produto $h(x) \equiv f(x).g(x)$ é convexa.*

Solução

(0) **Verdadeiro.**
(1) **Verdadeiro.**
(2) **Falso.**

EXERCÍCIO 9 (ANPEC 1996, Questão 1). *Indique se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas:*

0. *Uma função $f : \Re \to \Re$ duas vezes derivável é estritamente côncava se, e somente se, a sua derivada segunda é estritamente negativa.*
1. *A função $f(x) = xe^{-x}$ para $x > 0$ possui um único ponto crítico que corresponde a um ponto de máximo global estrito, mas f não é côncava.*
2. *Seja $f : \Re \to \Re$ uma função convexa e derivável, exceto em um ponto, no qual possui derivada à direita positiva e à esquerda negativa. Então este ponto é um mínimo global para f .*
3. *A função $f(x, y) = x^3 + 3x^2 + 2$ é côncava no intervalo $-\frac{5}{2} \le x \le -\frac{3}{2}$.*

Solução

0. **Falso.**
1. **Verdadeiro.**
2. **Verdadeiro.**
3. **Verdadeiro.**

Exercício 10 (ANPEC 1996, Questão 5). *Indique se a afirmativa é verdadeira ou falsa:*

0. *Se $f : [0, 1] \to [0, 1]$ é continua em $[0, 1]$, existe $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = x$. (Sugestão: desenhe um gráfico).*

17.2. Questões ANPEC Resolvidas

Exercício 11 (ANPEC 2022, Questão 4). *Considere as funções $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas, respectivamente, por $f(x) = (\max\{x, 0\})^2$, $g(x) = -(\min\{x, 0\})^2$, e $h(x) = [f(x-1) + g(x-1)]^3$. Julgue as seguintes afirmativas:*

0. *$f(x) + g(-x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*
1. *A função h é uma bijeção.*
2. *A função f é contínua em $x = 0$.*
3. *A função g não é derivável em $x = 0$.*
4. *A função h possui um ponto de inflexão em $x = -1$.*

Preliminar

$$f(x) = \Big(\max\{x,0\}\Big)^2 = \begin{cases} 0; & x \leq 0 \\ x^2; & x > 0 \end{cases}$$

$$g(x) = -\Big(\min\{x,0\}\Big)^2 = \begin{cases} -x^2; & x \leq 0 \\ 0; & x > 0 \end{cases}$$

$$h(x) = \Big[f(x-1) + g(x-1)\Big]^3 = \begin{cases} -(x-1)^6; & x \leq 1 \\ (x-1)^6; & x > 1 \end{cases}$$

.

Solução

(0) **Falso.**
Seja $x = 1$, então $f(1) + g(-1) = 1 - 1 = 0$.

(1) **Verdadeiro.**

Injetiva.
Derivando a função h, temos

$$h'(x) = \begin{cases} -6(x-1)^5; & x \leq 1 \\ 6(x-1)^5; & x > 1 \end{cases}$$

Note que $h'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, então $h(x)$ é injetiva (crescente).

Sobrejetiva.
Dado que

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to \infty} h(x) = \infty$$

h é contínua e h é crescente, então h é sobrejetiva.

(2) **Verdadeiro.** *Ver solução na página 387*

(3) **Falso.** *Ver solução na página 387.*

④ **Falso.** *Ver solução na página 387.*

Exercício 12 (ANPEC 2021, Questão 11). *Considere duas funções ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) que são duas vezes continuamente diferenciáveis e satisfazem, dada uma lista de parâmetros $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, a desigualdade $|f'(x) - f(x)|^{\alpha} + \beta|g''(x) + g(x)| \leq \gamma$. Julgue as afirmações abaixo de acordo com a sua veracidade:*

⓪ *Quando $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ e $\gamma = 0$, as funções nulas $f(x) = g(x) = 0$ para todo x satisfazem a desigualdade do enunciado.*

① *Quando $\alpha = \beta = 2$ e $\gamma = 1$, não existe solução para a desigualdade do enunciado.*

② *Quando $\alpha = \gamma = 1$ e $\beta = 0$, dada uma constante $a \in \mathbb{R}$, as funções definidas por $f(x) = ae^x + \frac{\sin(x)}{2}$ e $g(x) = 2^{\frac{3x}{2} - 2x}$ para todo x satisfazem a desigualdade do enunciado.*

③ *Quando $\alpha = \beta = 1$ e $\gamma = 0$, a solução da desigualdade tem a forma $f(x) = a\ e^x$ e $g(x) = b\ \sin(x) + c\ \cos(x)$ para todo x, para determinadas constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$.*

④ *Quando $\alpha = \gamma = 1$ e $\beta = 0$ e o sinal de desigualdade presente no enunciado é substituído pelo sinal de igualdade, não existe função f que juntamente com outra função g satisfaça tal igualdade.*

Solução

⓪ **Verdadeiro.**
Para $f(x) = g(*) = 0$, temos $f'(x) = g''(x) = 0$, então para todo x satisfazem a desigualdade do enunciado, dado que $\gamma = 0$.

① **Falso.**
Para $f(x) = g(x) = 0$, e dado que $\alpha = \beta = 2$ e $\gamma = 1$, temos a desigualdade do enunciado.

(2) **Verdadeiro.**
A função

$$|f(x) - f'(x)| = \left|\frac{\cos(x) - \sin(x)}{2}\right|$$

então

$$|f(x) - f'(x)| \leq 1.$$

Agora, para $\alpha = \gamma = 1$ e $\beta = 0$, obtemos a desigualdade do enunciado.

(3) **Verdadeiro.**
As funções, para $f(x) = ae^x$ e $g(x) = b\sin(x) + c\cos(x)$,

$$|f(x) - f'(x)| = 0 \qquad e \qquad |g''(x) + g(x)| = 0$$

Logo, a desigualdade do enunciado é satisfeita, para $\alpha = \beta = 1$ e $\gamma = 0$.

(4) **Falso.**
Seja $f(x) = 1$, então $f'(x) = 0$. Dado que $\alpha = \gamma = 1$ e $\beta = 0$, juntamos

$$|f'(x) - f(x)| = 1.$$

Exercício 13 (ANPEC 2020, Questão 3). *Seja $a > 0$. Considere a seguinte função f de variável real com valores reais, definida da seguinte forma:*

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 & se\ x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(x-1)^2 & se\ 1 < x \leq 2 \\ a + \ln\sqrt{x-1} & se\ x > 2 \end{cases}.$$

Julgue as seguintes afirmativas:

(0) *Para todos os valores de $a > 0$, a função f é contínua em todo seu domínio.*

(1) *Para $a = 1/2$, a função f é diferenciável em todos os pontos do domínio.*

(2) *Se $a = 1/2$, $f'(2)$ existe e $f'(2) > 1$.*

③ *O ponto $x = 1$ é um ponto de inflexão. Ou seja, a função muda de concavidade em $x = 1$.*

④ *A função f atinge um máximo relativo em $x = 1$, pois $f'(1) = 0$.*

Solução

⓪ **Falso.** *Ver solução apresentada na página 389*

① **Falso (gabarito é Verdadeiro).** *Ver solução apresentada na página 389*

② **Falso.** *Ver solução apresentada na página 389*

③ **Verdadeiro.** *Ver solução apresentada na página 389*

④ **Falso.** *Ver solução apresentada na página 389*

Exercício 14 (ANPEC 2020, Questão 13). *Sejam $f(x) = (4x-1)e^{-2x}$ e $g(x) = (4x+1)e^{-2x}$. Julgue as seguintes afirmativas:*

⓪ *As funções f e g atingem seus pontos de máximo no intervalo $[2, \infty]$.*

① *Sejam x_0 e y_0 os pontos de máximo das funções f e g, respectivamente. Então $f(x_0) > g(y_0)$.*

② *$f(x) < 1$, para todo x real.*

③ *$g(x) < 1$, para todo x real.*

④ $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq \lim_{x\to\infty} g(x)$.

Solução

⓪ **Falso.**

Derivado as funções f e g, obtemos

$$f'(x) = 2(3-4x)e^{-2x} \quad e \quad g'(x) = 2(1-4x)e^{-2x}.$$

Os pontos críticos para f e g são $x = 3/4$ e $x = 1/4$. Então os possíveis máximos ou mínimos são menores de 1.

1 **Falso.**

Se x_0 e y_0 são pontos de máximo das funções f e g, então

$$f(x)(4x-1)e^{-2x} \leq f(x_0) = (4x_0-1)e^{2x_0}; \forall x \in \mathbb{R}$$
$$g(x)(4x+1)e^{-2x} \leq g(y_0) = (4y_0+1)e^{2y_0}; \forall x \in \mathbb{R}$$

Note que para $x \geq 1/4$, temos $f(x) \geq 0$ e $g(x) \geq 0$. Assim, os máximos são números não negativos. Logo,

$$f(x) < g(x) \quad ; \quad x \in [1/4, +\infty],$$
$$f(x_0) < g(x) \quad ; \quad x \in [1/4, +\infty],$$
$$f(x_0) < g(x) \leq g(y_0).$$

Portanto $f(x_0) < g(y_0)$.

2 **Verdadeiro.**

Do item 0, $x = 3/4$ e $x = 1/4$ são crítico. A segunda derivada da função f é

$$f''(x) = (16x-20)e^{-2x}.$$

Logo $f''(3/4) < 0$ e $f''(1/4) < 0$ então $x = 3/4$ e $x = 1/4$ são máximos locais.
Da primeira derivada, temos $f'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, +3/4)$ e $f'(x) < 0$ para $x \in (3/4, +\infty)$. Assim, f é crescente para $x \in (-\infty, 3/4)$ e decrescente para $x \in (3/4, +\infty)$. Então, $x = 3/4$ é máximo global. Portanto

$$f(x) \leq f(3/4) < 1.$$

3 **Falso.**

Consideremos $x = 0$, então $g(0) = 1 \not< 1$.

(4) **Falso.**

Aplicando a regra de L'Hôpital nos limites, temos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x-1}{e^{+2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{2e^{2x}} = 0$$
$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x+1}{e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{2e^{2x}} = 0$$

Podemos concluir que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x).$$

Exercício 15 (ANPEC 2019, Questão 8). *Quais dos itens abaixo são verdadeiros e quais são falsos:*

(0) *As funções $f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$ e $g(x) = \ln \frac{1}{(x^2-x+1)}$ se anulam nos mesmos pontos.*

(1) *A função $f(x) = \frac{e^{-x}-1}{x-1} > 0$, para $x > 1$.*

(2) *A função do item (1) é estritamente crescente e limitada superiormente por zero.*

(3) *Se f é a função do item (1), então temos que $\sup_{x>1} f(x) > 0$, em que $\sup_{x>1} f(x)$ é o supremo de f para $x > 1$.*

(4) *O mínimo da função $1 - xe^{-x}$ é atingido em $x = 1$.*

Solução

(0) **Verdadeiro.**

Seja $f(x) = g(x) = 0$, então

$$\ln(x^2 - x + 1) = \ln\left(\frac{1}{x^2 - x + 1}\right) = 0.$$

Logo

$$x^2 - x + 1 = \frac{1}{x^2 - x + 1} = 1.$$

Portanto para $x = 0$ e $x = 1$ as funções f e g se anulam.

(1) **Falso.**

Seja $x = 2$, *então* $f(2) = e^{-2} - 1 < 0$.

(2) **Verdadeiro ou Falso.**

No item anterior, o domínio da funçã f *não está definido. Se consideramos* $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\}$, *então a resposta é falsa, já que para* $x_1 = 0$ *e* $x_2 = 2$, *temos* $f(0) = 0 > f(2) = e^{-2} - 1$. *Portanto* f *não é estritamente crescente.*

A resposta será verdadeira se consideramos $Dom(f) = (1, \infty)$. *A seguir mostramos esta afirmação. Derivando a função* f, *temos*

$$f'(x) = \frac{1 - xe^{-x}}{(x-1)^2}.$$

Dado que $x > 1$, *então* $x < e^x$, *assim* $xe^{-x} < 1$, *logo* $0 < 1 - xe^{-x}$. *Portanto*

$$f'(x) = \frac{1 - xe^{-x}}{(x-1)^2} > 0$$

Se $f'(x) > 0$ *para* $x > 1$, *então* f *é estritamente crescente em todo* $x > 1$.

Agora, mostremos que f *está limitada superiormente por zero. Note que* $e^{-x} < 1$ *para* $x > 0$, *então* $e^{-x} - 1 < 0$. *Dado que* $x > 1$, *temos que* $f(x) = (e^{-x} - 1)/(x - 1) < 0$. *Portanto, a função* f *é limitada superiormente por zero.*

(3) **Falso.**

Para $x > 1$, *temos* $e^{-x} < 1$, *isto é* $e^{-x} - 1 < 0$. *Agora, dado que* $0 < x - 1$, *juntamos*

$$f(x) = \frac{e^{-x} - 1}{x - 1} < 0.$$

(4) **Falso.**

Para $x > 1$, *temos* $e^{-x} < 1$, *isto é* $e^{-x} - 1 < 0$. *Agora, dado que* $0 < x - 1$, *juntamos*

$$f(x) = \frac{e^{-x} - 1}{x - 1} < 0.$$

Então $\sup_{x>1} \leq 0$.

(5) **Verdadeiro.**

Denotemos $f(x) = 1 - xe^{-x}$, *então* $f'(x) = -e^{-x} + xe^{-x}$. *Logo* $x = 1$ *é ponto crítico. Agora,* $f''(x) = 2e^{-x} - xe^{-x}$. *Para* $x = 1$, *temos* $f''(1) = e^{-x} > 0$, *assim* $x = 1$ *é mínimo local. Note que para* $x < 1, f'(x) < 0$ *e para* $x > 1, f'(x) > 0$. *Então, a função* f *é decrescente para* $x \in (-\infty, 1)$ *e crescente para* $x \in (1, +\infty)$.

Portanto, o mínimo da função f *é atingido em* $x = 1$.

Exercício 16 (ANPEC 2019, Questão 9). *Os computadores calculam algumas funções matemáticas usando o Polinômio de Taylor.*

Para ilustrar este procedimento, calcule $\left(f\left(\frac{3}{10}\right) - P_2\left(\frac{3}{10}\right)\right) \times 10^4$, *em que* $f(x) = \ln(1+x)$ *e* $P_2(x)$ *é o Polinômio de Taylor de segunda ordem da função* $f(x)$, *em torno de* $x = 0$. *Para fazer este cálculo use* $0,2623$ *como valor para* $\ln(1,3)$.

Solução

O polinômio de taylor de segunda ordem, em torno de $x = 0$ *é*

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + f''(0)\frac{(x-0)^2}{2}.$$

Já que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ *e* $f''(0) = -1$ *temos* $P_2\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{51}{200}$. *Então*

$$\left(f\left(\frac{3}{10}\right) - P\left(\frac{3}{10}\right)\right) \times 10^4 = \left(\ln(1,3) - \frac{51}{200}\right) \times 10^4 = 73.$$

Exercício 17 (ANPEC 2018, Questão 4). *Julgue as seguintes afirmativas:*

(0) *A função* $f(x) = \ln(x^2 - 1)$ *é convexa no seu domínio;*

(1) *A função* $f(x) = (\ln x)^2 - 1$ *tem um ponto de inflexão no menor ponto onde ela se anula;*

(2) *A função* $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$ *tem três pontos de inflexão;*

(3) *A função do item anterior tem dois pontos críticos e nenhum deles é um extremo da função;*

(4) *A função do item (2) decresce quando o valor absoluto de x tende para o infinito.*

Solução

(0) **Falso.**

Note que $x^2 - 1 > 0$, então $Dom(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Derivado a função f, obtemos

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

Agora, derivando f', temos

$$f''(x) = \frac{-2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}.$$

Note que $f''(x) < 0$, para todo $x \in Dom(f)$. Então, f' é decrescente para todo $x \in Dom(f)$. Portanto, f é concava para abaixo (convexa).

(1) **Falso.**

O domínio da função f é $Dom(f) = (0, +\infty)$. Logo

$$f'(x) = \frac{2\ln x}{x} \quad e \quad f''(x) = \frac{2 - 2\ln x}{x^2}.$$

Assim, $f''(x) = 0$, então $2 - 2\ln x = 0$. Logo $x = e$. Os pontos onde a função se anula são $f(x) = (\ln x)^2 - 1 = 0$. Logo $x = e^{-1}$ ou $x = e$. Portanto $x = e^{-1}$ não é ponto de inflexão.

(2) **Verdadeiro.**

$$f'(x) = \frac{1 - 2x - x^2}{(1 + x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(1 - x)(2x^2 + 8x + 2)}{(1 + x^2)^3}$$

Da equação anterior temos três candidatos a pontos de inflexão $x_1 = -2 - \sqrt{3}$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 2 + \sqrt{3}$. Consideremos os intervalos $[-4, -2]$, $[-2, 0]$ e

$[0, 2]$ *para* x_1, x_2 *e* x_3, *respectivamente. então*

$$\begin{array}{llll} \textit{para} & x_1 = -2 - \sqrt{3}; & f''(-4) > 0 \quad e \quad f''(-2) < 0. \\ \textit{para} & x_2 = -2 + \sqrt{3}; & f''(-2) < 0 \quad e \quad f''(0) > 0. \\ \textit{para} & x_3 = 1; & f''(0) > 0 \quad e \quad f''(2) < 0. \end{array}$$

Portanto f *tem três pontos de inflexão.*

(3) **Falso.**
Da função $f'(x)$ *temos dois pontos críticos* $x_1 = \sqrt{2} - 1$ *e* $x_2 = -\sqrt{2} - 1$. *Dado que* $f''(\sqrt{2} - 1) < 0$, *então* x_1 *é ponto de máximo. Portanto existe pelo menos um ponto crítico que é extremo.*

(4) **Anulada.** *Ver resolução da página 391.*

Exercício 18 (ANPEC 2018, Questão 5). *Determine se as questões abaixo são verdadeiras ou falsas, considerando que* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função de classe* C^3 *(isto é, existem as derivadas de* f *até terceira ordem e* f''' *é contínua):*

(0) *Se* $f'(x^*) = 0$ *e* $f''(x^*) < 0$, *então* x^* *é ponto de máximo global de* f;
(1) *Se a expansão em Taylor em segunda ordem de* $f(x)$ *em torno de* $x = 2$ *é* $P_2(x) \approx 10 + 2(x-2)^2$, *então podemos afirmar que* $f(x)$ *tem um máximo local em 2;*
(2) *Assuma que* $f''(x) > 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$ *e que* $f'(3) = 0$. *Nestas condições,* $x = 3$ *é um mínimo global;*
(3) *Os pontos de máximo e de mínimo local de* $f(x) = e^{x^3 - x}$ *são, respectivamente,* $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ *e* $\frac{1}{\sqrt{3}}$;
(4) *Se* $f'(x^*) = f''(x^*) = 0$ *e* $f'''(x^*) < 0$, *então* x^* *não é máximo nem mínimo local.*

Solução

(0) **Falso.**
Da definição, se $f'(x^*) = 0$ *e* $f''(x^*) < 0$, *então* x^* *é um ponto de máximo local, mas não necessariamente é máximo global. Considere a seguinte*

função

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x.$$

Derivando a função f *e* f', *temos*

$$f'(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x-1)(x+2)(x+3),$$
$$f''(x) = 3x^2 + 8x + 1.$$

Logo, os pontos críticos são $x = 1, x = -2$ *e* $x = -3$. *Como* $f'(-2) = 0$ *e* $f''(-2) < 0$, *então* $x = -2$ *é máximo local, mas* f *não é máxima global, já que* $f(-2) < f(1000)$.

(1) **Falso.**

Pelo polinômio de Taylor, em segunda ordem, em torno de $x_0 = 2$, *temos*

$$P_2(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2,$$
$$P_2(x) = 10 + 2(x-2)^2.$$

Então, $f(2) = 0, f'(2) = 0$ *e* $f''(2) = 4$. *Dado que* $f'(2) = 0$ *e* $f''(2) = 4 > 0$, *o valor* $x = 2$ *é ponto de mínimo local.*

(2) **Verdadeiro.**

Dado que $f''(x) > 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$, *então* f *é estritamente convexa em* $\mathbb{R}$. *Logo, para todo* $x, y \in \mathbb{R}$ *e todo* $t \in [0,1]$ *temos*

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y)$$
$$\frac{f(y + t(x-y)) - f(y)}{t} < f(x) - f(y)$$
$$\frac{f(y + t(x-y)) - f(y)}{t(x-y)}(x-y) < f(x) - f(y)$$

Fazendo $t \to 0$, *seque que*

$$f'(y)(x-y) < f(x) - f(y).$$

Para $y = 3$, temos $f'(y) = 0$, e da desigualdade anterior

$$f(3) < f(x); \;\; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Portanto $x = 3$ é mínimo global.

(3) **Verdadeiro.**

Derivando as funções f e f', segue que

$$f'(x) = (3x^2 - 1)e^{x^3 - x}$$
$$f''(x) = 6xe^{x^3-x} + (3x^2 - 1)^2 e^{x^3-x}.$$

Os pontos críticos são $f'(x) = 0$, então $x = -\sqrt{1/3}$ ou $x = \sqrt{1/3}$. Nestes casos $f''(-\sqrt{1/3}) < 0$ e $f''(\sqrt{1/3}) > 0$. Portanto, $x = -\sqrt{1/3}$ é ponto de máximo local e $x = \sqrt{1/3}$ é ponto de mínimo local.

(4) **Verdadeiro.**

Dado $f'(x^*) = 0$, então x^* é ponto crítico, que pode ser mínimo ou máximo. Já que $f''(x^*) = 0$ não se pode concluir que x^* é mínimo ou máximo.
Por outro lado x^* é candidato a ponto de inflexão já que $f''(x^*) = 0$. Dado que $f'''(x) < 0$, existe um intervalo $(x^* - \delta, x^* + \delta)$ tal que f'' é decrescente, como $f''(x^*) = 0$, então x^* é ponto de inflexão.

Exercício 19 (ANPEC 2017, Questão 7). *Considere a seguinte função: $f(x) = 12x^5 - 15x^4 - 220x^3 + 270x^2 + 1080x - 56$. Analise o valor de verdade das seguintes afirmações:*

(0) *$x = -3$ é um máximo relativo;*
(1) *Para $x \geq 3$ a função f é côncava;*
(2) *Existem três pontos de inflexão;*
(3) *Quando $x \to +\infty$, o valor de $f(x) \to -\infty$;*
(4) *No intervalo $[-3, 2]$ existe um mínimo absoluto interior.*

Solução

(0) **Verdadeiro.**

Derivando a função f, temos

$$f'(x) = 60(x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18) = 60(x-3)(x-2)(x+1)(x+3).$$

Então, os pontos críticos são: $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$ e $x_4 = 3$.

Agora, derivando a função f', juntamos

$$f''(x) = 60(4x^3 - 3x^2 - 22x + 9).$$

Então,

$$f''(-3) = 60(-4 \times 27 - 3 \times 9 + 22 \times 3 + 9) = -3600.$$

Portanto, $x = -3$ é máximo relativo.

(1) **Falso.**

Do item anterior, temos

$$f''(x) = 60(4x^3 - 3x^2 - 22x + 9) = 60(x(x+2)(4x-11) + 9).$$

Para todo $x \geq 3$, obtemos $f''(x) > 0$. Logo, a função f tem concavidade para cima (convexa).

(2) **Verdadeiro.**

Do item (0), temos

para $x \in (-\infty, -3)$; $f'(x) > 0$; f *é crescente*
para $x \in (-3, -1)$; $f'(x) < 0$; f *é decrescente*
para $x \in (-1, 2)$; $f'(x) > 0$; f *é crescente*
para $x \in (2, 3)$; $f'(x) < 0$; f *é decrescente*
para $x \in (3, +\infty)$; $f'(x) > 0$; f *é crescente.*

Logo, a segunda derivada de f é

$$f''(x) = 60[x(x+2)(4x-11) + 9]$$

Dado que $f''(-3) < 0$, *então* $x = -3$ *é máximo relativo.*
Dado que $f''(-1) > 0$, *então* $x = -1$ *é mínimo relativo.*

Dado que $f''(2) < 0$, *então* $x = 2$ *é máximo relativo.*

Dado que $f''(3) > 0$, *então* $x = 3$ *é mínimo relativo.*

Assim

De $(-3, -1)$ *há um ponto de inflexão.*

De $(-1, 2)$ *há um ponto de inflexão.*

De $(2, 3)$ *há um ponto de inflexão.*

Portanto, existe três pontos de inflexão.

3 **Falso.**

Do item anterior, a função f *é crescente para* $x \in (3, +\infty)$ *e* $x = 3$ *é mínimo local. Então*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

4 **Verdadeiro.**

Do item 2, *temos*

Para $x \in (-3, -1)$; f *é decrescente*

Para $x \in (-1, 2)$; f *é crescente.*

Para $x = -1, f(-1)$ *é mínimo local. Portanto* $x = -1$ *é máximo absoluto para* $x \in [-3, 2]$.

Exercício 20 (ANPEC 2016, Questão 3). *Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas:*

0 *A função* $f(x) = x^3 + x$ *é uma bijeção de* R *em* R*;*

1 *Se* $f(x) = 4x(1 - x)$ *e* $g(x) = f^{(n)}(x)$ *(composição de* f *consigo mesma "n" vezes), então* $g'(3/4) = (3/4)^n$*;*

2 *O produto de funções sobrejetoras em* R *é uma função sobrejetora em* R*;*

3 *Uma função que a cada candidato associe a nota obtida na prova é uma função injetora;*

4 *Se* $f(x) = 4x(1 - x)$ *é definida no domínio* $[0, 1]$*, a função* $f^{(3)}(x) = f(f(f(x)))$ *tem 4 máximos absolutos em* $[0, 1]$.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

Derivando a função f, temos $f'(x) = 3x^2 + 1$. Então $f'(x) > 0$, para todo x em $\mathbb{R}$. Logo a função f é estritamente crescente, assim f é injetiva.

A função f é contínua em todo $\mathbb{R}$. Agora, os limites

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad e \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Então, f é sobrejetivo.

Portanto, a função f é bijeção.

(1) **Falso.**

Consideremos $n = 1$, então $g(x) = f(x) = 4x(1-x) = 4x - 4x^2$. Derivando $g'(x) = 4 - 8x$, logo $g'(3/4) = -2$.

(2) **Falso.**

Definamos as funções $f : R \to R$ definido por $f(x) = x$ e $g : R \to R$ definido $g(x) = x$. Logo o produto de funções $f.g : R \to R$ é definido por $(f.g)(x) = x^2$. Este produto de funções não é sobrejetiva.

(3) **Falso.**

Os candidatos Juan, Pedro e Lucas com notas $8, 9$ e 8, respectivamente. Definamos a função

$$f : \{Juan, Pedro, Lucas\} \to \{8, 9\}$$

dado por $f(Juan) = 8, f(Pedro) = 9$ e $f(Lucas) = 8$. Esta função não e injetora, já que $f(Juan) = f(Lucas)$ e $Juan \neq Lucas$.

(4) **Verdadeiro.** *Ver solução na página 399.*

Exercício 21 (ANPEC 2016, Questão 6). *Considere a seguinte função: $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 5$. Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas:*

(0) *A função é crescente no intervalo $[0, +\infty[$;*

(1) *A função tem derivada não nula no intervalo $[-3, 0]$;*

2 *A função é côncava no intervalo* $[-1,1]$*;*

3 *A função tem inversa no intervalo* $[0,3]$*;*

4 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Solução

0 **Falso.**

Derivando a função f*, temos*

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 72x = 12x(x^2 - x - 6) = 12x$$
$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 72x = 12x(x-3)(x+2).$$

Os pontos críticos são $x = 0,\ x = -2$ *e* $x = 3$.

Agora, derivando a função f'*, obtemos*

$$f''(x) = 36x^2 - 24x - 72 = 12(x(3x-2) - 6).$$

Dado que $f''(3) > 0$*, então* $x = 3$ *é mínimo local. Portanto* f *é não crescente no intervalo* $[0, +\infty[$.

1 **Falso.**

Do item anterior, temos $f'(0) = 0$.

2 **Verdadeiro.**

Do item 0*, temos*

$$f''(x) = 36\left(\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{19}{3}\right)$$

logo

$$\begin{aligned} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq (x - \frac{1}{3}\Big)^2 \leq \frac{16}{9} \\ -\frac{19}{9} \leq \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{19}{9} \leq -\frac{3}{9}. \end{aligned}$$

Então, $f''(x) < 0$. Portanto f é concava no intervalo $[-1, 1]$.

3 **Falso (gabarito está Verdadeiro).**

A derivada $f'(x) = 12x(x-3)(x+2) < 0$ para todo $x \in (0, 3)$. Logo a função f é estritamente crescente. Assim, f é injetora no intervalo $[0, 3]$. Seja a função $f : [0, 3] \to B$, onde B é o contradomínio de f. Dado que não está definida o conjunto B, não podemos concluir que f é sobrejetora.

4 **Falso.**

Do item 1, temos $f'(x) = 12x(x-3)(x+2)$. Então, para $x < -3$, a derivada $f'(x) < 0$. Logo, a função f é decrescente no intervalo $(-\infty, -3)$. Portanto

$$\lim_{x \to -\infty} \neq -\infty.$$

Exercício 22 (ANPEC 2015, Questão 3). *Considere a seguinte função $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 - 2$. Então podemos afirmar:*

0 *A função possui três extremos relativos;*

1 *A função possui somente um ponto de inflexão;*

2 *O valor mínimo absoluto da função é -29;*

3 *O valor máximo absoluto da função é 3;*

4 *No intervalo $[2, 4]$ a função é côncava.*

Solução

0 **Verdadeiro.**

Derivando as funções f e f', segue que

$$f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 36x = 12x(x-3)(x-1)$$
$$f''(x) = 36x^2 - 96x + 36 = 12(3x^2 - 8x + 3).$$

Logo, os pontos críticos são $x = 0, x = 1$ e $x = 3$. Dado que $f''(0) > 0, f''(1) < 0$ e $f''(3) > 0$, então os pontos $x = 0, x = 1$ e $x = 3$ são extremas relativos.

(1) **Falso.**

Derivando três vezes a função f, temos

$$f'(x) = 12x(x-3)(x-1),$$
$$f''(x) = 12(3x^2 - 8x + 3),$$
$$f'''(x) = 24(3x - 4).$$

Agora, para $x = 4/3$ temos $f'''(x) = 0$, isto quer dizer que para todo $x \neq 4/3$ tem-se $f'''(x) > 0$ ou $f'''(x) < 0$. Note que $f''(4/3) \neq 0$, então $x = 4/3$ não é ponto de inflexão. Da equação $f''(x) = 12(3x^2 - 8x + 3) = 0$ temos dois candidatos a pontos de inflexão (ou dois raízes) $x_1 \neq 4/3$ e $x_2 \neq 4/3$, já que o discriminante da equação é diferente de zero. Como $f'''(x_1) \neq 0$ e $f'''(x_2) \neq 0$, então x_1 e x_2 são pontos de inflexão.

(2) **Verdadeiro.**

Do item (0), temos que $x = 0$ e $x = 3$ são pontos de mínimos relativos. Dado que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\Big(x^3(x-16) + 18x^2 - 2\Big) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\Big(x^3(x-16) + 18x^2 - 2\Big) = +\infty,$$

tem-se que $x = 0$ ou $x = 3$ é ponto de mínimo absoluto. Como $f(0) = -2$ e $f(3) = -29$, então o mínimo absoluto é 29.

(3) **Falso.**

Já que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$, então não existe o máximo absoluto.

(4) **Falso.**

A função f vai ser concava no intervalo $[2,4]$ se $f''(x) < 0$ para todo $x \in (2,4)$. para $x = 3$ temos $f''(3) = 72$, então existe $\rho > 0$ tal que para todo $x \in (3-\rho, 3+\rho)$ tem-se que $f'(x)$ é crescente, isto é, f é convexa *no intervalo* $(3-\rho, 3+\rho) \cap [2,4]$.

Exercício 23 (ANPEC 2015, Questão 14). *Se f é uma função inversível e de classe C^1 (diferenciável, com derivada contínua), com inversa f^{-1} de classe C^1, tal que $f(1) = 1$ e $f'(1) = 2$, calcular o seguinte limite:*

$$L = \lim_{h\to 0} \frac{f(1-h) - f(1+2h)}{f^{-1}(1+3h) - f^{-1}(1+h)}.$$

Dar como resposta $|10L|$.

Solução

Resposta 60.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{h} = -f'(1) \quad e \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{h} = 2f'(1).$$

Subtraindo as equações anteriores

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1-h) - f(1+2h)}{h} = -3f'(1). \tag{17.2.1}$$

Agora

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(1+3h) - f^{-1}(1)}{h} = 3{f^{-1}}'(1) \quad e \quad \lim \frac{f^{-1}(1+h) - f^{-1}(1)}{h} = {f^{-1}}'(1).$$

Subtraindo as ultimas equações, temos

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(1+3h) - f^{-1}(1+h)}{h} = 2{f^{-1}}'(1). \tag{17.2.2}$$

Dividindo as equações (1) *e* (2)

$$L = \frac{-3}{2}\, \frac{f'(1)}{{f^{-1}}'(1)} = \frac{-3}{{f^{-1}}'(1)}. \tag{17.2.3}$$

Por outro lado, da função composta sabemos $f^{-1}(f(x)) = x$, derivando esta função temos

$$\begin{aligned} {f^{-1}}'(f(1)) \times f'(1) &= 1 \\ {f^{-1}}'(1) \times 2 &= 1 \\ {f^{-1}}'(1) &= 1/2. \end{aligned}$$

Então da equação anterior e de (3), obtemos $L = -6$.
Portanto $|10L| = 60$.

Exercício 24 (ANPEC 2014, Questão 3). *Analisar a veracidade das seguintes afirmações:*

(0) *Se* $m = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{2x^2-x-1}$ *e* $n = \lim_{x\to 5^+} \frac{x^2-9x+20}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$, *então* $m + n = 2\sqrt{5}$.
(1) *Se* x_0 *é ponto de inflexão do gráfico de* $y = f(x)$, *então* $f'(x_0) = 0$.
(2) *Se* $f : [a, b] \to R$ *é uma função côncava e* $f'(x_0) = 0$, *em que* $x_0 \in]a, b[$, *então* x_0 *é máximo absoluto.*
(3) *A função* $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 2$ *tem dois pontos de inflexão.*
(4) *A inclinação da reta tangente ao gráfico de* $x \ln(y) + ye^{x-1} - 1 = 0$ *no ponto* $x = 1,\ y = 1$ *é* -2.

Solução

(0) **Falso.**
Aplicando a regra de L'Hôpital na seguinte integral, obtemos

$$m = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2x+1}{4x^2-1} = \frac{1}{2}$$

Por outro lado,

$$n = \lim_{x\to 5^+} \frac{x^2-9x+20}{\sqrt{x}-\sqrt{5}} = \lim_{x\to 5^+} \frac{(x-5)(x-4)}{\sqrt{x}-\sqrt{5}} = \lim_{x\to 5^+} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})(x-4)}{(\sqrt{x}-\sqrt{5})}$$
$$= \lim_{x\to 5^+} (\sqrt{x}+\sqrt{5})(x-4) = 2\sqrt{5}.$$

Logo, $m + n = 1/2 + 2\sqrt{5}$.

(1) **Falso.**
Considere a função $f(x) = \sin(x)$ *para* $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, *então* $f'(x) = \cos(x)$ *e* $f''(x) = -\sin(x)$. *O ponto* $x = 0$ *é candidato a ponto de inflexão, já que* $\sin(0) = 0$. *Agora, podemos afirmar que* $x = 0$ *é ponto de inflexão, dado que* $f''(x) > 0$ *para* $x \in [-\pi/2, 0)$ *e* $f''(x) < 0$ *para* $x \in (0, \pi/2]$.

Portanto $f'(0) = 1$ *e* $x = 0$ *é ponto de inflexão, isto contradiz o enunciado.*

(2) **Verdadeiro.**

Se f *é concava no domínio* $]a, b[$, *então* $f''(x) < 0$ *para todo* $x \in]a, b[$, *logo* f' *é decrescente para todo* $x \in]a, b[$. *Como* $f'(x_0) = 0$ *e* f' *é decrescente, então* $f'(x) > 0$ *para todo* $x \in]a, x_0[$ *e* $f'(x) < 0$ *para todo* $x \in]x_0, b[$. *Se* $f'(x) > 0$ *para todo* $x \in]a, x_0[$, *então* f *é estritamente crescente para todo* $x \in]a, x_0[$, *já que* $f'(x_0) = 0$, *podemos afirmar que* $f'(x) \geq 0$ *para* $]a, x_0]$, *assim* f *é crescente em* $]a, x_0]$. *Fazemos o mesmo para* $f'(x) < 0$, *então* f *é decrescente em* $[x_0, b[$.

Portanto $f(x) \leq f(x_0)$ *para todo* $x \in [a, b]$.

(3) **Verdadeiro.**

Derivando três vezes a função f, *temos*

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x(x-3)(x-1), \\ f''(x) &= 12(3x^2 - 8x + 3), \\ f'''(x) &= 24(3x - 4). \end{aligned}$$

A raiz da equação $f'''(x) = 0$, *é* $x = 1$, *isto quer dizer que para* $x \neq 1$ *tem-se que* $f'''(x) < 0$ *ou* $f'''(x) > 0$. *Note que* $f''(1) \neq 0$, *então* $x = 1$ *não é ponto de inflexão. Resolvendo a equação* $f''(x) = 0$, *obtemos duas raízes* $x_1 \neq 1$ *e* $x_2 \neq 1$ *(candidatos a pontos de inflexão), já que o discriminante da equação é diferente de zero. Dado que* $f'''(x_1) \neq 0$ *e* $f'''(x_2) \neq 0$, *então* x_1 *e* x_2 *são pontos de inflexão.*

(4) **Falso.**

Derivando a equação implícita $x\ln(y) + y\, e^{x-1} - 1 = 0$, *temos*

$$\ln\Big(y(x)\Big) + \frac{x}{y(x)}y'(x) + y(x)e^{x-1} + y'(x)e^{x-1} = 0.$$

Agora, para $y(x=1)=1$, juntamos $y'(1)=1/2$.

EXERCÍCIO 25 (ANPEC 2014, Questão 5). *Considere uma função $f : R \to R$ tal que existe a derivada. Suponha que $f'(x) > f(x)$ sempre. Julgue as seguintes afirmativas:*

0. $g(x) = e^{-x}f(x)$ *é estritamente crescente.*
1. *Se $f(x_0) = 0$, então $\forall x > x_0, f(x) > 0$.*
2. *Se $f(x) = 2e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$, então f não tem nenhuma raiz real.*
3. *Se f for a função do item 2, temos que $\forall x,\ f(x) > f'(x)$.*
4. *A equação $2e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ tem exatamente uma raiz real.*

Solução

0. **Verdadeiro.**

Derivando a função g, temos

$$g'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x)).$$

Dado que $f'(x) > f(x)$, obtemos $g'(x) > 0$, então g é estritamente crescente.

1. **Verdadeiro.**

Se $f(x_0) = 0$, então $f'(x_0) > f(x_0) = 0$, logo existe $\rho > 0$ tal que para todo $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ tem-se f crescente. Assim, para $x \in (x_0, x_0 + \rho), 0 = f(x_0) < f(x)$. Denotemos $x_1 = x_0 + \rho$, e como f é contínua, obtemos $\lim_{x\to x_1} f(x_0) = f(x_0) < \lim_{x\to x_1} f(x) = f(x_1)$. Logo, $0 = f(x_0) < f(x)$ para todo $x \in (x_0, x_1]$, então $0 < f'(x_1)$. fazendo o mesmo para x_1 igual que x_0, obteremos um x_2 tal que $0 = f(x_0) < f(x_1) < f(x)$ para todo $x \in (x_1, x_2]$. Assim, sucessivamente concluímos que $0 < f(x)$ para todo $x > x_0$.

2. **Falso.**

Para $x = 0$ e $x = -6$ temos $f(0) = 1 > 0$ e $f(-6) < 0$, respectivamente. Pelo teorema do valor intermediaria existe $x \in [-6, 0]$ tal que $f(x) = 0$.

3 **Falso.**

$f'(x) = 2e^x - 1 - x$, então $f(x) = f'(x) - x^2/2$, logo $f(x) - f'(x) = -x^2/2$. portanto $f'(x) > f(x)$.

4 **Verdadeiro.**

Do item 2, a função $f(x) = 2e^x - 1 - x - x^2/2$ tem pelo menos uma raiz, isto é, existe pelo menos um $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$, então do item 1, $\forall x > x_0,\ f'(x) > f(x) > 0$. Logo f é crescente em $x \in (x_0, +\infty)$. Portanto, não existe outra raiz, já que f é crescente para todo $x > x_0$.

Exercício 26 (ANPEC 2014, Questão 7). *Responda se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:*

0 *A função $f(x) = x|x|$ não é diferenciável em $x = 0$.*

1 *Se $g(x) = \begin{cases} Ax + B; & x \geq 2 \\ x^2 + x + 1; & x < 2 \end{cases}$ é diferenciável em todo R, então $A + 2B = 1$.*

2 *Se $h : [0, +\infty[\to R$ é C^2 em $]0, +\infty[$; para todo $x > 0$, $h'(x) > 0$, $h''(x) < 0$; e $\lim_{x \to 0^+} h'(x) = +\infty$, então a função $\phi(x) = xh'(4 - x)$ definida em $[0, 4[$ tem função inversa que é estritamente crescente.*

3 *A área abaixo do gráfico da função $u(x) = xe^{-x^2}$, à direita do eixo Y e acima do eixo X, é 1.*

4 *O coeficiente de x^2 no desenvolvimento de Taylor de terceiro grau de $\nu(x) = \sqrt{x}$ no ponto $x_0 = 1$ é $1/16$.*

Solução

0 **Falso.**

O limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x|x|}{x} = \lim_{x \to 0} |x| = 0.$$

Dado que o limite anterior existe quando $x \to 0$, então f é diferenciável em $x = 0$.

(1) **Falso.**

Se g é diferenciável em todo R, então g é contínua en todo R. Como g é contínua temos,

$$\lim_{x \to 2} g(x) = g(2) = 2A + B,$$

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = \lim_{x \to 2^-} x^2 + x + 1 = 7 = g(2) = 2A + B.$$

Já que g é diferenciável em $x = 2$, juntamos

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2^-} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} &= \lim_{x \to 2^+} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2}, \\ \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 + x + 1 - 7}{x - 2} &= \lim_{x \to 2^+} \frac{Ax + B - 7}{x - 2}, \\ 5 &= \lim_{x \to 2^+} \frac{Ax + B - 7}{x - 2}. \end{aligned}$$

Aplicando a regra de L'Hôpital

$$5 = \lim_{x \to 2^+} A = A.$$

Dado que $2A + B = 7$ e $A = 5$ temos $B = -3$.
Portanto $A + 2B = -1$.

(2) **Verdadeiro.**

Dado que $h'(x) > 0$ e $h''(x) < 0$, temos $\phi'(x) = h'(4 - x) - xh''(4 - x) > 0$. Então ϕ é estritamente crescente, logo ϕ é injetora. Considerando que a função ϕ está definida de $[0, 4[$ em $\phi([0, 4[)$ temos que ϕ é sobrejetora. Portanto ϕ tem inversa e é estritamente crescente.

3 **Falso.**

A área do gráfico é

$$\int_0^{+\infty} x\, e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2} d-x^2 = -\frac{1}{2}\lim_{a\to\infty}\int_0^{a} e^{-x^2} d-x^2$$
$$= -\frac{1}{2}\lim_{a\to\infty}\left[e^{-x^2}\right]_0^a = -\frac{1}{2}\lim_{a\to\infty}\left(e^{-a^2}-1\right) = \frac{1}{2}.$$

4 **Falso.**

O polinômio de Taylor de terceiro grau

$$p(x) = \nu(1) + \nu'(1)(x-1) + \frac{\nu''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{\nu'''(1)}{6}(x-1)^3$$

Derivando ν, temos

$$\nu'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \nu''(x) = -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x^3}}, \quad \nu'''(x) = \frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{x^5}}$$

Logo para $x = 1$ tem-se $\nu'(1) = 1/2$, $\nu''(1) = -1/4$ e $\nu'''(1) = 3/8$. Do polinômio de Taylor, nós interessa o coeficiente de x^2, então

$$\frac{\nu''(1)}{2}x^2 - \frac{\nu'''(1)}{2}x^2 = \Big(\frac{\nu''(1)-\nu'''(1)}{2}\Big)x^2 = -\frac{5}{16}x^2.$$

Portanto, o coeficiente de x^2 é $-5/16$.

Exercício 27 (ANPEC 2013, Questão 5). 0 *Se $A = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+x+1)}{e^x-1}$ e $B = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(x)}{x}$, então $A + B = 1$.*

1 *A função $f(x) = x^4 - 2x^3 + 18x^2 - 20x + 7$ não possui pontos de inflexão.*

2 *Definimos $[x]$ como o maior número inteiro que é menor ou igual a x. Então a função $f(x) = [x]x^2$ não é derivável em $x = 0$.*

3 *Se $f'(a) = 5$ então $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{f(a-2h)-f(a+3h)} = 1$.*

4 *A soma das coordenadas do ponto na curva $y = x^2$, cuja reta perpendicular a ela passa por $(14, 1)$, é 6.*

Solução

(0) **Verdadeiro.**

Aplicando a regra de L'Hôpital

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+x+1)}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x+1}{(x^2+x+1)e^x} = 1.$$

Agora, seja $x > 0$, então

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &\leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x} \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} &\leq \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \\ o &\leq \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \leq 0 \end{aligned}$$

Portanto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0.$$

(1) **Verdadeiro.**

Derivando duas vezes a função f, obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 6x^2 + 36x - 20, \\ f''(x) &= 12x^2 - 12x + 36 = 12(x^2 - x + 3) \end{aligned}$$

Dado que $f''(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então f não tem pontos de inflexão.

(2) **Falso.**

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[h]h^2 - [0]0^2}{h} = \lim_{h\to 0} [h]h \\ &= \lim_{h\to 0^-} [h]h = \lim_{h\to 0^-} 0h = 0 \\ &= \lim_{h\to 0^+} [h]h = \lim_{h\to 0^+} 1h = 0 \end{aligned}$$

③ **Falso.**

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{f(a-2h)-f)(a+3h)} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{f(a)-f(a-h)}{h}}{-2\frac{f(a)-f(a-2h)}{2h}-3\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}}$$
$$= \frac{\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}}{-2\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-2h)}{2h}-3\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}}$$
$$= \frac{f'(a)+f'(a)}{-2f'(a)-3f'(a)} = \frac{-2}{5}$$

④ **Verdadeiro.**

Seja (x_0, y_0) *a interseção da curva e reta perpendicular que passa por* (14.1). *A pendente da curva no ponto* x_0 *é* $dy/dx = 2x_0$, *então a pendente da reta perpendicular é* $-1/(2x_0)$. *Por outro lado*

$$\frac{y_0-1}{x_0-14} = \frac{x_0^2-1}{x_0-14} = -\frac{1}{2x_0} \to x_0 = 2\ ,\ y_0 = 4.$$

Portanto $x_0 + y_0 = 6$.

Exercício 28 (ANPEC 2013, Questão 13). *A função*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & se\ x \geq 2 \\ Ax + B & se\ x < 2 \end{cases}$$

é derivável em todo o domínio. Achar B/A.

Solução

Resposta 4

Se f *é derivável então*

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x+1)^2} & se\ \ x \geq 2 \\ A & se\ \ x \leq 2 \end{cases}$$

logo, $A = 1/9$. Dado que f é derivável então f é contínua. Assim,

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} Ax + B = f(2) = \frac{2}{3},$$

portanto $B = 4/9$. Podemos concluir que $B/A = 4$.

Exercício 29 (ANPEC 2012, Questão 9). *Julgue as afirmativas: Seja $f : R^* \to R$, tal que $x^2 f(x) = x^2 + 7x + 3$. Julgue as afirmativas:*

0. *f tem uma assíntota horizontal e uma assíntota vertical.*
1. *f tem máximo relativo em $x = -\frac{6}{7}$.*
2. *f é decrescente em $(-\infty, 0)$.*
3. *f é convexa em cada um dos intervalos $\left(-\frac{9}{7}, 0\right)$ e $(0, +\infty)$.*
4. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(2+e^x)}{3x} = \frac{4}{3}$.

Solução

0. **Verdadeiro.**

   Assíntota Horizontal

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2} = 1.$$

   Assíntota Vertical

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2} = \pm\infty.$$

   Portanto $y = 1$ é assíntota horizontal e $x = 0$ é assíntota vertical.

1. **Falso.**

   Derivando a função f, temos

$$f'(x) = \frac{-1}{x^3}\big(7x + 6\big)$$

   para encontrarmos os números críticos, fazemos $f'(x) = 0$ e obtemos $x = -6/7$.

   Agora derivamos a função f'

$$f''(x) = \frac{2}{x^4}\big(7x + 9\big)$$

Já que $f''(-6/7) > 0$, *então* f *tem um mínimo local em* $x = -6/7$.

(2) **Falso.**

A derivada $f'(x) > 0$ *para* $x < -6/7$ *e* $f'(x) \leq 0$ *para* $x \in [-6/7, 0\rangle$. *Logo* f *é crescente para* $x \in (-\infty, -6/7)$ *e decrescente para* $x \in [-6/7, 0\rangle$.

(3) **Verdadeiro.**

A função $f''(x) > 0$ *para todo* $x \in (-9/7, +\infty)$. *Portanto* f *é convexa nos intervalos* $(-9/7, 0)$ *e* $(0, +\infty)$.

(4) **Verdadeiro.**

O limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2} = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{7}{x} + \frac{3}{x^2} = 1$$

Agora, aplicando duas vezes a regra de L'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2 + e^x)}{3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{3(2 + e^x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Podemos concluir que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2 + e^x)}{3x} = \frac{4}{3}.$$

Exercício 30 (ANPEC 2012, Questão 13). *Considere a expansão de Taylor para a função* $y = f(x)$ *em torno do ponto* $x = 0$ *e julgue as afirmativas:*

(0) *Se* $f(x) = \sin x$, *então a série de Taylor só tem termos de grau ímpar.*

(1) *Se* $f(x)$ *é um polinômio de grau* n, *então a expansão de Taylor de* f *em torno de* 0 *é o próprio polinômio.*

(2) *Seja* k *uma constante positiva. Se* $f(x) = e^{kx}$ *e os coeficientes dos termos de* 2^a *e* 3^a *ordem são iguais, então* $k = 3$.

(3) *Para toda constante* k, *o termo independente da expansão de Taylor de* $f(x) = \cos(kx)$ *em torno de* 0 *é* k.

4 *Se* $f(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)$, *para* $-1 < x < 1$, *então* $P(x) = 1 + \frac{4}{1!}x + \frac{4.3}{2!}x^2 + \frac{4.3.2}{3!}x^3 + \frac{4.3.2.1}{4!}x^4$ *é o polinômio de Taylor de grau 4 da função* f.

Solução

0 **Verdadeiro.**

A série de Taylor em torno de 0 é

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

para $f(x) = \sin(x)$, *temos*

$$\sin(x) = \sin(0) + \cos(0)x - \frac{\sin(0)}{2!}x^2 - \frac{\cos(0)}{3!}x^3 + \frac{\sin(0)}{4!}x^4 + \cdots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

1 **Verdadeiro.**

Seja um polinômio de grau n

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

Derivando este polinômio, temos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} \\
f''(x) &= 2!a_2 + 3 \times 2 \times a_3x + 4 \times 3a_4x^2 + \cdots + n \times (n-1)a_nx^{n-2} \\
f'''(x) &= 3!a_3 + 4 \times 3 \times 2a_4x + 5 \times 4 \times 3a_5x^2 + \cdots + n \times (n-1)(n-2)a_nx^{n-3} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= n!a_n \\
f^{(n+1)}(x) &= 0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Logo

$$f(0) = a_0, f'(0) = a_1, f''(0) = 2!a_2, f'''(0) = 3!a_3, \cdots, f^{(n)}(x) = n!a_n.$$

Agora pela série de Taylor em torno de 0, temos

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$
$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

2 **Verdadeiro.**

Derivando a função $f(x) = e^{kx}$*, então*

$$f'(x) = ke^{kx}, f''(x) = k^2e^{kx}, f'''(x) = k^3e^{kx}, \cdots, f^{(n)}(x) = k^ne^{kx}.$$

Pela série de Taylor em torno de 0, obtemos

$$f(x) = 1 + kx + \frac{k^2}{2!}x^2 + \frac{k^3}{3!}x^3 + \cdots$$

como os coeficiente dos termos de 2^a *e* 3^a *ordem são iguais, obtemos*

$$\frac{k^2}{2!} = \frac{k^3}{3!}$$

Assim $k = 0$ *ou* $k = 3$*. Se* $k = 0$ *então* $f(x) = 1$ *(contradição).*

Portanto $k = 3$*.*

3 **Falso.**

A série de Taylor em torno de 0 é

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

O termo independente da série é $f(0) = \cos(k0) = 1$*.*

4 **Falso.**

Derivando a função $f = \frac{1}{1-x}$ *até a ordem 4*

$$f'(x) = \frac{1!}{(1-x)^2}, f''(x) = \frac{2!}{(1-x)^3}, f'''(x) = \frac{3!}{(1-x)^4}, f^{(4)}(x) = \frac{4!}{(1-x)^5}$$

Para $x = 0$*, temos*

$$f(0) = 0!, f'(0) = 1!, f''(0) = 2!, f'''(0) = 3!, f^{(4)}(0) = 4!,$$

O polinômio de Taylor de grau 4 é

$$\begin{aligned} P(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4. \end{aligned}$$

Exercício 31 (ANPEC 2011, Questão 3). *Seja $f : [-2, 5] \to \mathbb{R}$ a função definida como $f(x) = x^2 + 3$, se $x \leq 3$ e $f(x) = 15 - x$, se $x > 3$. Julgue as afirmativas:*

0. *A função f é contínua e seu ponto de máximo ocorre para $x = -2$.*
1. *O ponto de mínimo de f ocorre para $x = 0$.*
2. *A função f é diferenciável em todos os pontos do intervalo $(-2, 5)$.*
3. *O valor da segunda derivada de f no ponto de mínimo é 2.*
4. *O valor da segunda derivada de f no ponto de máximo é -1.*

Solução

0 **Falso.**

Note que

$$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3),$$

então f é contínua em $x = 3$. Logo f é contínua, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Agora a derivada da função f para todo $x \in \mathbb{R} - \{3\}$ é

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < 3 \\ -1 & x > 3 \end{cases}$$

Para encontrar os pontos críticos, fazemos $f'(x) = 0$ e obtemos $x = 0$. Então $x = -2$ não é ponto crítico, assim $x = -2$ não é ponto de máximo e de mínimo.

1 **Verdadeiro.**

Do item anterior temos que $x = 0$ é ponto crítico.

Agora derivando f' para $x < 3$, obtemos $f''(x) = 2$, logo $f''(0) > 0$, assim $x = 0$ é ponto de mínimo local.

Dado que $f(-2) = 7$ e $f(3) = 12$, e pelo teorema do valor extremo $x = 0$ é um ponto de mínimo no intervalo $[-2, 3]$.

Por outro lado, notei que $f(0) < 15 - x$ *para todo* $x \in (3,5]$.
Portanto $x = 0$ *é o único ponto de mínimo no intervalo* $[-2,5]$.

(2) **Falso.**
Os limites

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{(3+h)^2+3-12}{h} = 6$$
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{15-(3+h)-12}{h} = -1$$

Portanto, não existe a derivada de f *no ponto* $x = 3$.

(3) **Verdadeiro.**
Do item (1), *temos* $f''(0) = 2$.

(4) **Falso.**
O único ponto crítico.
Do item (1), *o único ponto crítico no intervalo* $(-2,3)$ *é* 0, *então* $x = -1$ *não é ponto crítico.*
Portanto $x = -1$ *não é ponto de máximo e de mínimo.*

EXERCÍCIO 32 (ANPEC 2011, Questão 7). *Considere a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definida por* $f(x) = (x-2)^2(x-5)$ *e* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *uma função que satisfaz* $g(x+u) = g(x) + g(u) + x^2u + xu^2$, *para todo* $x, u \in \mathbb{R}$.
Julgue as afirmativas:

(0) f *é decrescente em* $[2,4]$.
(1) f *não atinge mínimo relativo em* $\mathbb{R}$.
(2) 2 *é ponto de máximo relativo de* f, *pois* $f'(2) = 0$ *e* $f'(2) < 0$.
(3) $g(0) = 1$.
(4) *Se* $\lim_{n\to\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$, *então* g *é diferenciável e* $g'(x) = 1 + x^2$.

Solução

(0) **Verdadeiro.**
Derivando a função $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 20$, *temos*

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x-4)(x-2)$$

Dado que $f'(x) \leq 0$ *para* $x \in [2,4]$, *então* f *é decrescente para todo* $x \in [2,4]$.

(1) **Falso.**
Do item anterior, os pontos críticos $f'(x) = 0$ *são* $x = 2$ *e* $x = 4$. *Derivando a função* $f'(x)$, *obtemos* $f''(x) = 6(x-3)$. *Já que* $f''(2) < 0$ *e* $f''(4) > 0$, *então* $x = 2$ *e* $x = 4$ *são pontos de máximo e mínimo relativos, respectivamente.*

(2) **Verdadeiro.**
Do item anterior, temos que 2 *é ponto de máximo relativo de* f.

(3) **Falso.**
Para $x = 0$, *temos* $g(u) = g(0) + g(u)$, *então* $g(0) = 0$.

(4) **Verdadeiro.**
Observação: *Neste item corrigimos o enunciado da seguinte forma:*
Se $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = 1$, *então* g *é diferenciável e* $g'(x) = 1 + x^2$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x+u) - g(u)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} + xu + u^2$$
$$g'(u) = 1 + u^2$$

Portanto g *é diferenciável.*

Exercício 33 (ANPEC 2011, Questão 14). *Sejam* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funções diferenciáveis tais que* $g(x) = 3x - 4$ *e* $f(g(x)) = 9x^2 - 6x + 1$. *Calcule* $f(0) + f'(0)$.

Solução

Resposta 15

A função

$$f(g(x)) = 9x^2 - 6x + 1 = (3x - 4 + 3)^2 = (g(x) + 3)^2$$

logo, $f(x) = (x+3)^2$ *e* $f'(x) = 2(x+3)$. *Então* $f(0) + f'(0) = 15$.

EXERCÍCIO 34 (ANPEC 2010, Questão 6). *Considere as funções definidas por* $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$ *e* $g(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$.

Julgue as afirmativas:

(0) g *atinge máximo relativo em* $x = 2$ *e mínimo relativo em* $x = 4$*;*

(1) g *é crescente em* $[2, 4]$*;*

(2) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$*;*

(3) f *tem 2 assíntotas verticais:* $x = 1$ *e* $x = -1$*;*

(4) f *tem um ponto crítico* x *que é ponto de máximo global, pois* $f''(x) < 0$.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

Derivando a função g*, temos*

$$g'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x-4)(x-2)$$

Os valores $x = 4$ *e* $x = 2$ *são pontos críticos.*

Agora, derivando a função g'*, obtemos*

$$g''(x) = 6(x-3)$$

Como $g''(2) < 0$ *e* $g''(4) > 0$*, então* $x = 2$ *e* $x = 4$ *são pontos de máximo e mínimo relativo, respectivamente.*

(1) **Falso.**

Dado que $g'(x) \leq 0$ *para todo* $x \in [2, 4]$*, então* g *é decrescente para todo* $x \in [2, 4]$

(2) **Falso.**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1-1/x^2}=2$$

(3) **Verdadeiro.**

Já que

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^2}{x^2-1}=+\infty\ ,\ \lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2}{x^2-1}=-\infty$$
$$\lim_{x\to -1^+}\frac{2x^2}{x^2-1}=+\infty\ ,\ \lim_{x\to -1^-}\frac{2x^2}{x^2-1}=-\infty$$

então $x=1$ *e* $x=-1$ *são assíntotas verticais.*

(4) **Falso.**

Dado que

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^2}{x^2-1}=+\infty$$

então, a função f *não tem máximo global.*

Exercício 35 (ANPEC 2009, Questão 2). *Considere as funções* $f: R\to R$ *e* $g: R\to R$, *em que*

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+1, & se\ \ x<0,\\ 1, & se\ \ x\geq 0\end{cases} \qquad e \quad g(x)=xe^x.$$

Julgue as afirmativas:

(0) f *é contínua em* 0, *para todo* $a\in R$.
(1) *Se* $a\neq 0$ *então* f *não é derivável em* 0.
(2) g *é crescente em* $(-1,\infty)$ *e possui um máximo local em* $x=-1$.
(3) g *é uma função convexa.*
(4) $g''(x)>g'(x)$, *para todo* $x\in R$.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

Já que $f(0) = 1$,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} ax^2 + 1 = 1$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

então f *é contínua em* $x = 0$.

(1) **Falso.**

Dado que

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{ah^2 + 1 - 1}{h} = 0,$$
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1 - 1}{h} = 0.$$

Então, para todo $a \in \mathbb{R}$, *existe a derivada de* f *em* $x = 0$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0) = 0.$$

(2) **Falso.**

A derivada de g *é* $g'(x) = e^x(x + 1)$. *Agora,* $g'(x) \geq 0$ *para* $x \geq -1$ *e* $g'(x) < 0$ *para* $x < -1$. *Portanto* g *é crescente no intervalo* $[-1, +\infty)$ *e decrescente no intervalo* $(-\infty, -1)$.

De $g'(x) = 0$, *temos que* $x = -1$ *é ponto crítico. Agora, a segunda derivada de* g *é* $g''(x) = e^x(2 + x)$, *como* $g''(-1) > 0$, *podemos concluir que* $x = -1$ *é um ponto de mínimo local.*

(3) **Falso.**

De $g'' = e^x(2 + x)$, *temos* $g''(x) < 0$ *para* $x < -2$ *e* $g''(x) \geq 0$ *para* $x \geq -2$. *Logo* g *é concava no intervalo de* $(-\infty, -2)$ *e convexa no intervalo de* $[-2, +\infty)$.

(4) **Verdadeiro.**

De $g'(x) = e^x(x + 1)$ *e* $g''(x) = e^x(x + 2)$, *temos* $g''(x) > g'(x)$ *para todo*

$x \in \mathbb{R}$.

Exercício 36 (ANPEC 2008, Questão 1). *Sejam* $a = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$, $b = \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$, *e* $f : R \to R$ *a função dada por* $f(x) = x^3 + 3x - 4$. *Julgue as afirmativas:*

(0) f *não é uma função injetora.*
(1) $ab = 1, b^3 - a^3 = 4$ *e* $f(a-b) \neq 0$.
(2) $f(a-b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + 3(a-b) - 4 = 0$.
(3) f *é uma função injetora e* $a - b = 1$.
(4) f *é convexa no intervalo* $I = [-2, 2]$.

Solução

(0) **Falso.**

Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2), \\ x_1^3 + 3x_1 - 4 &= x_2^3 + 3x_2 - 4, \\ x_1^3 - x_2^3 + 3(x_1 - x_2) &= 0, \\ (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 3) &= 0. \end{aligned}$$

Note que $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 3 > 0$, *então* $x_1 = x_2$. *Portanto, a função* f *é injetora.*

(1) **Falso.**

$$ab = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = \sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} = \sqrt[3]{1} = 1$$

$$b^3 - a^3 = \sqrt{5} - 2 - (\sqrt{5}+2) = -4$$

$$f(a-b) = (a-b)^3 + 3(a-b) - 4 = a^3 - 3ab(a-b) - b^3 + 3(a-b) - 4 = 0.$$

Logo, $V \wedge F \wedge F = F$.

2 **Verdadeiro.**

Do item 1, obtemos $f(a-b)=0$.

3 **Verdadeiro.**

Do item 0, a função f *é injetora. Do item 2, o valor* $a-b$ *é uma raiz de* f*, dado que* $f(a-b)=0$*. Logo, a única raiz real de* $f(x)=x^3+3x-4$ *é* 1*. Então,* $a-b=1$.

4 **Falso.**

Sejam $x_1=-2, x_2=0$ *e* $t=1/2$*, então* $f(x_1)=-18, f(x_2)=-4$ *e* $f(tx_1+(1-t)x_2)=-8$.

Logo

$$f(tx_1+(1-t)x_2)>tf(x_1)+(1-t)f(x_2).$$

Portanto f *não é convexa.*

Exercício 37 (ANPEC 2007, Questão 4). *Considere as funções:*

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & se\ \ x\geq 0 \\ -x^2, & se\ \ x<0 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} x, & se\ \ x>1 \\ x^3, & se\ \ x\leq 1. \end{cases}$$

Com relação aos conceitos de continuidade e diferenciabilidade, julgue os itens abaixo:

0 *A função* f *é contínua em* $x=0$.

1 *A derivada de* f *não é contínua em* $x=0$.

2 *A função* g *é diferenciável em* $x=1$.

3 *A segunda derivada de* f *é diferenciável em* $x=0$.

4 *A função* h*, definida por* $h(x)=|f(x)|$ *não é diferenciável em* $x=0$.

Solução

0 **Verdadeiro.**

1 **Falso.**

2 **Falso.**

3 **Falso.**

4) **Falso.**

EXERCÍCIO 38 (ANPEC 2007, Questão 10). *Sejam $Q \subset R$ o conjunto dos números racionais e $g : R \to R$ a função definida por*

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & se\ \ x \in Q \\ 81 & se\ \ x \notin Q \end{cases}$$

em que $f : R \to R$ é a função dada por $f(x) = (x^2 - 9)^2$. Julgue os itens abaixo:

0) *g é contínua em apenas três pontos: $-3\sqrt{2}, 0, 3\sqrt{2}$.*
1) *g é descontínua em todos os pontos $x \in R$.*
2) *f é convexa no intervalo $(0, \infty)$.*
3) *$f(x) \geq f(3) = f(-3)$, para todo $x \in R$.*
4) *f é uma função crescente no intervalo $[0, 3]$ e no ponto $x = 0, f$ possui um máximo local.*

Solução

0) **Verdadeiro.**
A função g vai ser contínua nos pontos onde $f(x) = 81$. Portanto, g é contínua em $x_1 = -3\sqrt{2}, x_2 = 0$ e $x_3 = 3\sqrt{2}$.

1) **Falso.**
Do item anterior, a função g é contínua em três pontos x_1, x_2 e x_3.

2) **Falso.**
Sejam $x = 1, y = 2$ e $t = 1/2$, então

$$f(tx + (1-t)y) > tf(x) + (1-t)f(y)$$

podemos concluir que f não é convexa no intervalo $(0, \infty)$.

3) **Verdadeiro.**
Da definição de f, temos $f(x) \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}$ e $f(3) = f(-3) = 0$. Portanto

$$f(x) \geq f(3) = f(-3)$$

(4) **Falso.**

Derivando a função f, temos $f'(x) = 4x(x-3)(x+3)$ logo, os pontos críticos são $x_1 = -3, x_2 = 0$ e $x_3 = 3$. Para $x \in [0,3]$, obtemos $f'(x) < 0$. Portanto, f é decrescente no intervalo $[0,3]$.

EXERCÍCIO 39 (ANPEC 2007, Questão 13). *Seja $f : R \to R$ uma função três vezes diferenciável tal que $f(0) = 2$ e $f'(x) = x^2 f(x) - 3x^2$, para todo $x \in R$. Calcule $\alpha = 5 - f'''(0)$.*

Solução

Resposta 7

Derivando a função f' e f'', temos

$$f''(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x) - 6x,$$
$$f'''(x) = 2f(x) + 4xf'(x) + x^2 f''(x) - 6.$$

Logo, para $x = 0$, obtemos

$$f'''(0) = 2f(0) - 6 = -2.$$

Portanto, $\alpha = 7$.

EXERCÍCIO 40 (ANPEC 2006, Questão 4). *Considere a função $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$. Julgue as afirmativas abaixo:*

(0) *O ponto $x = 1$ é ponto de máximo local.*

(1) *Existe uma vizinhança do ponto $x = 1$ dentro da qual o menor valor que a função $g(x) = f(x) + 1$ assume é 0.*

(2) *$f(x)$ possui uma inflexão em $x = 2/3$.*

(3) *$f(x)$ é convexa apenas na região $(-\infty, 1/3)$ e côncava apenas na região $(1, \infty)$.*

(4) *A expansão de Taylor de ordem 3 de $f(x)$ em torno de um ponto qualquer é a própria função f.*

Solução

0 **Falso.**

Da equação $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0$, obtemos os pontos críticos $x_1 = 1/3$ e $x_2 = 1$. Derivando duas vezes a função f, e substituindo $x_2 = 1$, temos $f''(1) = 2$, logo $x_2 = 1$ é mínimo local.

1 **Verdadeiro.**

Da equação $g'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0$, temos os pontos críticos $x_1 = 1/3$ e $x_2 = 1$. Substituindo $x_2 = 1$ na equação $g''(x) = 6x - 4$, obtemos $g''(1) = 2$. Portanto $x_2 = 1$ é mínimo local.

2 **Verdadeiro.**

Da equação $f''(x) = 6x - 4 = 0$, obtemos o possível ponto de inflexão, $x = 2/3$. Dado que $f''(x) < 0$ para $x < 2/3$ e $f''(x) > 0$ para $x > 2/3$. Portanto, $x = 2/3$ é ponto de inflexão.

3 **Falso.**

Da equação $f''(x) = 6x - 4$, temos que $f''(x) < 0$ para $x < 2/3$ e $f''(x) > 0$ para $x > 2/3$. Portanto, f é concava para $x < 2/3$ e convexa para $x > 2/3$.

4 **Verdadeiro.**

O polinômio de Taylor para f de ordem 3 em torno de x_0 é

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 = f(x).$$

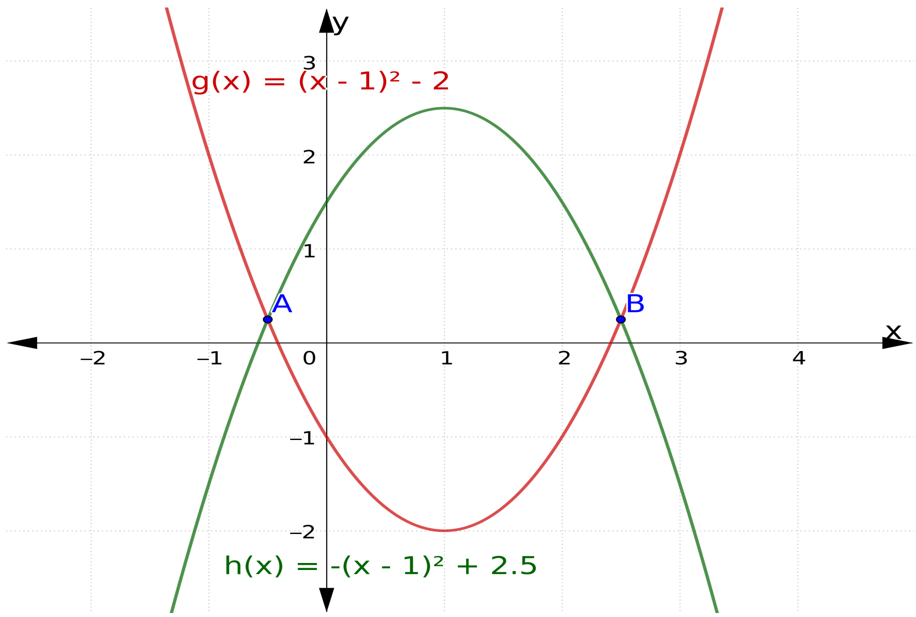
Exercício 41 (ANPEC 2005, Questão 12). *Encontre o valor máximo da função:*
$f(x) = \min\{-x^2 + 2x + 1,5; x^2 - 2x - 1\}$
Obs: Multiplique por 20 o número encontrado.

Solução

Resposta 5

$$f(x) = \min\{-x^2 + 2x + 1.5; x^2 - 2x - 1\}$$
$$f(x) = \min\{-(x-1)^2 + 2.5; (x-1)^2 - 2\}$$

O máximo da função f esta na interseção das figuras, isto é, $-x^2 + 2x + 1.5 =$



$x^2 - 2x - 1$, logo obtemos $x = 2.5$ ou $x = -0.5$. Então, $f(2.5) = f(-0.5) = 0.25$. Portanto $20f(2.5) = 5$.

EXERCÍCIO 42 (ANPEC 2004, Questão 6). *Considerando a função $f(x) = (x^2 - 1)\cdot(x-3)$, assinale V (verdadeiro) ou F (falso):*

- 0 *A equação $f(x) = 0$ tem no máximo duas raízes reais no intervalo $[-3, 3]$;*
- 1 *A equação $f'(x) = 0$ tem no mínimo duas raízes reais no intervalo $[-3, 3]$;*
- 2 *A equação $f''(x) = 0$ tem no máximo uma raiz real no intervalo $[-3, 3]$;*
- 3 *f é crescente no intervalo $[-\infty - 3]$;*

4 f *é côncava no intervalo* $[-\infty - 3]$.

Solução

0 **Falso.**

1 **Verdadeiro.**

2 **Verdadeiro.**

3 **Verdadeiro.**

4 **Verdadeiro.**

Exercício 43 (ANPEC 2004, Questão 7). *Responda V (verdadeiro) ou F (falso):*

0 *Seja* $f : \Re \to \Re$ *uma função estritamente côncava e duas vezes continuamente diferenciável. Se* $a < b$, *então* $f'(a) > f'(b)$.

1 *Seja* $f : \Re \to \Re$ *uma função duas vezes continuamente diferenciável tal que existem* $a < b$ *com* $f'(a) = f'(b) = 0$ *e* $f(a) = f(b) = 1$. *Se existe* c *tal que* $a < c < b$ *e* $f(c) = 0$, *então existe* d *tal que* $a < d < c$ *e* $f''(d) = 0$.

2 *Seja* $f : \Re \to \Re$ *uma função estritamente convexa tal que* $f(0) = 0$. *Então* $.2f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1)$.

3 *Seja* $f : \Re \to \Re$ *uma função contínua tal que, para qualquer* $x, f(x) = f(-x) \geq 0$. *Então* f *atinge um mínimo em* $x = 0$.

4 *Seja* $f : \Re \to \Re$ *uma função estritamente côncava tal que* $f(0) < f(1)$. *Então* f *é estritamente crescente no intervalo* $[0, 1]$.

Solução

0 **Verdadeiro.**

1 **Falso.**

2 **Verdadeiro.**

3 **Falso.**

4 **Falso.**

Exercício 44 (ANPEC 2003, Questão 8). *Assinale V (Verdadeiro) ou F (Falso):*

0 *Se* $f : [a,b] \to \Re$ *é derivável e para todos* $x_0 < x < x_1$ *pertencentes ao intervalo* $[a,b]$ *vale* $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} < \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$, *então* $f'(x_0) \le f'(x_1)$ *para* $x_0 < x_1$ *pertencentes ao intervalo* $[a,b]$.

1 *Se* $f(x) = (1+i)^x, 0 < x < 1$ *e* $i > 0$, *então* $(1+i)^x < 1 + ix$.

2 *Se* $f : [a,b] \to \Re$ *é derivável e* $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, *então* $g'(x) \neq 0$ *para todo* $x \in [a,b]$.

3 $f''(x) < 0$, *para todo* $x \in [a,b]$, *então* $f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$ *para todo* $x, y \in [a,b]$.

4 $f''(x) > 0$, *para todo* $x \in [a,b]$, *então* $f(x) < f'(b)(x-b) + f(b)$, *para* $x \in [a,b]$.

Solução

0 **Verdadeiro.**

1 **Verdadeiro.**

Denotemos $g(x) = -(1+i)^x + 1 + ix$, *derivando duas vezes* g, *temos*

$$g'(x) = -(1+i)^x \ln(1+i) + i,$$
$$g''(x) = -(1+i)^x \ln(1+i)\ln(1+i).$$

Note que $g''(x) < 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$, *então* g *tem concavidade para abaixo. A curva* g *tem interseção com o eixo* x *nos pontos* $x = 1$ *e* $x = 0$. *Então* $g(x) > 0$ *para* $0 < x < 1$.

Portanto

$$(1+i)^x < 1 + ix \;\; ; \;\; \forall x \in (0,1).$$

2 **Falso.**

3 **Falso.**

4 **Falso.**

Exercício 45 (ANPEC 2002, Questão 3). *Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):*

0 *Seja* $f : \Re \to \Re : x \to f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x}[(1+x)^n - 1]; & se \;\; x \neq 0 \\ n/2; & se \;\; x = 0 \end{cases} \; ; n \in N.$

A função f *é contínua sobre* $\Re$.

1. *Seja* $f : (0, \infty) \to \Re : x \to f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{2}; & se \;\; x > 1 \\ \log(x); & se \;\; x \leq 1 \end{cases}$. *A função* f *é continuamente diferenciável em* $(0, \infty)$.
2. *Se* f *é a função definida no item anterior, então* f *é continuamente 2-vezes diferenciável em* $(0, \infty)$.
3. *Se* $X = (-1, 1), Y = \Re$ *e* $f : X \to Y : x \to f(x) = \frac{x}{1-|x|}$, *então* f *é bijetiva.*
4. *Se* f *é a função definida no item anterior, então:* $(f \circ f \circ ... \circ f)(x) > \frac{x}{1-n|x|}$.

Solução

0. **Verdadeiro.**
1. **(A).**
2. **Falso.**
3. **Verdadeiro.**
4. **Falso.**

Exercício 46 (ANPEC 2002, Questão 4). *Assinale V (verdadeiro) ou F(falso):*

0. *Se*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & se \; x \neq 0 \\ 0 & se \; x = 0 \end{cases},$$

então $f'(0) = f''(0) = 0$.

1. *A função* $f : \Re_+ \to \Re$ *definida por* $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, *é sempre decrescente.*
2. *A função definida no item* 1 *é côncava no intervalo* $(0, 1)$ *e convexa no intervalo* $(1, \infty)$.
3. *Se* $f : \Re_+ \to \Re$ *é uma função diferenciável, estritamente crescente, estritamente côncava e com* $f(0) = 0$ *então* f *apresenta elasticidade menor do que 1 em todo o seu domínio.*
4. *A função* $f : (0, 2\pi) \to \Re$ *definida por* $f(x) = \cos(x)$ *apresenta o dobro de pontos de inflexão apresentados por* $f'(x)$.

Solução

0. **Verdadeiro.**

1 **Falso.**
2 **Falso.**
3 **Verdadeiro.**
4 **Verdadeiro.**

EXERCÍCIO 47 (ANPEC 2002, Questão 8). *Considere a expansão de Taylor até o termo de quinta ordem, em torno do ponto $x = 0$.*
Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

0 $e^x \approxeq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$.
1 $\ln(1+x) \approxeq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$.
2 $\cos\ x \approxeq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.
3 $\sin\ x \approxeq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.
4 $a^x \approxeq 1 + x\ln a + \frac{(x\ln a)^2}{2} + \frac{(x\ln a)^3}{6} + \frac{(x\ln a)^4}{24} + \frac{(x\ln a)^5}{120}$.

Solução

0 **Verdadeiro.**
1 **Verdadeiro.**
2 **Falso.**
3 **Falso.**
4 **Verdadeiro.**

EXERCÍCIO 48 (ANPEC 2000, Questão 2). *Responda V (verdadeiro) ou F (falso):*

0 *A função* $f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, *se* $x \in R/\{0\}$ *e* $f(0) = 1$, *é contínua em* 0;
1 *Se* f *é derivável em todo* $x \in \Re$, *então* $\lim\limits_{s\to 0} \frac{f(x)-f(x-2s)}{2s} = 2f'(x)$;
2 *Se* $f : \Re \to \Re$ *é tal que* $\lim\limits_{s\to 0} \frac{f(x+s)-f(x-s)}{2s} \in \Re$ *então* f *é derivável em* x;
3 $y = \frac{16}{9}x + \frac{22}{9}$ *é a reta tangente à curva* $x^3 + y^3 + 100 = 18(x+1)y$ *no ponto* $(x, y) = (2, 6)$;
4 *Se* f *é tal que* $f(0) = 5$ *e* $f'(t) = \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\ln(e+t)\right)$, *então* $(f^{-1})'(5) = 4$.

Solução

0 **Falso.**
1 **Falso.**
2 **Falso.**
3 **Verdadeiro.**
4 **Verdadeiro.**

Exercício 49 (ANPEC 2000, Questão 7). *Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):*

0 *Se f' é estritamente crescente no intervalo (a, b) então f é estritamente convexa neste intervalo;*
1 *Se f e g são funções côncavas na reta $\Re$, deriváveis até a ordem 2 e $f'(x) \geq 0$, para todo $x \in \Re$ então $(f \circ g)(x)$ é uma função côncava em $\Re$;*
2 *Se f é estritamente côncava em (a, b), então vale a desigualdade $\frac{f(b)-f(x)}{b-x} > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ para todo $x \in (a, b)$;*
3 *Se f é côncava e derivável no intervalo aberto (a, b), então $f(y) - f(x) \leq f'(x)(y - x)$, para todo $x, y \in \Re$;*
4 *Os pontos de inflexão de $f(x) = \frac{x^3}{6} + 2\sin(x) - x\cos(x)$ no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ são $-\pi, 0, \pi$.*

Solução

0 **Verdadeiro.**
1 **Verdadeiro.**
2 **Falso.**
3 **Falso.**
4 **Verdadeiro.**

Exercício 50 (ANPEC 1999, Questão 3). *Sejam $f : R \to R$ e $g : R \to R$ funções contínuas. Ponha $h(x) = f(g(x))$ e $u(x) = g(f(x))$. Classifique como V ou F as afirmações abaixo.*

0 *$u(x) = h(x)$ para $x = 0$.*
1 *Se f é derivável então h também o é.*

(2) *h é contínua.*

(3) *Se h e u são deriváveis então $h'(x) = u'(x)$ para todo x.*

Solução

(0) **Falso.**

(1) **Falso.**

(2) **Verdadeiro.**

(3) **Falso.**

EXERCÍCIO 51 (ANPEC 1999, Questão 7). *Suponha que y seja definido implicitamente pela equação*

$$\nu y = \frac{1}{y} + 2.$$

Determine o valor absoluto de $\frac{dy}{d\nu}$ quando $y = -2$.

Solução

Resposta 7

EXERCÍCIO 52 (ANPEC 1999, Questão 11). *Qual o valor de a para que a função*

$$f(x) = 1 - \frac{(ax)^2}{2!} + \frac{(ax)^4}{4!} - \frac{(ax)^6}{6!} + ...$$

seja solução da equação diferencial $f''(x) + 4f(x) = 0$.

Solução

Resposta a=2

Derivando temos

$$f'(x) = -\frac{2xa^2}{2!} + \frac{4(ax)^3a}{4!} - \frac{6(ax)^5a}{6!} + \frac{8(ax)^7a}{8!} + ...$$

$$f''(x) = -a^2 + \frac{(ax)^2a^2}{2!} - \frac{(ax)^4a^2}{4!} + \frac{(ax)^6a^2}{6!} + ...$$

Logo obtemos

$$f''(x) + 4f(x) = (4 - a^2) - (4 - a^2)\frac{(ax)^2}{2!} + (4 - a^2)\frac{(ax)^4}{4!} - ... = 0$$
$$f''(x) + 4f(x) = (4 - a^2)f(x) = 0$$

Então $4 - a^2 = 0$, *portanto* $a = \pm 2$.

EXERCÍCIO 53 (ANPEC 1999, Questão 13). *Seja* $g : R \to R$, *duas vezes diferenciável. Defina* $h(x) = g((x-1)^3)$. *Qual o valor de* $10 + h''(1)$?

Solução

Resposta 10

Se g é diferenciável então g é continua.

Dado que g é duas vezes diferenciável, então g e g' são contínuas. Derivaldo h duas vezes

$$h'(x) = 3(x-1)^2 \;\; g'((x-1)^3)$$
$$h''(x) = 6(x-1) \;\; g'((x-1)^3) + 3(x-1)^2 \times 3(x-1)^2 \;\; g''((x-1)^3).$$

Evaluando em $x = 1$, *obtemos* $h''(1) = 0$.

Portanto $10 + h''(1) = 10$.

EXERCÍCIO 54 (ANPEC 1999, Questão 15). *Classifique como verdadeira ou falsa cada uma das afirmativas sobre a função*

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 - 14x + 7\;; x \in R:$$

- (0) *Apresenta ponto de inflexão para* $x = 2,5$.
- (1) *Apresenta ponto de máximo local para* $x = 5$.
- (2) *Apresenta ponto de mínimo local para* $x = 9$.
- (3) *Apresenta descontinuidade em* $x = 2,5$.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

(1) **Falso.**
(2) **Falso.**
(3) **Falso.**

EXERCÍCIO 55 (ANPEC 1998, Questão 5). *Sabendo que a função real $y = y(x)$, satisfaz à equação diferencial de primeira ordem*

$$\frac{dy}{dx} + xy = e^{-x^2/2},$$

e que $y(2) = 5e^{-2}$, calcule $y(0)$.

Solução

Resposta 3

EXERCÍCIO 56 (ANPEC 1998, Questão 13). *Classifique como verdadeira ou falsa cada uma das afirmativas sobre a função*

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{5}x^2 - 14x + 7\,; x \in \Re :$$

(0) *Apresenta ponto de inflexão para $x = 2,5$*
(1) *Apresenta ponto de máximo para $x = 5$*
(2) *Apresenta ponto de mínimo local para $x = 7$*
(3) *Apresenta descontinuidade em $x = 2,5$*

Solução

(0) **Verdadeiro.**
(1) **Falso.**
(2) **Verdadeiro.**
(3) **Falso.**

EXERCÍCIO 57 (ANPEC 1997, Questão 4). *Classifique como verdadeira ou falsa as afirmações a seguir*

- (0) *Se* f *e* g *são funções reais de variável real tais que* $f(x) > 0$ *e* $g(x) > 0$*, para todo* x*, então a função composta* $h(x) \equiv f(g(x))$ *é crescente.*
- (1) *Se* f *e* g *são funções reais de variável real tais que* f *é convexa e* g *é côncava, então* $5f - 2g$ *é convexa.*
- (2) *Se* f *e* g *são funções reais de variável real tais que* $f, f'g$ *e* g *são crescentes,então a função produto* $h(x) \equiv f(x).g(x)$ *é convexa.*

Solução

- (0) **Verdadeiro.**
- (1) **Verdadeiro.**
- (2) **Falso.**

EXERCÍCIO 58 (ANPEC 1997, Questão 7). *Suponha que* $f(x)$ *seja uma função real de variável real,* x*, definida assim:*

$$f(x) = 12x - x^3$$

Classifique cada uma das afirmações abaixo como verdadeira ou falsa.

- (0) $f(x)$ *possui dois pontos críticos.*
- (1) *Um ponto crítico é ponto de inflexão.*
- (2) *No intervalo* $(-2, 2)$ *do seu domínio,* $f(x)$ *é sempre crescente.*
- (3) $f(x)$ *é côncava para valores negativos de* x*.*
- (4) *Quando* $x = -2, f(x)$ *atinge o seu máximo valor em seu domínio.*

Solução

- (0) **Verdadeiro.**
- (1) **Falso.**
- (2) **Verdadeiro.**
- (3) **Falso.**
- (4) **Falso.**

EXERCÍCIO 59 (ANPEC 1996, Questão 1). *Indique se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas:*

(0) *Uma função $f : \Re \to \Re$ duas vezes derivável é estritamente côncava se, e somente se, a sua derivada segunda é estritamente negativa.*

(1) *A função $f(x) = xe^{-x}$ para $x > 0$ possui um único ponto crítico que corresponde a um ponto de máximo global estrito, mas f não é côncava.*

(2) *Seja $f : \Re \to \Re$ uma função convexa e derivável, exceto em um ponto, no qual possui derivada à direita positiva e à esquerda negativa. Então este ponto é um mínimo global para f .*

(3) *A função $f(x, y) = x^3 + 3x^2 + 2$ é côncava no intervalo $-\frac{5}{2} \leq x \leq -\frac{3}{2}$.*

Solução

(0) **Falso.**

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Verdadeiro.**

(3) **Verdadeiro.**

EXERCÍCIO 60 (ANPEC 1996, Questão 3). *Indique se cada afirmativa é verdadeira ou falsa:*

(0) *A expressão $y^2 = x$ define uma função de $x \in \Re$ em $y \in \Re$.*

(1) *A expressão $y^2 = x$ não define uma função de $x \in [0, \infty)$ em $y \in [0, \infty)$.*

(2) *A função $f(x) = \frac{x-1}{x+1}, x > 1$, possui assíntota horizontal.*

(3) *A função $y = f(x) = \ln(x), x > 0$, possui mínimo em $x = 1$.*

(4) *Considere $y = f(x)$, onde $f : \Re \longrightarrow \Re$. Uma condição necessária para a existência da função inversa $f^{-1}(y) = x$, é que $f(x)$ seja uma bijeção.*

Solução

(0) **Falso.**

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Verdadeiro.**

(3) **Falso.**

(4) **Verdadeiro.**

Exercício 61 (ANPEC 1996, Questão 4). *Indique se cada afirmativa é verdadeira ou falsa.*
Seja $f : \Re \to \Re$ *dada por* $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$.

(0) $f(x)$ *possui um máximo global.*
(1) $f(x)$ *não possui mínimo local.*
(2) $f(x)$ *é estritamente crescente para* $x > 1$.
(3) $f(x)$ *possui um mínimo local e um máximo local.*
(4) $f(x)$ *possui um ponto de inflexão em* $x = -1$.

Solução

(0) **Falso.**
(1) **Falso.**
(2) **Verdadeiro.**
(3) **Verdadeiro.**
(4) **Verdadeiro.**

Exercício 62 (ANPEC 1996, Questão 5). *Indique se a afirmativa é verdadeira ou falsa:*

(0) *Dado que* $f(x) = \frac{\sin 8x}{x}$ *para* $x \neq 0$, *para que* f *seja contínua em* $\Re, f(0)$, *deve valer* 0.
(1) $f(x) = |x - 1|$ *é contínua em todo o seu domínio.*
(2) $f(x) = \begin{cases} x(x-1), & 0 < x < 1 \\ 0 \text{ para outros valores de } x, \end{cases}$
é contínua mas não diferenciável em $[0, 1]$.
(3) *Se* $f : [0, 1] \to [0, 1]$ *é continua em* $[0, 1]$, *existe* $x \in [0, 1]$ *tal que* $f(x) = x$. *(Sugestão: desenhe um gráfico).*

Solução

(0) **Falso.**

(1) **Verdadeiro.**
(2) **Falso.**
(3) **Verdadeiro.**

Exercício 63 (ANPEC 1995, Questão 8). *Indique se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas.*

(0) *Dada a equação* $\frac{z^2 \cos x}{y+1} = x + 1 + \ln(1+y)$, *pode-se afirmar que* dz/dy *no ponto* $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ *é menor que* 1.
(1) $Y(x) = \frac{(\ln \ln x)}{\ln x}$, *então,* $Y'(e) = \frac{1}{e}$.
(2) $(x^2y + y^2x)^{-1/2} = 0$. *Então, no ponto* $(x, y) = (1, 1), dy/dx = 0$.
(3) $y(x) = \tan(x)$, *então,* $d^2y/dx^2(\pi/4) = -1$.

Solução

(0) **Falso.**

Da hipótese

$$z^2 = \frac{(y+1)(x+1+\ln(1+y))}{\cos(x)}$$
$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{\cos(x)2z}\left(2 + x + \ln(1+y)\right)$$

Para $(x, y, z) = (0, 0, 1)$, *temos* $dz(0,0)/dy = 1$.

(1) **Verdadeiro.**
(2) **Falso.**
(3) **Falso.**

Exercício 64 (ANPEC 1994, Questão 2). *Indique as afirmativas verdadeiras e as falsas:*

(0) *Seja* $f(x) = 2^{x^2}$. *Logo* $f'(1) = 2$.
(1) *Seja* $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. *Logo* $f'(0) = 1$.
(2) *Seja* $f(x) = e^{\ln x}$. *Logo* $f'(1) = 1$.

Solução

(0) **Falso.**
(1) **Verdadeiro.**
(2) **Verdadeiro.**

EXERCÍCIO 65 (ANPEC 1994, Questão 5). *Indique as afirmativas verdadeiras e as falsas:*

(0) *Se f é diferençável em $[a,b]$ então f é sempre contínua em $[a,b]$.*
(1) *Se f é contínua em $[a,b]$, então f é sempre diferençável em $[a,b]$.*
(2) *Se $f(x)=x^2$ e $g(x)=2$, então a derivada do produto $f.g$ é o produto das derivadas de f e g.*

Solução

(0) **Verdadeiro.**
(1) **Falso.**
(2) **Falso.**

EXERCÍCIO 66 (ANPEC 1993, Questão 6). *Dada a função $y=-x^3+3x+2, \ \ x \in [-3,3]$, assinale como verdadeira ou falsa cada uma das afirmações abaixo:*

(0) *Quando $x=0$, a função tem um produto de inflexão.*
(1) *A função tem valor máximo global igual a 4.*
(2) *No ponto $x=-1$, a função possui um mínimo local.*
(3) *A função é decrescente no intervalo $(0,1)$.*
(4) *No intervalo $(-3,0)$ a função é convexa.*

Solução

(0) **Verdadeiro.**
(1) **Falso.**
(2) **Verdadeiro.**
(3) **Falso.**

4 **Verdadeiro.**

EXERCÍCIO 67 (ANPEC 1993, Questão 7). *Assinale como verdadeira ou falsa, cada uma das afirmações abaixo:*

0 *A derivada de* x^x *é* $\frac{1+\ln x}{x^x}$.

1 *A forma geral das funções de elasticidade constante é* $f(x) = a + bx^\alpha$.

2 *Se* $a > 0$, *a função* $y = \frac{ax+b}{1+x^2}$ *tem um mínimo local em* $-\frac{b}{a} - \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ *e um máximo local estrito em* $-\frac{b}{a} + \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$.

3 $x^\alpha y^{(1-\alpha)} > ax + (1-\alpha)y, \;\; x > 0, \;\; y > 0, \;\; 0 \leq \alpha \leq 1.$

Solução

0 **Falso.**

1 **Falso.**

2 **Verdadeiro.**

3 **Falso.**

EXERCÍCIO 68 (ANPEC 1992, Questão 4). *Determine o menor valor positivo para* k *de tal forma que a função* $y = \sin(x - k\pi)$ *tenha um ponto de máximo em* $x = \frac{5\pi}{2}$.

EXERCÍCIO 69 (ANPEC 1992, Questão 10). *Dada a função* $y = 12x - x^3, x \in R$, *assinale como falsa ou verdadeira cada afirmação:*

0 *A função possui dois pontos críticos.*

1 *Um dos pontos críticos é um ponto de inflexão.*

2 *No intervalo* $(-2, 2)$, *de seu domínio, a função é sempre crescente.*

3 *A função é côncava para valores negativos de* x.

4 *Quando* $x = 2$ *a função atinge o seu máximo valor em seu domínio.*

Solução

0

(1)
(2)
(3)
(4)

Exercício 70 (ANPEC 1991, Questão 6). *Determine o valor da função* $f(x) = 10 + 5x + 3x^2 - x^3$ *quando ela passa pelo seu ponto de inflexão.*

Exercício 71 (ANPEC 1990, Questão 2). *Se* $f(x) = x^a, x \geq 0$ *e* $0 < a < 1$, *examine as seguintes afirmações:*

(0) *A função* f *é crescente.*
(1) *A função* df/dx *é crescente.*
(2) $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$.
(3) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.
(4) *Se* $x > 0, \quad y > 0,$ *então* $\frac{f(x)+f(y)}{2} > f\left(\frac{x+y}{2}\right)$.

Solução

(0)
(1)
(2)
(3)
(4)

CAPíTULO 18

Cálculo em várias variáveis

[1]

18.1. Questões ANPEC Trabalhadas

18.1.1. Curvas de nível, planos tangentes, gradientes, hessianas. Note que dado o gráfico de uma função $f(x,y)$, o plano tangente à f no ponto (x_0,y_0) é dado por

$$z = ax + by + c.$$

Como o plano tangente tem as mesmas derivadas em relação a x e y, temos que ter

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \qquad b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Finalmente, a constante c é determinada pelo fato de $z = f(x_0,y_0)$:

$$c = f(x_0,y_0) - ax_0 - by_0 = f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)x_0 - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)y_0.$$

A forma final é

$$\begin{aligned} z = ax + by + c &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)y + f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)x_0 - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)y_0 \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0) + f(x_0,y_0). \end{aligned}$$

[1]Última Atualização: 20/07/2022

ANPEC 2022, Questão 13. Julgue a veracidade da seguinte afirmativa.

4 A matriz hessiana associada à função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x_1, x_2) = 2x_1 - 2x_1x_2 - 4x_2^2$ é semidefinida positiva em qualquer ponto do domínio, e logo a função f é convexa.

Falso. Note que

$$\nabla f = (2 - 2x_2, -2x_1 - 4x_2), \qquad H = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Então H não é semidefinida positiva pois $\mathbf{e}_1 H \mathbf{e}_1 = 4 < 0$.

ANPEC 2020, Questão 12. Julgue a veracidade das afirmações abaixo.

2 Dada a função $f(x, y) = \frac{2y\ln(1+x)}{y^2+\ln^2(1+x)}$, a curva de nível $C(1) = \{(x, y) \in D_f : f(x, y) = 1\}$ coincide com o gráfico da função $h(x) = \ln(1 + x), x > -1$.

Falso. Note que $h(0) = 0$ e portanto $(0, 0)$ pertence ao gráfico de h, mas f não está definida em $(0, 0)$.

Veja que esta é uma tentativa de "pegadinha", pois $f(x, y) = 1$ implica em $y = \ln(1 + x)$.

3 Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ tal que o gradiente $\nabla f(x)$ é não nulo, o vetor $\nabla f(x)$ indica a direção de maior crescimento da função f a partir do ponto x.

Verdadeiro. Considere um vetor $\vec{u}$ de norma um. Dado que

$$\frac{\partial f(x)}{\partial \vec{u}} = \nabla f(x).\vec{u} = \| \nabla f(x)\|.\|\vec{u}\| \cos\theta = \| \nabla f(x)\| \cos(\theta).$$

Para que $\partial f(x)/\partial\vec{u}$ seja máximo o $\cos(\theta) = 1$, então

$$\frac{\partial f(x)}{\partial \vec{u}} = \nabla f(x).\vec{u} = \| \nabla f(x)\|.$$

Logo, a direção de máximo crescimento, no ponto x, é

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(x)}{\| \nabla f(x)\|}$$

Portanto, o vetor $\nabla f(x)$ indica a direção de máximo crescimento da função f a partir do ponto x.

4 Considere a curva derivável $\gamma : (a,b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e $f(\gamma(t)) = c \in \mathbb{R}$, para todo $t \in (a,b)$. Então os vetores $\nabla f(\gamma(t))$ e $(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))$ são ortogonais para todo $t \in (a,b)$.

Verdadeiro. Seja $g(t) = f(\gamma(t)) = c$. Como g é constante, então $g'(t) = 0$, e

$$0 = \frac{dg(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \gamma_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \gamma_2}{\partial t} = \nabla f(\gamma(t)).(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)).$$

ANPEC 2019, Questão 07.

Considere a função $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = -(x_1)^2 + \sum_{k=1}^{4}(-x_k)^k$, e verifique a veracidade das seguintes afirmações:

0 Seja $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$ um ponto no $\mathbb{R}^4$. Para que $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^4$ seja um ponto crítico é necessário que $-2x_1^* - 1 = 2x_2^* = -3(x_3^*)^2 = 4(x_4^*)^3 = 0$.

Verdadeiro. A função

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1^2 - x_1 + x_2^2 - x_3^3 + x_4^4.$$

Se x^* é um ponto crítico então

$$\begin{aligned}\nabla f(x^*) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*), \frac{\partial f}{\partial x_3}(x^*), \frac{\partial f}{\partial x_4}(x^*)\right) \\ &= (-2x_1^* - 1, 2x_2^*, -3x_3^{*^2}, 4x_4^{*^3}) = (0,0,0,0).\end{aligned}$$

(1) A matriz Hessiana H de f no ponto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ é

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4x_4 \end{pmatrix}.$$

Falso.

A matriz Hessiana

$$H(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_4}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_4}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^3}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x^3 \partial x_4}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_4 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_4 \partial x_2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_4 \partial x_3}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_4^2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12x_4^2 \end{pmatrix}.$$

(2) A matriz Hessiana H de f é indefinida em R^4.

Verdadeiro. Seja $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$. Então

$$yH(x)y^T = -2y_1^2 + 2y_2^2 - 6x_3 y_3^2 + 12x_4^2 y_2^2.$$

$$\text{para} \quad y = (1,0,0,0) \ \text{ temos } \ yH(x)y^T = -2 < 0,$$
$$\text{para} \quad y = (0,1,0,0) \ \text{ temos } \ yH(x)y^T = 2 > 0.$$

Portanto, a matriz Hessiana H é indefinida em todos o R^4.

(3) f possui um máximo local em $\mathbf{x}^* = (1, 0, 0, 0)$.

Falso. Do item (2), temos que a hessiano é indefinida em todos o R^4. Portanto, nenhum ponto crítico é extremo local.

De forma alternativa, do item (0), temos

$$-2x_1^* - 1 = 2x_2^* = -3(x_3^*)^2 = 4(x_4^*)^2 = 0.$$

Logo $x_1^* = -1/2$, $x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$. Portanto o único candidato a extremo local é $(-1/2, 0, 0, 0)$.

4 O determinante da matriz Hessiana de f é positivo para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, isto é, $\det H_f(\mathbf{x}) > 0$.

Falso. Do item 1, temos $\det(H(x)) = 288x_3x_4^2$. Para $x = (0,0,0,0)$ tem-se $\det(H(x)) = 0$.

ANPEC 2017, Questão 08.

Considere a função $f(x,y) = x^2 \ln y + y^3 e^x + 3x + 2y$.

0 No ponto $(x,y) = (1,1)$ a direção $(-3,1)$ é uma direção de crescimento da função f;

Falso. Note que

$$\nabla f(x,y) = (2x \ln y + y^3 e^x + 3, (x^2/y) + 3y^2 e^x + 2),$$

e portanto $\nabla f(1,1) = (e+3, 3+3e)$. Na direção $(-3,1)$ temos que a derivada direcional é dada por

$$\nabla f(1,1) \cdot (-3,1) = -6 < 0.$$

Logo, a direção não é de crescimento.

1 No ponto $(x,y) = (0,1)$ a direção $(4,5)$ é a direção de máximo incremento da função f;

Verdadeiro. No ponto $(x,y) = (0,1)$ temos $\nabla f(0,1) = (4,5)$, e a direção do gradiente é exatamente a de máximo crescimento.

2 A função f tem um máximo relativo no interior no seu domínio;

Falso. Note que a função só está definida para $y > 0$. e portanto

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (x^2/y) + 3y^2 e^x + 2$$

nunca se anula. Portanto não existe ponto crítico.

3 Ao longo do eixo vertical (quando $x = 0$) a direção horizontal à direita (ou seja, $(1,0)$) é a direção de máximo incremento de f ;

Falso. Quando $x = 0$, temos

$$\nabla f(x, y) = (y^3 + 3, 3y^2 + 2),$$

e portanto nunca está alinhado com a direção $(1, 0)$.

(4) Em todo ponto do domínio a função f é crescente em ambas variáveis.

Falso. Note que para $x = 1$, por exemplo,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = 2 \ln y + y^3 e + 3 < 0$$

se y estiver próximo do zero. Portanto a função é decrescente na direção x.

ANPEC 2008, Questão 11.

Considere a função:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \\ \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

Com relação à função acima, julgue as afirmativas abaixo.

(0) $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0.$

Verdadeiro. Note que f é identicamente nula nos eixos x e y.

(1) Se $g(x, y) = \frac{\partial f(0,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,0)}{\partial y}$, então $g(2, 2) = 0$.

Verdadeiro. Para $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(3x^2 y - y^3)(x^2 + y^2) - 2x(x^3 y - x y^3)}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x^3 - 3xy^2)(x^2 + y^2) - 2y(x^3 y - x y^3)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Logo,

$$g(x, y) = \frac{\partial f(0, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, 0)}{\partial y} = -y + x \implies g(2, 2) = 0.$$

2 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Falso. Note que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = 1,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = -1,$$

onde usamos as contas do item 1.

3 $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ é contínua na origem.

Falso. Pelo teorema de Schwarz ou Clairaut ou Young, se a segunda derivada fosse contínua, a ordem de derivação não importaria. Mas o item 2 mostra que este não é o caso.

4 $\frac{\partial^2 f(x,x)}{\partial x \partial y} = 0$ para $x > 0$.

Verdadeiro (gabarito é Falso).

Do item anterior e para $x > 0$, obtemos

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + 9y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Se $x = y$, então $\partial^2 f/\partial x \partial y = 0$.

18.1.2. Funções homogêneas. Lembre-se que uma função é *homogênea de grau k* se $f(t\mathbf{x}) = t^k f(\mathbf{x})$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Um Teorema de Euler afirma que f é homogênea de grau k se e somente se

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = k f(\mathbf{x}).$$

Ver (7.3.4). Para obter esta relação, basta derivar $f(t\mathbf{x}) = t^k f(\mathbf{x})$ em relação a t e tomar $t = 1$:

$$\mathbf{x} \cdot \nabla f(t\mathbf{x}) = k t^{k-1} f(\mathbf{x}).$$

ANPEC 2020, Questão 12. Julgue a veracidade das afirmações abaixo;

0 Considere a função $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}+1} + \frac{y}{x}$, em que $x > 0$ e $y > 0$. Existem $a > 0$ e $b > 0$ tais que $\big\langle (a,b), \nabla f(a,b) \big\rangle > 0$.

Falso. Note que f é homogênea de grau zero, e portanto

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = k f(\mathbf{x}) = 0,$$

pois $k = 0$.

Outra forma de se ver tal propriedade sem fazer contas é notando que f é constante em cima das retas $y = \alpha x$, com $\alpha \neq 0$. Logo, a derivada normal na direção (a,b) calculada no ponto (a,b) tem que ser zero.

Outra forma, trabalhosa, é fazer as contas. O gradiente

$$\nabla f(x,y) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\Big) = \Big(\frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}+1} - \frac{y}{x^2}, -\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}+1} + \frac{1}{x}\Big).$$

Logo, $\langle (a,b), \nabla f(a,b) \rangle = 0$. Para todo $a > 0$ e $b > 0$.

1 Dada a função $f(x,y) = x e^{\frac{x}{y}}$, todo plano tangente ao gráfico de f contém a origem.

Verdadeiro. Usando que o plano tangente é da forma

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0) + f(x_0,y_0).$$

basta checar que o ponto $(0,0,0)$ pertence ao plano, i.e.,

$$0 = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)x_0 - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)y_0 + f(x_0,y_0) \tag{18.1.1}$$

para todo (x_0,y_0). Mas esta relação (18.1.1) é verdadeira, pois f é homogênea de grau um, e então

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{x}_0 = f(\mathbf{x}_0).$$

Outra forma de checar (18.1.1) é fazedo as contas. Como

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = e^{\frac{x_0}{y_0}} + \frac{x_0}{y_0} e^{\frac{x_0}{y_0}}, \qquad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = -\frac{x_0^2}{y_0^2} e^{\frac{x_0}{y_0}},$$

então

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)x_0 - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)y_0 + f(x_0,y_0) = -[e^{\frac{x_0}{y_0}} + \frac{x_0}{y_0}e^{\frac{x_0}{y_0}}]x_0 - [-\frac{x_0^2}{y_0^2}e^{\frac{x_0}{y_0}}]y_0 + x_0e^{\frac{x_0}{y_0}}$$
$$= e^{\frac{x_0}{y_0}}[-x_0 - \frac{x_0^2}{y_0} + \frac{x_0^2}{y_0}] + x_0e^{\frac{x_0}{y_0}} = 0,$$

a afirmativa é verdadeira.

ANPEC 2018, Questão 10.

Considere a função

$$f(x,y,z) = \frac{xy^2z + x^2z^2 + \frac{y^6}{x^2}}{yz + xz + y^2}$$

e a direção $\vec{u} = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$. Calcule a derivada direcional de f na direção $\vec{u}$ no ponto $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Resposta: 2. Note que

$$f(x,y,z) = \frac{x^3y^2z + x^4z^2 + y^6}{x^2yz + x^3z + x^2y^2},$$

e portanto a função f é homogênea de grau 2, dado que $f(tx,ty,tz) = t^2f(x,y,z)$. Pela identidade de Euler, obtemos

$$\nabla f(x,y,z).(x,y,z) = 2f(x,y,z).$$

A derivada direcional de f na direção $\vec{u}$ é dado por

$$D_{\vec{u}}f(\vec{u}) = \nabla f(\vec{u}) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = 2f(\vec{u})\frac{1}{\|\vec{u}\|} = 2.\frac{3}{3} = 2,$$

já que $f(\vec{u}) = f(\sqrt{3}(1,1,1)) = 3f(1,1,1) = 3$.

18.1.3. Teorema da Função Implícita. O teorema da função implícita determina condições em que pode-se "escrever" uma variável em função de outras. Por exemplo, seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suave e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $F(x_0, y_0) = c$ para alguma constante $c \in \mathbb{R}$, e $\partial F/\partial y(x_0, y_0) \neq 0$. Então existe função ϕ definida numa vizinhança de x_0 e tal que $\phi(x_0) = y_0$ e $F(x, \phi(x)) = c$. Note que

$$0 = \frac{d}{dx}\big[F(x, \phi(x))\big] = \frac{\partial F}{\partial x}(x, \phi(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, \phi(x))\phi'(x) \implies \phi'(x) = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}.$$

ANPEC 2022, Questão 13. Julgue a veracidade das afirmativas abaixo.

1 A equação $(x-2)^3 + x(y-1)^2 - \ln y = 1$ define implicitamente y como função de x em uma vizinhança do ponto $(3, 1) \in \mathbb{R}^2$, e denotamos para expressar isso $y = h(x)$. Esta função satisfaz $\frac{dh}{dx}(3) = \frac{1}{2}$.

Falso. Seja $f(x, y) = (x-2)^3 + x(y-1)^2 - \ln y$. Note que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3(x-2)^2 + (y-1)^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x(y-1) - \frac{1}{y}.$$

Como $\partial f/\partial y(3, 1) = -1 \neq 0$, podemos aplicar o teorema da função implícita. Logo, existe função tal que $y = h(x)$ e $f(x, h(x)) = 1$. Derivando em relação à x,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, h(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, h(x))h'(x) = 0 \implies h'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, h(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, h(x))}.$$

no ponto $(3, 1)$ temos $h'(x) = 3$.

2 Considerando a função $f : \mathbb{R} \times [0, 1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = (x^2 + y^2)(ye^{|x|} - 1)$, para cada $x \in \mathbb{R}$ existe um único $y = h(x) \in [0, 1)$ tal que $f(x, h(x)) = 0$, o que define uma função contínua $h : \mathbb{R} \to [0, 1)$.

Falso. Note que quando $x = 0$, y pode assumir somente um valor: $y = 0$. A possibilidade $y = 1$ fica descartada pois o ponto $(0, 1)$ não pertence ao domínio da função.

Para $x \neq 0$, tem-se $y = e^{-|x|}$. Portanto a função h é dada por

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ e^{-|x|} & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

Note entretanto que esta função não é contínua, como afirmado.

ANPEC 2020, Questão 5.

Seja a função $z(x, y)$ definida implicitamente por

$$F(x, y, z) = x \ln z + z \ln y - z^2 - x \ln y + x = 0.$$

Julgue as seguintes afirmativas a seguir.

0 O valor de F no ponto $(e^2 - e, e, e)$ é zero.

Verdadeiro.

$$F(e^2 - e, e, e) = (e^2 - e) \ln e + e \ln e - e^2 - (e^2 - e) \ln e + e^2 - e = 0.$$

1 O valor $\frac{\partial F}{\partial z}$ no ponto $(e^2 - e, e, e)$ é zero.

Falso.

A derivada parcial de F com respeito à variável z é

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} = \frac{x}{z} + \ln\ y - 2z.$$

Para $(x, y, z) = (e^2 - e, e, e)$, temos

$$\frac{\partial F(e^2 - e, e, e)}{\partial z} = \frac{e^2 - e}{e} + \ln\ e - 2e = -e.$$

2 z não pode ser definida implicitamente como função de (x, y) ao redor do ponto $(e^2 - e, e, e)$.

Falso. Pelos itens 0 e 1

$$F(e^2 - e, e, e) = 0, \qquad \frac{\partial F(e^2 - e, e, e)}{\partial z} \neq 0,$$

Então, pelo teorema da função implícita, z pode ser definida implicitamente como função de (x, y) ao redor do ponto $(e^2 - e, e, e)$.

3 O vetor $\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ no ponto $(e^2 - e, e, e)$ é $\left(\frac{1}{e}, \frac{2}{e} - 1\right)$.

Verdadeiro. Definindo z como função de (x, y), temos $F(x, y, z(x, y)) = 0$, e derivando em relação à x e à y temos

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

As derivadas parciais de F são

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} = \ln z - \ln y + 1, \qquad \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} = \frac{z}{y} - \frac{x}{y},$$
$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} = \frac{x}{z} + \ln y - 2z.$$

Para $(x, y, z) = (e^2 - e, e, e)$, temos

$$\frac{\partial F(e^2 - e, e, e)}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial F(e^2 - e, e, e)}{\partial y} = 2 - e, \quad \frac{\partial F(e^2 - e, e, e)}{\partial z} = -e.$$

Assim,

$$\frac{\partial z(e^2 - e, e)}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(e^2 - e, e, e)}{\frac{\partial F}{\partial z}(e^2 - e, e, e)} = \frac{-1}{-e} = \frac{1}{e},$$
$$\frac{\partial z(e^2 - e, e)}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}(e^2 - e, e, e)}{\frac{\partial F}{\partial z}(e^2 - e, e, e)} = -\frac{2 - e}{-e} = \frac{2}{e} - 1.$$

18.1.4. Funções côncavas ou convexas.

ANPEC 2007, Questão 05. As seguintes informações são fornecidas:

> Se $f : U \to R$ uma função duas vezes diferenciável, definida em $U = \{(x,y) : x, y > 0\}$ e $H_f(x,y)$ a matriz Hessiana de f no ponto $(x,y) \in U$.

Avalie as afirmativas abaixo.

> 0 A função f é convexa se e somente se $H_f(x,y)$ é semidefinida positiva em todos os pontos de U .

O gabarito tem como falsa a afirmação, que tem toda a aparência de verdadeira. Possivelmente foi devido ao detalhe da f não ser duas vezes *continuamente* diferenciável em U, i.e., $C^2(U)$.

> 1 Se $f(x,y) = -x^{1/3}y^{1/4}$, então f é convexa.

Verdadeiro.

> 2 Se f é convexa, então $H_f(x,y)$ é positiva definida em todos os pontos de U.

Falso. Tome $f(x,y) = x^4 + y^4$. Então, $\nabla f = (4x^3, 4y^3)$ e

$$H_f(x,y) = 12 \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}.$$

Note que f não é positiva definida no ponto $(0,0)$.

> 3 Se $f(x,y) = x^2y^2$, então f é convexa.

Falso. Sem fazer contas, veja que a função se anula nos eixos e é positiva fora deles. Não pode mesmo ser convexa.

Fazendo as contas, $\nabla f = (2xy^2, 2x^2y)$ e

$$H_f(x,y) = 2 \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix}.$$

Como $\det H_f(x,y) = -6x^2y^2 < 0$ em $(x,y) = (1,1)$ por exemplo, a função não é convexa (uma função "suave" é convexa se e somente se a hessiana é semidefinida em todos os pontos).

4 Se f é convexa e (x_0, y_0) é um ponto crítico de f, então $f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$, para todo $(x,y) \in U$.

Verdadeiro. Um ponto crítico de uma função convexa é mínimo global.

18.1.5. Otimização sem restrições.

ANPEC 2022, Questão 10. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 + (1+x)^3 y^2$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, e classifique as afirmações abaixo.

1 A função f tem mais do que um ponto crítico.

Falso. Note que $\nabla f(x,y) = (2x + 3y^2(1+x)^2, 2y(1+x)^3)$. Um ponto crítico satisfaz $y(1+x)^3 = 0$ e portanto $y = 0$ ou $x = -1$. Se $y = 0$ então $x = 0$. Se $x = -1$ então $\partial f / \partial x$ não se anula. Logo $(0,0)$ é único ponto crítico.

2 Existe um ponto de mínimo local para f.

Verdade. Basta ver que a hessiana é dada por

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 + 6y^2(1+x) & 6y(1+x)^2 \\ 6y(1+x)^2 & 2(1+x)^3 \end{pmatrix}.$$

e então

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como a hessiana é positiva definida no ponto crítico, então este ponto é mínimo local.

3 Existe um ponto de máximo local para f.

Falso, pois pelo itens 1 e 2, o único ponto crítico é de mínimo.

4 A função f assume um valor mínimo em seu domínio.

Falso, pois para $y \neq 0$,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x,y) = -\infty.$$

ANPEC 2022, Questão 12.

> Dado um parâmetro $a \in \mathbb{R}$, considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = -x^2 - xy - 2y^2 + 2ax + 2ay$ e o problema de maximização:
> $$\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x, y).$$
> Denotando por $(x^*, y^*) = (x^*(a), y^*(a))$ a solução deste problema, seja $f^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f^*(a) = f(x^*, y^*)$ a função valor correspondente. Calcule a derivada de f^* no ponto $a = 14$, ou seja, o valor de $\frac{df^*}{da}(14)$.

Note que $\nabla f(x, y) = (-2x - y + 2a, -x - 4y + 2a)$, e

$$H_f = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Como o determinante da hessiana é maior que zero, ambos autovalores têm o mesmo sinal. Logo, ela é positiva ou negativa definida. Mas como os termos da diagonal são negativos, i.e.,

$$\mathbf{e}_1^T H_f \mathbf{e}_1 = -2 < 0, \qquad \mathbf{e}_2^T H_f \mathbf{e}_2 = -4 < 0,$$

então a hessiana tem que ser negativa definida. Note em particular que a função é estritamente côncava.

Para achar pontos críticos, basta igualar o gradiente a zero. Portanto,

$$\begin{cases} x + 4y = 2a \\ 2x + y = 2a \end{cases}$$

Depois de algumas contas vê-se que a única solução é $(x^*, y^*) = (6a/7, 2a/7)$. Como função é côncava, este ponto crítico é de máximo. Substituindo, temos

$$f^*(a) = f(x^*, y^*) = a^2\left(-\frac{36}{49} - \frac{12}{49} - \frac{8}{49} + \frac{12}{7} + \frac{4}{7}\right) = \frac{a^2}{49}(-36 - 12 - 8 + 84 + 28) = \frac{56a^2}{49}.$$

Portanto,

$$\frac{df^*(a)}{da} = \frac{16a}{7} \implies \frac{df^*(14)}{da} = 32.$$

18.1.6. Otimização com restrições.

18.1.6.1. *Lagrange: restriçõesde igualdade.* Suponha que $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^2$ seja tal que

$$f(\mathbf{x}^*) = \min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2,\, g_1(\mathbf{x}) = \cdots = g_k(\mathbf{x}) = 0\}.$$

então existem números $\mu, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_k^*$ não todos nulos e tais que

$$\mu \nabla f(\mathbf{x}^*) = \lambda_1^* \nabla g_1(\mathbf{x}^*) + \cdots + \lambda_k^* \nabla g_k(\mathbf{x}^*).$$

Se $\{\nabla g_1(\mathbf{x}^*), \ldots, \nabla g_k(\mathbf{x}^*)\}$ é linearmente independente, então pode-se tomar $\mu = 1$.

18.1.6.2. *Kuhn–Tucker: restriçõesde desigualdade.* Suponha que

$$f(\mathbf{x}^*) = \min\{f(\mathbf{x}) :\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2,\, h_1(\mathbf{x}) \geq 0, \cdots, h_k(\mathbf{x}) \geq 0\}.$$

Então:

(1) existem números $\mu, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_k^*$ não todos nulos e tais que

$$\mu \nabla f(\mathbf{x}^*) = \lambda_1^* \nabla h_1(\mathbf{x}^*) + \cdots + \lambda_k^* \nabla h_k(\mathbf{x}^*).$$

(2) seja $i \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $h_i(\mathbf{x}^*) > 0$. Então pode-se impor $\lambda_i^* = 0$.

(3) se o conjunto $V = \{\nabla h_i(\mathbf{x}^*) :\, h_i(\mathbf{x}^*) = 0,\ \text{onde } 1 \leq i \leq k\}$ é linearmente independente, então pode-se tomar $\mu = 1$ e $\lambda_1^* \geq 0, \ldots, \lambda_k^* \geq 0$.

18.1.6.3. *Restrições de positividade.* Suponha que

$$f(\mathbf{x}^*) = \min\{f(\mathbf{x}) :\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}.$$

Então

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) \geq \mathbf{0}, \qquad \nabla f(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{x}^* = 0, \qquad \mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}.$$

18.1.6.4. *Restrições de desigualdade com positividade.* Seja $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ "suave" e

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}) \quad \text{tal que } g(\mathbf{x}) \geq 0,\, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Então

$$\nabla_{\mathbf{x}} f - \lambda \cdot \nabla_{\mathbf{x}} g \geq \mathbf{0}, \qquad (\nabla_{\mathbf{x}} f - \lambda \cdot \nabla_{\mathbf{x}} g) \cdot \mathbf{x} = 0,$$
$$\lambda \geq 0, \qquad \lambda g = 0, \qquad g \geq 0, \qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

18.1.6.5. *Restrições de igualdade com positividade.* Seja $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ "suave" e

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}) \quad \text{tal que } g(\mathbf{x}) = 0,\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Então

$$\nabla_{\mathbf{x}} f - \lambda \cdot \nabla_{\mathbf{x}} g \geq \mathbf{0}, \qquad (\nabla_{\mathbf{x}} f - \lambda \cdot \nabla_{\mathbf{x}} g) \cdot \mathbf{x} = 0,$$
$$g = 0, \qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

ANPEC 2021, Questão 10. Considere a seguinte questão:

> Seja a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\frac{x_1^2}{4} + 4\sqrt{5}\, x_1 + x_2$, em que $x = (x_1, x_2)$. Dados dois parâmetros positivos $p, m \in (0, +\infty)$, defina o conjunto $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, px_1 + x_2 = m\}$. Encontre o menor valor de m que faz com que, para qualquer parâmetro p satisfazendo $0 < p < 4\sqrt{5}$, a condição $\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = p$ forneça a solução para o problema de maximizar $f(x)$ sujeito a $x \in A$.

(Solução de Luciano Venturim). A função f é quasilinear em x_2. O problema original é

$$\max_{x_1,x_2} -\frac{x_1^2}{4} + 4\sqrt{5}x_1 + x_2$$

tal que

$$\begin{cases} x_1, x_2 \geq 0 \\ px_1 + x_2 = m \end{cases}$$

Substituindo x_2 na função objetivo, temos

$$\max_{x_1,x_2} -\frac{x_1^2}{4} + (4\sqrt{5} - p)x_1 + m.$$

Veja que para que $x_2 \geq 0$, $x_2 = m - px_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \frac{m}{p}$. As CPOs desse problema são

(1) $(-\frac{x_1^*}{2} + 4\sqrt{5} - p)x_1^* = 0$
(2) $0 \leq x_1^* \leq \frac{m}{p}$
(3) $-\frac{x_1^*}{2} + 4\sqrt{5} - p \leq 0$

Se $x_1^* = 0$, então $x_2^* = m$ e o máximo do problema acima é $f(0, m) = m$.

Se $x_1^* > 0$, então podemos ter dois casos:

(1) $-\frac{x_1^*}{2} + 4\sqrt{5} - p = 0$, isto é, $\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1} = p$, e $px_1^* \leq m$ onde $x_1^* = 2(4\sqrt{5} - p)$. Nesse caso, $x_1^* = 2(4\sqrt{5} - p)$ e $px_1^* = 2p(4\sqrt{5} - p)$. Além disso, $f(x_1^*, m - px_1^*) = (4\sqrt{5} - p)^2 + m \geq m = f(0, m)$.

(2) $\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1} < p$ e $px_1^* = m$. Nesse caso, $x_1^* = \frac{m}{p}$, e $f(\frac{m}{p}, 0) = \frac{m^2}{4p^2} + (4\sqrt{5} - p)\frac{m}{p} + p$.

O primeiro caso é o que nos interessa. Precisamos encontrar o menor m, m^*, tal que $px_1^* = 2p(4\sqrt{5} - p) \leq m^*$ para todo $p \in (0, 4\sqrt{5})$. Para cada p, $m(p) = 2p(4\sqrt{5} - p)$ é o menor valor de m para qual essa desigualdade é válida. Para encontrar m^*, basta então encontrar o maior valor que $m(p)$ pode atingir em $p \in (0, 4\sqrt{5})$, isto é, $m^* = \max_{p \in (0, 4\sqrt{5})} m(p)$. Note que $m(p)$ é uma parábola em p com raízes 0 e $4\sqrt{5}$. Seu máximo é então $2\sqrt{5} \in (0, 4\sqrt{5})$, donde $m^* = m(2\sqrt{5}) = 40$.

ANPEC 2019, Questão 12.

Considere o problema do investidor que pode investir os pesos w_1 e w_2 de sua riqueza em dois instrumentos financeiros arriscados. Suas preferências implicam que ele quer maximizar a função

$$U(w_1, w_2) = 1,15w_1 + 1,2w_2 - 0,5(0,04w_1^2 + 0,09w_2^2).$$

Sujeita às restrições:

$$w_1 + w_2 = 1,$$
$$w_1 \geq 0 \quad \text{e} \quad w_2 \geq 0.$$

4 A solução do problema de maximização com restrição acima é $(w_1^*, w_2^*) = (0, 1)$, ou seja, o investidor prefere investir todo o seu dinheiro em apenas um instrumento financeiro.

Falsa (com gabarito verdadeiro). Pelo item 1,

$$\nabla U = \left(\frac{115}{100} - \frac{4}{100}w_1, \frac{12}{10} - \frac{9}{100}w_2\right).$$

Ignorando por um momento as condições de positividade e impondo somente a restrição $w_1 + w_2 = 1$, temos que

$$\begin{cases} \frac{115}{100} - \frac{4}{100}w_1 = \lambda \\ \frac{12}{10} - \frac{9}{100}w_2 = \lambda \\ w_1 + w_2 = 1 \end{cases}$$

e conluímos que $w_1 = 4/13$ e $w_2 = 9/13$. Como

$$U(4/13, 9/13) > \max\{U(0,1), U(1,0)\},$$

temos que a afirmativa é falsa.

ANPEC 2015, Questão 09. Considere as seguintes informações:

Seja $f : D \to R$ a função definida por $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$, em que

$$D = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 3 \ \text{ e } \ 0 \leq y \leq 2\}.$$

0 A função f possui um único ponto de mínimo em D;

Falso. Note que

$$\nabla f = (2x - 2y, -2x + 2), \qquad H = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\det H = -4$, a hessiana é indefinida (tem autovalores de sinais opostos). Logo, nenhum ponto crítico é mínimo ou máximo. Então o mínimo ocorre na fronteira. Vamos analisar cada caso:

(1) $y = 0 \implies f = x^2$. Logo a função alcança o mínimo em $(0, 0)$.
(2) $x = 0 \implies f = 2y$. Logo a função alcança o mínimo em $(0, 0)$.
(3) $y = 2 \implies f = x^2 - 4x + 4$. Logo a função alcança o mínimo em $(2, 2)$.
(4) $x = 3 \implies f = -4y + 9$. Logo a função alcança o mínimo em $(3, 2)$.

Temos portanto três candidatos a mínimo. Calculando os valores de f:

$$f(0, 0) = 0, \qquad f(2, 2) = 0, \qquad f(3, 2) = 1.$$

Portanto, f tem dois mínimos em D.

(1) $(1,1)$ é ponto de mínimo local de f em D;

Falso. Basta ver a solução do item (0).

(2) O valor máximo absoluto da função em D é 9;

Verdadeiro. Basta repetir a argumentação do item (0) e calcular f nos pontos $(0,1)$, $(3,2)$ e $(3,0)$:

$$f(0,1) = 2, \qquad f(3,2) = 1, \qquad f(3,0) = 9.$$

(3) O máximo é atingido na fronteira de D;

Verdadeiro. Pelo item (0), a função não possui pontos de máximo ou mínimo no interior.

(4) A função é côncava em D.

Falso. Basta ver que a hessiana calculada no item (0) é indefinida.

ANPEC 2012, Questão 15.

Seja (x^*, y^*) o ponto de R^2 que maximiza $f(x,y) = x^2y$ sujeita à restrição $2x^2 + y^2 \leq 9$. Encontre $a = [f(x^*, y^*)]^2$.

Seja $g(x) = 2x^2 + y^2 - 9$. Note que

$$\nabla f = (2xy, x^2), \qquad \nabla g = (4x, 2y).$$

Portanto os pontos críticos estão concentrados em $x = 0$. Mas $f(0,y) = 0$ para todo y, e portanto estes pontos não são de máximo. Concluímos que o(s) ponto(s) de máximo se econtram na fronteira do domínio, i.e., satisfazem $2x^2 + y^2 - 9$. Podemos então resolver este problema de otimização com restrição de igualdade. Usando o Teorema de Lagrange, existe λ tal que $\nabla f = \lambda \nabla g$, i.e.,

$$\begin{cases} 2xy = 4\lambda x \\ x^2 = 2\lambda y \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{cases}.$$

Como sabemos que o ponto de máximo tem $x \neq 0$, podemos dividir por x e concluir da primeira equação que $y = 2\lambda$. Note que $y > 0$ no ponto de máximo, e portanto $\lambda > 0$. Da segunda equação temos $x^2 = 4\lambda^2$. Finalmente, da terceira equação temos $\lambda = 3/(2\sqrt{3})$. Logo,

$$f(x,y)]^2 = x^4y^2 = 16\lambda^4 4\lambda^2 = 64\lambda^6 = 64\frac{3^6}{2^6 \times 3^3} = 27.$$

ANPEC 2011, Questão 10. Considere as seguintes informações:

> Seja $X \subset \mathbb{R}^2$ o conjunto limitado pelas retas $r_1 : x = 0$, $r_2 : y = 0$, $r_3 : 4x + 3y - 40 = 0$ e $r_4 : x + 2y - 20 = 0$. Seja $p \in X$ o ponto de máximo da função $f : X \to \mathbb{R}$ dado por $f(x,y) = 2x + 5y$.

A seguir avaliamos as afirmativas quanto às suas veracidades.

> 0 No ponto p, o gradiente de f não é ortogonal a qualquer das retas r_1, r_2, r_3 e r_4.

Verdadeiro. Basta ver que $\nabla f = (2,5)$. E as retas são ortogonais a $(1,0)$, $(0,1)$, $(4,3)$, $(1,2)$.

> 1 O valor da função f no ponto resultante da interseção das retas r_2 e r_3 é 70.

Falso. A interseção ocorre em $(10,0)$, mas $f(10,0) = 20$.

> 2 O valor da função f no ponto resultante da interseção das retas r_3 e r_4 é 48.

Verdadeiro. Basta ver que no ponto de intersecção, vale o sistema

$$\begin{cases} 4x + 3y = 40 \\ x + 2y = 20 \end{cases}$$

e portanto $x = 4$ e $y = 8$. Mas $f(4,8) = 48$.

> 3 $p = (10,0)$.

Falso. O ponto de máximo de uma função linear com restrições lineares só pode ocorrer em cima de uma reta inteira se o gradiente de f for ortogonal a uma das retas. Como esta não é o caso, ver item 0, então o máximo se dará numa das interseções entre retas: $(0,0)$, $(10,0)$, $(4,8)$, $(0,10)$. Calculando o valor de f:

$$f(0,0)=0, \qquad f(10,0)=20, \qquad f(4,8)=48, \qquad f(0,10)=50.$$

Logo, o ponto de máximo ocorre em $(0,10)$ e $f(0,10)=50$.

4 $f(p)=50$.

Verdadeiro. Ver item 3.

18.2. Questões ANPEC Resolvidas

Exercício 72 (ANPEC 2022, Questão 10). *Considere a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=x^2+(1+x)^3y^2$ para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas:*

0 *A função $\frac{\partial f}{\partial y}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ é homogênea de grau 4.*
1 *A função f tem mais do que um ponto crítico.*
2 *Existe um ponto de mínimo local para f.*
3 *Existe um ponto de máximo local para f.*
4 *A função f assume um valor mínimo em seu domínio.*

Exercício 73 (ANPEC 2022, Questão 11). *Dada uma lista de parâmetros $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, são definidas duas funções $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ por $f(x_1,x_2)=x_1+\alpha x_2$ e $g(x_1,x_2)=(x_1-1)^2+\beta(x_2^2-1)$. Considere o problema de otimização que consiste em maximizar $f(x_1,x_2)$ sujeito a $g(x_1,x_2)=0$. Defina o lagrangeano $L(x_1,x_2,\lambda)=f(x_1,x_2)-\lambda g(x_1,x_2)$. O gradiente de L é notado por $\nabla L(x_1,x_2,\lambda)$. Julgue as seguintes afirmativas:*

0 *Quando $\alpha=1$ e $\beta=0$ o problema não tem solução.*
1 *Quando $\alpha=-1$ e $\beta=1$ o problema não tem solução.*
2 *Quando $\alpha=\beta=1$ o problema tem uma única solução, que pode ser encontrada resolvendo-se $\nabla L(x_1,x_2,\lambda)=(0,0,0)$.*

(3) *Quando* $\alpha = \beta = 0$ *uma solução do problema pode ser encontrada resolvendo-se* $\nabla L(x_1, x_2, \lambda) = (0, 0, 0)$.

(4) *Quando* $\alpha = 0$ *e* $\beta = 1$ *o ponto* $(1, 0)$ *resolve o problema.*

Exercício 74 (ANPEC 2022, Questão 12). *Dado um parâmetro* $a \in \mathbb{R}$, *considere a função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x, y) = -x^2 - xy - 2y^2 + 2ax + 2ay$ *e o problema de maximização:*

$$\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x, y).$$

Denotando por $(x^*, y^*) = (x^*(a), y^*(a))$ *a solução deste problema, seja* $f^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f^*(a) = f(x^*, y^*)$ *a função valor correspondente. Calcule a derivada de* f^* *no ponto* $a = 14$, *ou seja, o valor de* $\frac{df^*}{da}(14)$.

Exercício 75 (ANPEC 2022, Questão 13). *Julgue a veracidade das seguintes afirmativas:*

(0) *Seja* $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável. Suponha que* $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ *não é um ponto crítico da função* f. *Se* $A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_N} \end{bmatrix}$ *e* A^T *denota a transposta de* A, *então a matriz* AA^T *tem posto 1.*

(1) *A equação* $(x-2)^3 + x(y-1)^2 - \ln y = 1$ *define implicitamente* y *como função de* x *em uma vizinhança do ponto* $(3, 1) \in \mathbb{R}^2$, *e denotamos para expressar isso* $y = h(x)$. *Esta função satisfaz* $\frac{dh}{dx}(3) = \frac{1}{2}$.

(2) *Considerando a função* $f : \mathbb{R} \times [0, 1) \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x, y) = (x^2 + y^2)(ye^{|x|} - 1)$, *para cada* $x \in \mathbb{R}$ *existe um único* $y = h(x) \in [0, 1)$ *tal que* $f(x, h(x)) = 0$, *o que define uma função contínua* $h : \mathbb{R} \to [0, 1)$.

(3) *Seja* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função continuamente diferenciável, e* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função definida por* $g(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) + \cos(x_1 x_2)$. *Denotamos por* $\langle z, w \rangle$ *o produto interno padrão entre os vetores* z *e* w *no* $\mathbb{R}^2$, *e por* $\nabla f(x)$ *e* $\nabla g(x)$

os gradientes das duas funções. Então $\langle \nabla f(x) - \nabla g(x), \nabla f(x) - \nabla g(x)\rangle \leq 1$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^2$*, cuja distância euclidiana ao ponto* $(0,0)$ *é* 1.

4. *A matriz hessiana associada à função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x_1, x_2) = 2x_1 - 2x_1x_2 - 4x_2^2$ *é semidefinida positiva em qualquer ponto do domínio, e logo a função* f *é convexa.*

Exercício 76 (ANPEC 2021, Questão 2). *Considere os conjuntos* $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$ *e* $B = A \cap \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$. *Seja* $y = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$. *Julgue as seguintes afirmativas:*

0. *Os subconjuntos* A *e* B *de* $\mathbb{R}^3$ *são exemplos de subespaços vetoriais de* $\mathbb{R}^3$.
1. *Se os conjuntos* $C, D \subseteq \mathbb{R}^3$ *são definidos por* $C = \{x - y \in \mathbb{R}^3 : x \in A\}$ *e* $D = \{x - y \in \mathbb{R}^3 : x \in B\}$*, então* C *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^3$*, mas* D *não é um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^3$.
2. *A função* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_3$ *não atinge um ponto de máximo em* A*, mas atinge um ponto de máximo em* B.
3. *Seja* $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$ *um vetor satisfazendo* $z_1 + z_2 + z_3 = 0$*, e tome a constante* $\alpha = \min\left\{\frac{1}{3+3|z_1|}, \frac{1}{6+6|z_2|}, \frac{1}{2+2|z_3|}\right\}$. *Então, para todo número real* ε *no intervalo aberto* $(0, \alpha)$*, o vetor* $y + \varepsilon z$ *pertence a* B.
4. *A projeção ortogonal do vetor* y *sobre o complemento ortogonal do subespaço vetorial gerado pelo vetor* $(1, 0, -1)$ *é um elemento do conjunto* B.

Exercício 77 (ANPEC 2021, Questão 8). *Para um número natural* $N \geq 1$ *denotamos por* $\mathbb{R}^N_{++}$ *o conjunto dos vetores* $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$ *em* $\mathbb{R}^N$ *com* $x_1 > 0, x_2 > 0, ..., x_N > 0$. *Uma função* $f : \mathbb{R}^N_{++} \to \mathbb{R}$ *é chamada de positivamente homogênea de grau* p*, sendo* $p \geq 0$ *um número inteiro, se para todo número real* $\alpha > 0$ *tivermos* $f(\alpha x) = \alpha^p f(x)$. *Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas:*

0. *No caso* $N = 1$ *a função definida por* $f(x) = x|x|$ *é um exemplo de função positivamente homogênea de grau* 2.
1. *Se* $g : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ *é uma função qualquer, então* $f(x_1, x_2) = x_2 g\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$ *define uma função positivamente homogênea de grau* 1 *sobre* $\mathbb{R}^2_{++}$.

(2) *Se $g : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ é uma função positivamente homogênea de grau 1, então a função $f : \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x_1, x_2) = x_2 g\big(\frac{x_1}{x_2}\big)$ é côncava.*

(3) *Qualquer função $g : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ positivamente homogênea de grau p satisfaz $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) > 0$.*

(4) *Sejam $f : \mathbb{R}^N_{++} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^N_{++} \to \mathbb{R}$ funções positivamente homogêneas de grau p. Defina, sobre o mesmo domínio, a soma $f + g$ por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e o produto fg por $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Portanto, $f + g$ e fg são positivamente homogêneas de grau p.*

Exercício 78 (ANPEC 2021, Questão 9). *Seja a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x_1, x_2) = e^{100x_1 - 5x_1^2 + 40x_2 - 5x_2^2 + 3}$. Se $D((x_1, x_2), (5, 2))$ denota a distância euclidiana do ponto (x_1, x_2) ao ponto $(5, 2)$, e $\alpha \in \mathbb{R}$ é um parâmetro, considere o problema P : maximizar $f(x) = f(x_1, x_2)$ em $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ sujeito à restrição $D((x_1, x_2), (5, 2)) \le \alpha$. Julgue as seguintes afirmativas:*

(0) *Os pontos que satisfazem a restrição do problema P formam um conjunto convexo apenas quando $0 \le \alpha \le 1$.*

(1) *Se para os números reais β_1 e β_2 temos que para todos $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ em $\mathbb{R}^2$ a desigualdade $f(x_1, x_2) \ge f(y_1, y_2)$ equivale a $-(x_1, \beta_1)^2 - (x_2 - \beta_2)^2 \ge -(y_1 - \beta_1)^2 - (y_2 - \beta_2)^2$, então β_1 e β_2 são múltiplos de 5.*

(2) *Para todo $\alpha \ge 0$ o ponto que maximiza a função f de forma incondicional em $\mathbb{R}^2$ não satisfaz a restrição do problema.*

(3) *Quando $\alpha = \sqrt{29}$, na solução x^* para o problema de maximização P o gradiente $\nabla f(x^*)$ é diferente de $(0, 0)$.*

(4) *A função g sobre $\mathbb{R}^2$ definida por $g(x_1, x_2) = \ln f(x_1, x_2)$ é côncava.*

Exercício 79 (ANPEC 2021, Questão 10). *Seja a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\frac{x_1^2}{4} + 4\sqrt{5}\, x_1 + x_2$, em que $x = (x_1, x_2)$. Dados dois parâmetros positivos $p, m \in (0, +\infty)$, defina o conjunto $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, px_1 + x_2 = m\}$. Encontre o menor valor de m que faz com que, para qualquer parâmetro p satisfazendo $0 < p < 4\sqrt{5}$, a condição $\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = p$ forneça a solução para o problema de maximizar $f(x)$ sujeito a $x \in A$.*

Exercício 80 (ANPEC 2020, Questão 5). *Seja a função $z(x, y)$ definida implicitamente por*

$$F(x, y, z) = x \ln z + z \ln y - z^2 - x \ln y + x = 0.$$

Julgue as seguintes afirmativas:

(0) *O valor de F no ponto $(e^2 - e, e, e)$ é zero.*
(1) *O valor $\frac{\partial F}{\partial z}$ no ponto $(e^2 - e, e, e)$ é zero.*
(2) *z não pode ser definida implicitamente como função de (x, y) ao redor do ponto $(e^2 - e, e, e)$.*
(3) *O vetor $\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ no ponto $(e^2 - e, e, e)$ é $\left(\frac{1}{e}, \frac{2}{e} - 1\right)$.*
(4) *Se ν é o vetor normal à superfície definida por $F(x, y, z) = 0$ no ponto $(e^2 - e, e, e)$, então ν é ortogonal ao vetor $(1, 1, 1)$.*

Solução

(0) **Verdadeiro.**

$$F(e^2 - e, e, e) = (e^2 - e) \ln e + e \ln e - e^2 - (e^2 - e) \ln e + e^2 - e = 0.$$

(1) **Falso.**
A derivada parcial de F com respeito à variável z é

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} = \frac{x}{z} + \ln\ y - 2z.$$

Para $(x, y, z) = (e^2 - e, e, e)$, temos

$$\frac{\partial F(e^2 - e, e, e)}{\partial z} = \frac{e^2 - e}{e} + \ln\ e - 2e = -e.$$

(2) **Falso.**
Dizemos que z está definida implicitamente pela equação $F(x, y, z) = 0$ se $z = f(x, y)$.
O teorema da função implícita determina condições sob as quais uma relação como $F(x, y, z) = 0$ defina z em função de (x, y).
Dado que $F, \partial F/\partial x, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ são contínuos sobre uma bola contendo o ponto

$(e^2 - e, e, e) = 0$, *e dos itens* 0 *e* 1

$$F(e^2 - e, e, e) = 0 \qquad e \qquad \frac{\partial F(e^2 - e, e, e)}{\partial z} \neq 0,$$

Então, pelo teorema da função implícita z está definida implicitamente como função de (x, y) ao rededor do ponto $(e^2 - e, e, e)$.

3 **Verdadeiro.**

As derivadas parciais de F são

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x} = \ln z - \ln y + 1,$$
$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y} = \frac{z}{y} - \frac{x}{y},$$
$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z} = \frac{x}{z} + \ln y - 2z.$$

Para $(x, y, z) = (e^2 - e, e, e)$, temos

$$\frac{\partial F(e^2 - e, e, e)}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial F(e^2 - e, e, e)}{\partial y} = 2 - e, \qquad \frac{\partial F(e^2 - e, e, e)}{\partial z} = -e.$$

Assim,

$$\frac{\partial z(e^2 - e, e)}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(e^2 - e, e, e)}{\frac{\partial F}{\partial z}(e^2 - e, e, e)} = \frac{-1}{-e} = \frac{1}{e},$$
$$\frac{\partial z(e^2 - e, e)}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}(e^2 - e, e, e)}{\frac{\partial F}{\partial z}(e^2 - e, e, e)} = -\frac{2 - e}{-e} = \frac{2}{e} - 1.$$

4 **Falso.**

O vetor normal á superfície $F(x, y, z) = 0$, no ponto $(e^2 - e, e)$ é

$$\nu = \Big(\frac{\partial z(e^2 - e, e)}{\partial x}, \frac{\partial z(e^2 - e, e)}{\partial y}, -1\Big) = \Big(\frac{1}{e}, \frac{2}{e} - 1, -1\Big).$$

Agora

$$\Big(\frac{1}{e}, \frac{2}{e} - 1, -1\Big)(1, 1, 1) = \frac{1}{e} + \frac{2}{e} - 1 - 1 = \frac{3}{e} - 2.$$

Exercício 81 (ANPEC 2020, Questão 6). *Considere a transformação linear* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definida por*

$$f(x, y) = (2x + y, x + 2y, x + y).$$

Julgue as seguintes afirmativas:

(0) f *é uma transformação linear injetora.*

(1) f *é uma transformação linear sobrejetora.*

(2) *Os vetores* $(2, 1, 1)$ *e* $(1, 2, 1)$ *formam uma base para a imagem de* f.

(3) *A matriz associada à transformação linear* f *tem posto (rank) menor do que o posto da matriz jacobiana (denotada por* $Jf(x, y)$*) de* f *em todo ponto* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(4) *Considere a função* $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *definida por* $h(r, s, t) = r^2 + s^2 + t^2$. *A composta* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por* $g(x, y) = h(f(x, y))$ *satisfaz*

$$Jg(x, y) = (4x + 2y \;\; 2x + 4y \;\; 2x + 2y) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solução

(0) **Verdadeiro.**

Sejam (x_1, y_1) *e* $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, *tal que*

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$$
$$(2x_1 + y_1, x_1 + 2y_1, x_1 + y_1) = (2x_2 + y_2, x_2 + 2y_2, x_2 + y_2).$$

Então

$$2x_1 + y_1 = 2x_2 + y_2, \tag{18.2.1}$$

$$x_1 + 2y_1 = x_2 + 2y_2, \tag{18.2.2}$$

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2. \tag{18.2.3}$$

Subtraindo as equações (18.2.1) *e* (18.2.2), *temos*

$$x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \tag{18.2.4}$$

Somando as equações (18.2.3) *e* (18.2.4)*, obtemos* $x_1 = x_2$*. Da equação* (18.2.1)*, juntamos* $y_1 = y_2$*. Portanto* f *é injetora.*

(1) **Falso.**

Seja $(1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$*, então*

$$2x + y = 1 \tag{18.2.5}$$

$$x + 2y = 0 \tag{18.2.6}$$

$$x + y = 0 \tag{18.2.7}$$

De (18.2.6) *e* (18.2.7)*, temos que* $x = y = 0$*, logo da equação* (18.2.5) *obtemos* $0 = 1$ *(absurdo!).*
Portanto não existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $f(x, y) = (1, 0, 0)$.

(2) **Verdadeiro.**

A imagem de f *é*

$$Im(f) = \{(2x + y, x + 2y, x + y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

Denotemos $B = \{(2, 1, 1), (1, 2, 1)\}$.
Devemos mostrar que os vetores de B *são linearmente independente e que geram* $Im(f)$*.*

(i) *Linearmente independente*
Sejam α *e* $\beta \in \mathbb{R}$*, e consideremos*

$$\alpha(2, 1, 1) + \beta(1, 2, 1) = 0.$$

Então, $\alpha = 0$ *e* $\beta = 0$*, isto é, a equação anterior só tem a solução trivial.*

(ii) *O conjunto* B *gera* $Im(f)$
Seja $(2x + y, x + 2y, x + y) \in Im(f)$*. Logo*

$$(2x + y, x + 2y, x + y) = x(2, 1, 1) + y(1, 2, 1).$$

Então o conjunto B gera a $Im(f)$.

De (**i**) *e* (**ii**), *o conjunto B é uma base para a imagem de f.*

③ **Falso.**

A matriz jacobiana de f é

$$Jf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(2x+y)}{\partial x} & \frac{\partial(2x+y)}{\partial y} \\ \frac{\partial(x+2y)}{\partial x} & \frac{\partial(x+2y)}{\partial y} \\ \frac{\partial(x+y)}{\partial x} & \frac{\partial(x+y)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz da transformação linear f é

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que $M = Jf(x,y)$. Então, o posto da matriz associado à transformação linear f é igual ao posto da matriz jacobiana.

④ **Verdadeiro.**

$$g(x,y) = (2x+y)^2 + (x+2y)^2 + (x+y)^2$$

Note que $Jg(x,y) = \nabla\, g(x,y) = (\partial g/\partial x, \partial g/\partial y)$.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2(4x+2y) + 1(2x+4y) + 1(2x+2y)$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = 1(4x+2y) + 2(2x+4y) + 1(2x+2y)$$

$$Jg(x,y) = (4x+2y \quad 2x+4y \quad 2x+2y) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercício 82 (ANPEC 2020, Questão 12). *Julgue a veracidade das afirmações abaixo;*

0 *Considere a função* $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}+1} + \frac{y}{x}$*, em que* $x > 0$ *e* $y > 0$*. Existem* $a > 0$ *e* $b > 0$ *tais que* $\big\langle (a,b), \nabla f(a,b) \big\rangle > 0$.

1 *Dada a função* $f(x,y) = xe^{\frac{x}{y}}$*, todo plano tangente ao gráfico de* f *contém a origem.*

2 *Dada a função* $f(x,y) = \frac{2y\ln(1+x)}{y^2+\ln^2(1+x)}$*, a curva de nível* $C(1) = \{(x,y) \in D_f : f(x,y) = 1\}$ *coincide com o gráfico da função* $h(x) = \ln(1+x), x > -1$.

3 *Dada* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^1 *e um ponto* $x \in \mathbb{R}^n$ *tal que o gradiente* $\nabla f(x)$ *é não nulo, o vetor* $\nabla f(x)$ *indica a direção de maior crescimento da função* f *a partir do ponto* x.

4 *Considere a curva derivável* $\gamma : (a,b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$*, a função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *de classe* C^1 *e* $f(\gamma(t)) = c \in \mathbb{R}$*, para todo* $t \in (a,b)$*. Então os vetores* $\nabla f(\gamma(t))$ *e* $(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))$ *são ortogonais para todo* $t \in (a,b)$.

Solução

0 **Falso.**

O gradiente

$$\nabla f(x,y) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\Big) = \Big(\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}+1} - \frac{y}{x^2}, -\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}+1} + \frac{1}{x}\Big).$$

Logo, $\langle (a,b), \nabla f(a,b) \rangle = 0$*. Para todo* $a > 0$ *e* $b > 0$.

1 **Verdadeiro.**

O vetor normal à superfície $f(x,y)$ *no ponto* (x_0, y_0) *é*

$$\vec{N} = \Big(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}, -1\Big) = \Big(e^{\frac{x_0}{y_0}} + \frac{x_0}{y_0}\, e^{\frac{x_0}{y_0}}, -\frac{x_0^2}{y_0^2}\, e^{\frac{x_0}{y_0}}, -1\Big).$$

Logo, a equação do plano tangente à superfície $f(x, y)$ no ponto (x_0, y_0) é dado por

$$\begin{aligned}
\vec{N}.\Big((x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)\Big) &= 0\\
\vec{N}.(x,y,z)-\vec{N}.(x_0,y_0,z_0) &= 0\\
\vec{N}.(x,y,z)-\left(\left(e^{\frac{x_0}{y_0}}+\frac{x_0}{y_0}\,e^{\frac{x_0}{y_0}},-\frac{x_0^2}{y_0^2}\,e^{\frac{x_0}{y_0}},-1\right).(x_0,y_0,z_0)\right) &= 0\\
\vec{N}.(x,y,z)-x_0\,e^{\frac{x_0}{y_0}}-\frac{x_0^2}{y_0}\,e^{\frac{x_0}{y_0}}+\frac{x_0^2}{y_0}\,e^{\frac{x_0}{y_0}}+z_0 &= 0\\
\vec{N}.(x,y,z) &= 0.
\end{aligned}$$

Assim, todo plano tangente ao gráfico de f contem a origem.

2 **Falso.**

Note que $(0, 0) \notin Dom(f)$, dado que $C(1) C Dom(f)$, então $(0, 0) \notin C(1)$. O ponto $(0, 0)$ pertence ao gráfico da função $h(x)$, já que $h(0) = \ln(1) = 0$. Portanto, a curva de nível $C(1)$ não coincide como gráfico da função h.

3 **Verdadeiro.**

Dado que

$$\frac{\partial f(x)}{\partial \vec{u}} = \nabla f(x).\vec{u} = \|\nabla f(x)\|.\|\vec{u}\|\cos\theta = \|\nabla f(x)\|\cos(\theta).$$

Para que $\partial f(x)/\partial \vec{u}$ seja máximo o $\cos(\theta) = 1$, então

$$\frac{\partial f(x)}{\partial \vec{u}} = \nabla f(x).\vec{u} = \|\nabla f(x)\|.$$

Logo, a direção de máximo crescimento, no ponto x, é

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$$

Portanto, o vetor $\nabla f(x)$ indica a direção de máximo crescimento da função f a partir do ponto x.

(4) **Verdadeiro.**

Denotemos

$$g(t) = f(\gamma(t)) = C$$

$$\begin{aligned}\frac{dg(t)}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial \gamma_1}, \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \gamma_2}, \frac{\partial \gamma_2}{\partial t} = 0\\ &= \Big(\frac{\partial f}{\partial \gamma_1}, \frac{\partial f}{\partial \gamma_2}\Big).\Big(\frac{\partial \gamma_1}{\partial t}, \frac{\partial \gamma_2}{\partial t}\Big) = 0\\ &= \nabla f(\gamma).(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)) = 0.\end{aligned}$$

EXERCÍCIO 83 (ANPEC 2020, Questão 15). *Suponha que queremos otimizar $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, sujeito à seguinte restrição: $x^4 + y^4 + z^4 = 1$. Sejam M e m os valores máximo e mínimo de f na restrição. Calcule $M^2 + m^2$.*

Solução

Resposta 4

Vamos usar o método dos multiplicadores de Lagrange (note que o domínio em questão já é do tipo fronteira, não tem interior, caso contrário teríamos de começar por determinar os pontos críticos de f no interior do domínio).

Seja $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / g(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 = 1\}$ o domínio da função f. Note que $\nabla g(x,y,z) \neq (0,0,0)$ para todo $(x,y,z) \in D$. Como D é um subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}^3$, e f é contínua, então pelo teorema de Weierstrass, f tem máximo e mínimo absolutos em D, e os pontos onde eles ocorrem têm, necessariamente, de ser soluções do sistema de Lagrange:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z), \\ g(x,y,z) = 1. \end{cases}$$

Assim

$$\begin{cases} x(1 - \lambda x^2) = 0 \\ y(1 - \lambda y^2) = 0 \\ z(1 - \lambda z^2) = 0 \\ x^4 + y^4 + z^4 = 1 \end{cases}$$

Das três primeiras equações, do sistema anterior, temos os possíveis valores para x, y e z:

(i) $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ *(v)* $(x, y, z) = (\pm\frac{1}{\sqrt{\lambda}}, 0, 0)$
(ii) $(x, y, z) = (0, 0, \pm\frac{1}{\sqrt{\lambda}})$ *(vi)* $(x, y, z) = (\pm\frac{1}{\sqrt{\lambda}}, 0, \pm\frac{1}{\sqrt{\lambda}})$
(iii) $(x, y, z) = (0, \pm\frac{1}{\sqrt{\lambda}}, 0)$ *(vii)* $(x, y, z) = (\pm\frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \pm\frac{1}{\sqrt{\lambda}}, 0)$
(iv) $(x, y, z) = (0, \pm\frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \pm\frac{1}{\sqrt{\lambda}})$ *(viii)* $(x, y, z) = (\pm\frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \pm\frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \pm\frac{1}{\sqrt{\lambda}})$
Agora, utilizamos a quarta equação, do sistema de equações, para determinar λ
(i) Não cumpre a equação *(v)* $(x, y, z) = (\pm 1, 0, 0)$
(ii) $(x, y, z) = (0, 0, \pm 1)$ *(vi)* $(x, y, z) = (\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}})$
(iii) $(x, y, z) = (0, \pm 1, 0)$ *(vii)* $(x, y, z) = (\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0)$
(iv) $(x, y, z) = (\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0)$ *(viii)* $(x, y, z) = (\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}})$
para estos pontos temos
(i) Não é extremante local *(v)* $f(\pm 1, 0, 0) = 1$
(ii) $f(0, 0, \pm 1) = 1$ *(vi)* $f(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}) = \frac{2}{\sqrt{2}}$
(iii) $f(0, \pm 1, 0) = 1$ *(vii)* $f(0, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}) = \frac{2}{\sqrt{2}}$
(iv) $f(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0) = \frac{2}{\sqrt{2}}$ *(viii)* $f(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}) = \frac{3}{\sqrt{3}}$
Logo, o máximo $M = \frac{3}{\sqrt{3}}$ *e o mínimo* $m = 1$.
Portanto $M^2 + m^2 = 4$.

Exercício 84 (ANPEC 2019, Questão 7). *Considere a função* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, *definida por* $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = -(x_1)^2 + \sum_{k=1}^{4}(-x_k)^k$, *e verifique a veracidade das seguintes afirmações:*

0. *Seja* $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$ *um ponto no* $\mathbb{R}^4$ *. Para que* $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^4$ *seja um ponto crítico é necessário que* $-2x_1^* - 1 = 2x_2^* = -3(x_3^*)^2 = 4(x_4^*)^3 = 0$.
1. *A matriz Hessiana* H *de* f *no ponto* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ *é*
$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4x_4 \end{pmatrix}.$$
2. *A matriz Hessiana* H *de* f *é indefinida em* R^4.
3. f *possui um máximo local em* $\mathbf{x}^* = (1, 0, 0, 0)$.

4 *O determinante da matriz Hessiana de f é positivo para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, isto é,* $\det H_f(\mathbf{x}) > 0$.

Solução

0 **Verdadeiro.**

A função

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1^2 - x_1 + x_2^2 - x_3^3 + x_4^4.$$

Se x^* é um ponto crítico então

$$\begin{aligned}\nabla f(x^*) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*), \frac{\partial f}{\partial x_3}(x^*), \frac{\partial f}{\partial x_4}(x^*)\right) = (0,0,0,0),\\ &= (-2x_1^* - 1, 2x_2^*, -3x_3^{*^2}, 4x_4^{*^3}) = (0,0,0,0).\end{aligned}$$

1 **Falso.**

A matriz Hessiana

$$H(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_4}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_4}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^3}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x^3 \partial x_4}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_4 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_4 \partial x_2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_4 \partial x_3}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_4^2}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12x_4^2 \end{bmatrix}$$

2 **Verdadeiro.**

Seja $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \neq (0,0,0,0)$ então

$$yH(x)y^T = -2y_1^2 + 2y_2^2 - 6x_3y_3^2 + 12x_4^2y_2^2.$$

$$\textit{para} \quad y = (1,0,0,0) \;\; \textit{temos} \;\; yH(x)y^T = -2 < 0,$$

$$\textit{para} \quad y = (0,1,0,0) \;\; \textit{temos} \;\; yH(x)y^T = 2 > 0.$$

Portanto, a matriz Hessiana h é indefinida.

3 **Falso.**

Do item 0, temos

$$-2x_1^* - 1 = 2x_2^* = -3(x_3^*)^2 = 4(x_4^*)^2 = 0.$$

Logo $x_1^* = -1/2,\ x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$. *Portanto o único candidato a extremante local é* $(-1/2, 0, 0, 0)$.

(4) **Falso.**
Do item (1), *temos* $\det(H(x)) = 288 x_3 x_4^2$.
Para $x = (0,0,0,0)$ *tem-se* $\det(H(x)) = 0$.

Exercício 85 (ANPEC 2019, Questão 12). *Considere o problema do investidor que pode investir os pesos* w_1 *e* w_2 *de sua riqueza em dois instrumentos financeiros arriscados. Suas preferências implicam que ele quer maximizar a função*

$$U(w_1, w_2) = 1,15w_1 + 1,2w_2 - 0,5(0,04w_1^2 + 0,09w_2^2).$$

Sujeita às restrições:

$$w_1 + w_2 = 1,$$

$$w_1 \geq 0 \quad e \quad w_2 \geq 0.$$

Indique abaixo os itens verdadeiros e os falsos:

(0) *A função* U *é homogênea de grau* 1.
(1) *O gradiente de* U *é* $\left(\frac{115}{100} - \frac{4}{100}w_1, \frac{12}{10} - \frac{9}{100}w_2\right)$.
(2) *Seja* (w_1^*, w_2^*) *a solução do problema de maximização com restrições acima. Se* $w_1^* > 0$ *e* $w_2^* > 0$, *então o vetor gradiente de* U *em* (w_1^*, w_2^*) *deve ser perpendicular à reta definida pela equação* $w_1 + w_2 = 1$.
(3) *A derivada direcional de* U *no ponto* $\left(\frac{100}{4}, \frac{100}{9}\right)$ *e na direção* $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *é* $\frac{45}{100}\sqrt{2}$.
(4) *A solução do problema de maximização com restrição acima é* $(w_1^*, w_2^*) = (0, 1)$, *ou seja, o investidor prefere investir todo o seu dinheiro em apenas um instrumento financeiro.*

Solução

(0) **Falso.**
(1) **Verdadeiro.**

(2) **Verdadeiro.**
(3) **Falso.**
(4) **Verdadeiro.**

EXERCÍCIO 86 (ANPEC 2018, Questão 7). *Verifique a veracidade das questões abaixo, em que* **C** *é o valor emprestado,* **M** *é o montante final,* **n** *é o número de períodos do empréstimo e* **r** *é a taxa de juros:*

(0) *A expansão em Taylor em primeira ordem de $M(r) = C(1+r)^n$, em torno de $r = 0$, é $P_1(r) = C(1+rn)$. Isto significa que, para taxas de juros suficientemente baixas, é pequena a diferença de considerar r como sendo juros simples ou juros compostos;*

(1) *Considere $r = 10\%$ ao ano como uma taxa de juros compostos com capitalização por segundo, ou seja, considere que*

$$M = C\left(1 + \frac{r}{365 \times 24 \times 60}\right)^{365\times 24\times 60}.$$

Neste caso, temos que $M \approx Ce^r$;

(2) *Seja $S_n = \sum_{k=1}^{n} ab^k$. Temos que $S_n = a^n\left(\frac{b^{n+1}-b}{b-1}\right)$. Além disto, uma das formas para se chegar a esta igualdade é perceber que $bS_n - S_n = ab^{n+1} - ab$;*

(3) *Considere um instrumento financeiro que pagará $R\$100,00$ por ano para sempre, a partir do próximo ano (ou seja, uma perpetuidade). Se a taxa de juros efetiva é de $r = 5\%$ ao ano, o preço que pagarei por este fluxo de caixa é $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{100}{(1+r)^k} = \frac{100}{r} = 2000$;*

(4) *Para $r > 0$ e $n > 1$, temos que $(1+r)^n > 1 + rn$.*

Solução

(0) **Verdadeiro.**
(1) **Verdadeiro.**
(2) **Falso.**
(3) **Verdadeiro.**

(4) **Verdadeiro.**

EXERCÍCIO 87 (ANPEC 2018, Questão 10). *Considere a função*

$$f(x,y,z) = \frac{xy^2z + x^2z^2 + \frac{y^6}{x^2}}{yz + xz + y^2}$$

e a direção $\vec{u} = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$. *Calcule a derivada direcional de* f *na direção* $\vec{u}$ *no ponto* $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Solução

Resposta. *2*

$$f(x,y,z) = \frac{x^3y^2z + x^4z^2 + y^6}{x^2yz + x^3z + x^2y^2}.$$

A função f *é homogênea de grau 2, dado que* $f(tx,ty,tz) = t^2f(x,y,z)$. *Pela identidade de Euler, obtemos*

$$\nabla f(x,y,z).(x,y,z) = 2f(x,y,z). \tag{18.2.8}$$

A derivada direcional de f *na direção* $\vec{\mu}$ *é dado por*

$$D_{\vec{\mu}}f(\vec{\mu}) = \nabla f(\vec{\mu}).\frac{\vec{\mu}}{\parallel \vec{\mu} \parallel} \tag{18.2.9}$$

Das equações (18.2.8) *e* (18.2.9), *juntamos*

$$D_{\vec{\mu}}f(\vec{\mu}) = 2\frac{f(\vec{\mu})}{\parallel \vec{\mu} \parallel} = 2.\frac{3}{3} = 2.$$

EXERCÍCIO 88 (ANPEC 2018, Questão 11). *Verifique a veracidade das próximas questões, considerando que*

$$f(x,y,z) = (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 :$$

(0) *A direção de máximo crescimento de* $f(x,y,z)$ *em* $(0,0,1)$ *é* $(0,0,1)$;

(1) *A matriz Hessiana de* f *é diagonal;*

(2) *O ponto* $(2,2,2)$ *é um máximo global de* $f(x,y,z)$;

(3) *Se* $\vec{\nu} = (0,1,0)$*, então a derivada direcional de* f *na direção* $\vec{\nu}$ *no ponto* $(3,2,2)$ *é zero;*

(4) *Se* $g(x,y,z,w) = w^2 f(x,y,z)$*, então* g *é uma função homogênea de grau* 2*.*

Solução

(0) **Falso.**

Lembrei que

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial \vec{u}} = \nabla f(x,y).\vec{u} = \| \nabla f(x,y)\| \|\vec{u}\| \cos(\theta) = \| \nabla f(x,y)\| \cos(\theta).$$

Para que $\frac{\partial f(x,y)}{\partial \vec{u}}$ *seja máximo o* $\cos(\theta) = 1$*, então*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial \vec{u}} = \nabla f(x,y).\vec{u} = \| \nabla f(x,y)\|.$$

Logo, a direção de máximo crescente, no ponto (x,y)*, é*

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(x,y)}{\| \nabla f(x,y)\|}.$$

Calculemos o gradiente.

$$\nabla f(x,y,z) = (2(x-2), 2(y-2), 2(z-2).$$

Então para $(x,y,z) = (0,0,1)$*, temos*

$$\vec{u} = (-4,-4,-2) \neq (0,0,1).$$

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Falso.**

(3) **Verdadeiro.**

(4) **Falso.**

Exercício 89 (ANPEC 2018, Questão 13). *Seja* $f(x,y) = xy$ *e* $g(x,y) = \alpha x + \beta y$*, em que* α *e* β *são estritamente maiores que zero. Seja* $a > 0$ *e considere o* *problema de otimização*

$$\max_{x,y} f(x,y)$$
$$s.a$$
$$x \geq 0 \ \ e \ \ y \geq 0$$
$$g(x,y) \leq a.$$

Identifique abaixo quais são as questões verdadeiras e quais são as falsas:

- (0) *Podemos garantir que a restrição $g(x,y) \leq a$ é inativa para a solução do problema acima, para quaisquer valores estritamente positivos de a, α e β;*
- (1) *Podemos garantir que a restrição $x \geq 0$ é inativa para a solução do problema acima, para quaisquer valores estritamente positivos de a, α e β;*
- (2) *Se $g(x,y) = 2x + y$, então a solução é $(x^*, y^*) = \left(\frac{a}{4}, \frac{a}{2}\right)$;*
- (3) *Se $g(x,y) = 2x + y$, então da $\frac{d}{da} f(x^*(a), y^*(a)) = \frac{a}{8}$;*
- (4) *Se a solução do problema satisfizer $g(x^*, y^*) - a = 0$, então teremos que o gradiente de f e o gradiente de g em (x^*, y^*) são perpendiculares.*

Solução

- (0) **Falso.**
- (1) **Verdadeiro.**
- (2) **Verdadeiro.**
- (3) **Falso.**
- (4) **Falso.**

Exercício 90 (ANPEC 2017, Questão 5). *Considere o conjunto $C = \{(x,y) \in R^2; 2x - y + 2 \geq 0, x^2 + 2x + y - 2 \leq 0, x^2 - 2x - 4y - 3 \leq 0\}$. O objetivo é maximizar a função $f(x,y) = ax + by$, em que $a, b \in R$, $(a,b) \neq (0,0)$ no conjunto C. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas?*

- (0) *O conjunto C contém $\{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$;*
- (1) *Se $a = 3$ e $b = 1$, então a solução é $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$;*
- (2) *Para qualquer $(a,b) \neq (0,0)$, a solução está na fronteira de C;*

③ *Se* $a = -1$ *e* $b = -2$*, então a solução é* $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$;

④ *Se* $a = -2$ *e* $b = 1$*, então o valor máximo de* $f(x, y)$ *em* C *é* 3.

Solução

⓪ **Falso.**

① **Verdadeiro.**

② **Verdadeiro.**

③ **Verdadeiro.**

④ **Falso.**

EXERCÍCIO 91 (ANPEC 2017, Questão 6). *Considere o sistema em* $\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = -10y - x^3 - x^5$.
Encontre $\frac{1}{-y^2}\frac{d}{dt}F(x(t), y(t))$*, em que* $x(t), y(t)$ *é a solução do sistema acima e* $F(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6}$.

Solução

Resposta 10

EXERCÍCIO 92 (ANPEC 2017, Questão 8). *Dada a função* $f(x, y) = x^2 \ln y + y^3 e^x + 3x + 2y$*, quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas?*

⓪ *No ponto* $(x, y) = (1, 1)$ *a direção* $(-3, 1)$ *é uma direção de crescimento da função* f*;*

① *No ponto* $(x, y) = (0, 1)$ *a direção* $(4, 5)$ *é a direção de máximo incremento da função* f*;*

② *A função* f *tem um máximo relativo interior no seu domínio;*

③ *Ao longo do eixo vertical (quando* $x = 0$*) a direção horizontal à direita (ou seja,* $(1, 0)$*) é a direção de máximo incremento de* f *;*

④ *Em todo ponto do domínio a função* f *é crescente em ambas variáveis.*

Solução

⓪ **Falso.**

① **Verdadeiro.**

2) **Falso.**
3) **Falso.**
4) **Falso.**

Exercício 93 (ANPEC 2017, Questão 12). *No seguinte problema de maximização:*

$$\max_{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0} \left(x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}}\right)^a - x_1 - x_2.$$

É correto afirmar:

0) *Se $a \in (0,1)$, a função objetivo desse problema é estritamente convexa;*
1) *Se $a = 1$, o valor máximo atingido no problema é $\frac{1}{2}$;*
2) *Se $a = 1,5, (x_1, x_2) = \left(\frac{9}{4}, \frac{9}{4}\right)$ é ponto crítico da função objetivo do problema;*
3) *Se $a = 2$, o problema não tem solução;*
4) *Se $a = 3$, a solução do problema é $(x_1, x_2) = (36, 36)$.*

Solução

0) **Falso.**
1) **Verdadeiro.**
2) **Falso.**
3) **Verdadeiro.**
4) **Falso.**

Exercício 94 (ANPEC 2016, Questão 9). *Em relação a funções de R_+^n em R podemos afirmar:*

0) *Se f é diferenciável e homogênea de grau r, então ∇f tem componentes que são funções homogêneas de grau $r - 1$;*
1) *Se existe $r \in R$ tal que $x \cdot \nabla f(x) = rf(x)$ para todo $x \in R_+^n$, então f é homogênea de grau r;*
2) *Soma ou diferença de funções homogêneas é uma função homogênea;*

(3) *Se f é homogênea de grau r e para $w \in R^n_{++}$ (isto é, $w = (w_1, ..., w_n)$ com $w_1 > 0$, para $1 \leq i \leq n$) fixo definimos a função de R_+ em $R : c(q) = min\{wx/f(x) = q\}$, então a função $c(q)$ também é homogênea de grau r;*

(4) *Se f é diferenciável e homogênea de grau r e $y = f(x)$, então a soma das elasticidades de y em relação a cada um dos $x_i (1 \leq i \leq n)$ é igual a r, onde $x = (x_1, ..., x_n)$.*

Solução

(0) **Verdadeiro.**

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Falso.**

(3) **Falso.**

(4) **Verdadeiro.**

Exercício 95 (ANPEC 2016, Questão 12). *Considere o problema de maximizar $f(x, y) = ax + y$ com $a > 0$, sujeito às restrições: $x + y - 5 \leq 0, y \leq 2$. Julgue as seguintes afirmativas:*

(0) *Se $a < 1$, então a solução é $(x, y) = (5, 2)$.*

(1) *Se $a > 1$, então a solução é $(x, y) = (0, 5)$.*

(2) *Se $a = 1$, então a solução é única e satisfaz: $x + y = 5, 3 \leq x \leq 5$.*

(3) *Se a primeira restrição acima mudasse para $bx + y - 5 \leq 0$, com $0 < b < 1$, então a solução seria $(x, y) = (3, 5)$.*

(4) *Se no item anterior tivermos $0 < b < a < 1$, então a solução seria $(x, y) = (\frac{5}{b}, 0)$.*

Solução

(0) **Falso.**

(1) **Falso.**

(2) **Falso.**

(3) **Falso.**

(4) **Falso.**

Exercício 96 (ANPEC 2016, Questão 14). *Considere a função* $f : R^2 \to R$, *dada por* $f(x, y) = xe^{-y} + 3y$.

Julgue as seguintes afirmativas:

(0) *A taxa de variação de* f *em* $(1, 0)$ *é máxima na direção do vetor* $\nu = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

(1) *A taxa de variação máxima de* f *em* $(1, 0)$ *é* 2;

(2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - 3$, *para todo* $(x, y) \in R^2$.

(3) *Se* $x(t) = 2t + 1$ *e* $y(t) = t^3$, *então* $\frac{dz}{dt} = 2$, *em* $t = 0$, *em que* $z = f(x, y)$;

(4) *Se* $g(x, y) = xe^{-y}$, *então os pontos da curva de nível um de* g *satisfazem à equação* $y = \ln x$.

Solução

(0) **Falso.**

(1) **Falso.**

(2) **Verdadeiro.**

(3) **Verdadeiro.**

(4) **Verdadeiro.**

Exercício 97 (ANPEC 2015, Questão 5). *A equação* $x^2 - xy^3 + y^5 = 17$ *define* y *como função de* $x(y = y(x))$, *numa vizinhança do ponto* $(x_0, y_0) = (5, 2)$. *Ao fazermos a aproximação linear de* $y(x)$ *em torno desse ponto teremos* $y(x) \approx mx + n$. *Calcular* $10m + 2n$.

Solução

Resposta 4

Exercício 98 (ANPEC 2015, Questão 6). *Considere o seguinte problema de otimização com restrições: a função objetivo* $f : R^2_+ \to R$ *e contínua e o conjunto* *de restrições é um conjunto convexo C, contido no domínio da função f. Julgue as seguintes afirmativas:*

(0) *Se C for um conjunto ilimitado, então o problema de otimização restrita nunca tem solução;*

(1) *Se o gradiente da função objetivo for constante em todo seu domínio, então se houver uma solução ela tem que estar na fronteira de C;*

(2) *Se a função objetivo já tiver um ótimo (ponto de máximo ou mínimo), então ele será a solução do problema com restrições;*

(3) *Se o conjunto C não for compacto, então o problema de otimização restrita nunca terá uma solução;*

(4) *Seja C o conjunto $c = \{(x, y) \in R^2_+ : ax + by \leq c\}$, com a, b, c não negativos. Se $c > 0$ e pelo menos uma das outras constantes for zero, então o problema de otimização nunca terá uma solução.*

Solução

(0) **Falso.**

Um contraexemplo é a função $f : R^2_+ \to R$ definida por $f(x) = 2$, onde o conjunto convexo e ilimitado é $C = R^2_+$. Esta função tem solução.

(1) **Falso.**

(2) **Falso.**

(3) **Falso.**

(4) **Falso.**

Exercício 99 (ANPEC 2015, Questão 9). *Seja $f : D \to R$ a função definida por $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$, em que*

$$D = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 3 \;\; e \;\; 0 \leq y \leq 2\}.$$

(0) *A função f possui um único ponto de mínimo em D;*

(1) $(1, 1)$ *é ponto de mínimo local de f em D;*

(2) *O valor máximo absoluto da função em D é 9;*

(3) *O máximo é atingido na fronteira de D;*

4. *A função é côncava em D.*

Solução

0. **Falso.**
1. **Falso.**
2. **Verdadeiro.**
3. **Verdadeiro.**
4. **Falso.**

EXERCÍCIO 100 (ANPEC 2014, Questão 1). *Analisar a veracidade das seguintes afirmações:*

0. *Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções injetoras, então $g \circ f$ é injetora.*
1. *Se $f(f(x)) = x$ para todo x no domínio de f, então f deve ser a função identidade.*
2. *A função $f(x) = \min\{x + 1, (x/2) + 2\}$ é uma função bijetora de R em R.*
3. *A soma de funções injetoras é uma função injetora.*
4. *A função $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ é bijetora se e só se $ad \neq bc$.*

Solução

0. **Verdadeiro.**

   Sejam $a_1, a_2 \in A$ tal que

$$g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2),$$
$$g(f(a_1)) = g(f(a_2)).$$

   Dado que g é injetiva, então $f(a_1) = f(a_2)$. Logo, já que f é injetiva, temos $a_1 = a_2$. Portanto, $g \circ f$ é injetivo.

1. **Falso.**

   Definamos a função $f : \{1, 2\} \to \{1, 2\}$, dada por $f(1) = 2$ e $f(2) = 1$. Note que $f(f(1)) = f(2) = 1$ e $f(f(2)) = f(1) = 2$, isto é $f(f(x)) = x$ para todo x no domínio de f.

A aplicação f não é uma função identidade.

2 **Verdadeiro.**

(i) *Função injetiva.*

A função f é definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+1; & x<2 \\ 3; & x=2 \\ \frac{x}{2}+2; & x>2 \end{cases} = \begin{cases} x+1<3 \\ 3 \\ \frac{x}{2}+1>3 \end{cases}$$

Sejam $x_1, x_2 \in R$, tal que $x_1 \neq x_2$, então imediatamente temos $f(x_1) \neq f(x_2)$.

(i) *Função sobrejetora.*

Seja y na imagem de f, então $y = x+1$ ou $y = x/2+2$. Se $y = x+1$, então $x = 1-y$, logo f é sobrejetora. Se $y = x/2+2$, então $x = 2y-4$, assim f é sobrejetiva .

Portanto, f é sobrejetiva.

De (**i**) *e* (**ii**), *temos que f é bijetora.*

3 **Falso.**

Definamos as funções $f : \{1,2\} \to \{1,2\}$ e $g : \{1,2\} \to \{1,2\}$, dadas por $f(1) = 1, f(2) = 2, g(1) = 2$ e $g(2) = 1$. A soma dadas funções f e g é dada por $f+g : \{1,2\} \to \{1,2\}$, definida por $(f+g)(1) = f(1)+g(1) = 3$ e $(f+g)(2) = f(2)+g(2) = 3$. Assim, a função $f+g$ não é injetora, já que $(f+g)(1) = (f+g)(2)$ e $1 \neq 2$.

4 **Verdadeiro.**

(i) *Função injetora.*

Sejam (x_1, y_1) *e* (x_2, y_2) *em* R^2*, tal que*

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$$
$$(ax_1 + by_1, x_1 + dy_1) = (ax_2 + by_2, cx_2 + dy_2)$$

$$(a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2), c(x_1 - x_2) + d(y_1 - y_2) = (0, 0)$$

Logo

$$a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 0$$
$$c(x_1 - x_2) + d(y_1 - y_2) = 0$$

Assim

$$ad(x_1 - x_2) + bd(y_1 - y_2) = 0$$
$$cd(x_1 - x_2) + bd(y_1 - y_2) = 0$$

Subtraindo as duas ultimas equações

$$(ad - cd)(x_1 - x_2) = 0.$$

Dado que $ad - cd \neq 0$*, então* $x_1 = x_2$*.*

(i) *Função sobrejetora.*

Seja $(w, v) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $f(x, y) = (ax + by, cx + dy) = (w, v)$*. Então*

$$ax + by) = w$$
$$cx + dy = v.$$

Logo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}$$

Dado que $ad \neq bc$*, então*

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0,$$

assim, a matriz anterior tem inversa. Logo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}.$$

Portanto, a função f é sobrejetora.

De (**i**) *e* (**ii**)*, podemos concluir que f é bijetora.*

EXERCÍCIO 101 (ANPEC 2014, Questão 8). *Considere a função $z = f(x, y) = 6x^{1/2}\,y^{1/3}$. Analisar as seguintes afirmações:*

- (0) *A equação do plano tangente ao gráfico de $z = f(x, y)$ no ponto $x = 4$, $y = 1$ é $3x + 8y - 2z + 4 = 0$.*
- (1) *A reta perpendicular ao gráfico de $z = f(x, y)$ no ponto $x = 4$, $y = 1$ passa pelo ponto $(13, a.b)$. Então $b - a = -3$.*
- (2) *A equação da reta tangente à curva de nível de $z = f(x, y)$, que passa por $x = 9$ e $y = 8$, é $ax + by - 60 = 0$. Então $ab = 6$.*
- (3) *A partir do ponto $(x_0, y_0) = (1, 1)$, se seguirmos a direção do vetor $(-1, 1)$, a função f irá decrescer para variações infinitesimais de x e y.*
- (4) *O plano paralelo a $6x + 4y - 2z + 15 = 0$, que tangencia o gráfico de $z = f(x, y)$, o faz no ponto $(\bar{x}, \bar{y})$. Então $\bar{x} + \bar{y} = 6$.*

Solução

- (0) **Verdadeiro.**
- (1) **Falso.**
- (2) **Falso.**
- (3) **Verdadeiro.**

A derivada direcional de f, no ponto (x_0, y_0) e na direção $\vec{u}$ do vetor unitário é

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0).\vec{u}.$$

Primeiro calculemos o gradiente da função f, isto é

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(3y_0^{1/3}/x_0^{1/2}, 2x_0^{1/2}/y_0^{2/3}\right),$$

Para $x_0 = 1, y_0 = 1$, temos

$$\nabla f(1,1) = (3,2).$$

Agora, calculemos o vetor unitário

$$\vec{u} = \frac{(-1,1)}{\|(-1,1)\|} = \Big(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

Assim

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1) = (3,2)\Big(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

Dado que $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1) < 0$, então a função f decrescente na direção de $\vec{u}$.

(4) **Falso.**

Exercício 102 (ANPEC 2014, Questão 11). *Julgue as afirmativas:*

(0) *Seja $f : R^2 \to R$, definida por $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2$. f é homogênea de grau 4.*

(1) *Seja $f : R^2 \to R$, definida por $f(x,y) = x + e^{xy}$. O gradiente de f em $(0,1)$ é $\nabla f(0,1) = (2,0)$.*

(2) *Sejam $z = \ln(1 + x^2 + y^2); x = \cos\ t,\ y = \sin\ t$. Então $\frac{dz}{dt} = 0$, para todo $t \in R$.*

(3) *Seja $f : R^2 \to R$, definida por $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$. Então $(1,3)$ é ponto de mínimo absoluto em R^2.*

(4) *Sejam $f : R^2 \to R$ e $g : R^2 \to R$ definidas por $f(x,y) = 4x + 6y$ e $g(x,y) = x^2 + y^2$. Existem 2 pontos de máximo relativo de f sujeita à restrição $g(x,y) = 13$.*

Solução

(0) **Falso.**

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Verdadeiro.**

(3) **Verdadeiro.**

4 **Falso.**

EXERCÍCIO 103 (ANPEC 2014, Questão 13). *Encontre $x_0 + y_0$, em que (x_0, y_0) é a solução do seguinte problema de otimização:*

$$\max_{x,y}(x + 2y).$$

Sujeito à $2x^2 + y^2 = 18$.

Solução

Resposta 5

EXERCÍCIO 104 (ANPEC 2014, Questão 15). *Sabendo que a seguinte expressão corresponde à diferencial total de uma função $z = f(x, y)$, determine o valor da constante a.*

$$\left(3e^{3x} + \frac{y^a}{x}\right)dx + \left(2y \ln x + \frac{1}{y}\right)dy.$$

Solução

Resposta 2

EXERCÍCIO 105 (ANPEC 2013, Questão 9). *Considere a função $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+2y^2}$, se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(x, y) = 0$, se $(x, y) = (0, 0)$. Julgue as seguintes afirmativas:*

0 *A função f é contínua em $(0, 0)$.*

1 *A função f não é diferenciável em $(0, 0)$.*

2 *As derivadas parciais na origem existem e são nulas.*

3 *Existem todas as derivadas parciais de f e, portanto, f é diferenciável em (x, y), para todo $(x, y) \in R^2$.*

4 *Para todo $(x, y) \neq (0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.*

Solução

0 **Falso.**

Considere o conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}$. *Então, para* $(x, y) \in S$, *temos*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + 2y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3} \neq f(0,0) = 0.$$

Portanto, f *não é contínua em* $(0, 0)$.

1 **Verdadeiro.**

Teorema: *Se* f *fosse diferenciável no ponto* (x, y) *então* f *seria contínua nesse ponto. Do item anterior,* f *não é contínua em* $(0, 0)$, *então* f *não pode ser diferenciável no ponto* $(0, 0)$.

2 **Verdadeiro.**

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x + 0, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x, 0)}{\Delta x} = 0,$$
$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(0, \Delta y + 0) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(0, \Delta y)}{\Delta y} = 0.$$

3 **Falso.**

As derivadas parciais de f *existem, e são*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \begin{cases} 0, & se \ (x,y) = (0,0) \\ \frac{2y^3 - x^2 y}{(x^2+2y)^2}, & se \ (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \begin{cases} 0, & se \ (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^3 - 2xy^2}{(x^2+2y^2)^2}, & se \ (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

Do item *1*, f *não é diferenciável em* $(0, 0)$.

4 **Falso.**

Do item *3*, *e para* $(x, y) = (0, 1)$, *temos*

$$\frac{\partial f(0,1)}{\partial x} = \frac{1}{2} \neq \frac{\partial f(0,1)}{\partial y} = 0.$$

EXERCÍCIO 106 (ANPEC 2013, Questão 12). *Considere a função* $f(x_1, x_2) = (x_1^a + x_2^a)^{1/a}$, *em que* $a \in R - \{0\}$. *Analise a veracidade das seguintes afirmações:*

(0) *Se* $a \neq 1$ *então* $(x_1, x_2). \nabla f(x_1, x_2) = af(x_1, x_2)$.

(1) *Se* $a > 1$, *a maximização de* $f(x_1, x_2)$, *restrita a* $2x_1 + 3x_2 \leq 4, x_1 \geq 0$ *e* $x_2 \geq 0$, *resultará numa solução de fronteira.*

(2) *Se* $0 < a < 1$, *a função* $f(x_1, x_2)$ *é côncava em* $x_1 > 0$ *e* $x_2 > 0$.

(3) *O módulo da inclinação da reta tangente a qualquer curva de nível de* $f(x_1, x_2)$ *aumenta na medida que* x_1 *aumenta, se* $a > 1$.

(4) *O vetor gradiente de* $f(x_1, x_2)$ *é constante se e só se* $a = 1$.

Solução

(0) **Falso.**

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Verdadeiro.**

(3) **(A).**

(4) **Verdadeiro.**

EXERCÍCIO 107 (ANPEC 2013, Questão 14). *Resolva o seguinte problema de otimização:*

$\max_{x,y} x^2y^2$, *sujeito às restrições:* $2x + y \leq 2; x \geq 0; y \geq 0$.
Se $(\bar{x}, \bar{y})$ *é a solução deste problema, encontre* $12(\bar{x}^2\bar{y}^2)$.

Solução

Resposta 3

EXERCÍCIO 108 (ANPEC 2012, Questão 11). (0) *Seja* $f : R^2 \to R$ *diferenciável e* $z = f(x^2 + y^2, 2xy)$. *Se* $p = (1, 1)$, *então* $\frac{\partial z}{\partial x}(p) - \frac{\partial z}{\partial y}(p) = 2$.

(1) *Seja* $f : R^2 \to R$ *diferenciável e* $g : R^2 \times R^+ \to R$ *definida por* $g(x, y, z) = z^3 f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$. *Então* g *é uma função homogênea de grau 2.*

2. *Seja* $f : R^+ \times R^+ \to R$ *definida por* $f(x, y) = x^3 \ln y^2 + y^3 e^{\frac{x^2}{y^2}} - x^3 \ln x^2$. *Então para todo* $(x, y) \in R^+ \times R^+$, *tem-se que* $x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3f(x, y)$.
3. *Seja* $f : R^2 \times R^+ \to R$ *definida por* $f(x, y, z) = x \ln z + ze^y + x^2 - 5$. *Em uma vizinhança de* $p = (2, 0, 1)$ *a equação* $f(x, y, z) = 0$ *expressa* z *como uma função implícita de* x *e* y. *Além disso,* $4\frac{\partial z}{\partial y}(2, 0) - \frac{\partial z}{\partial x}(2, 0) = 0$.
4. *Seja* $f : R^2 \to R$ *diferenciável, tal que* $f \neq 0$ *e* $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. *Se* $g(x, y) = \frac{x}{f(x,y)}$, *então* $f\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\right) = 2$.

Solução

0. **Falso.**
1. **Falso.**
2. **Verdadeiro.**
3. **Verdadeiro.**
4. **Falso.**

EXERCÍCIO 109 (ANPEC 2012, Questão 15). *Seja* (x^*, y^*) *o ponto de* R^2 *que maximiza* $f(x, y) = x^2 y$ *sujeita à restrição* $2x^2 + y^2 \leq 9$. *Encontre* $a = [f(x^*, y^*)]^2$.

Solução

Resposta 27

EXERCÍCIO 110 (ANPEC 2011, Questão 9). *Seja* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável. Julgue as afirmativas:*

0. *Se* f *tem um mínimo local em* $p = (a, b)$, *então* $\nabla f(p) = (0, 0)$.
1. *Se* $H_f(x, y) = \begin{bmatrix} 3x^2 & -1 \\ -1 & 3y^2 \end{bmatrix}$ *é a matriz hessiana de* f *e* $(0, 0)$ *é um ponto crítico de* f, *podemos afirmar que* $(0, 0)$ *é ponto de mínimo de* f.
2. *Se* $\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0$, *para todo* $p \in \mathbb{R}^2$, *então* f *é a função constante.*
3. *Se* $|\nabla f(a, b)| \neq 0$ *e a derivada direcional de* f *no ponto* (a, b) *na direção do vetor unitário* u *é zero, então* $\nabla f(a, b)$*e* u *são paralelos.*

(4) *Se* $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$, *então a curva de nível* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = e\}$ *é uma circunferência centrada na origem de raio* 1.

Solução

(0) **Verdadeiro.**
(1) **Falso.**
(2) **Verdadeiro.**
(3) **Falso.**
(4) **Verdadeiro.**

EXERCÍCIO 111 (ANPEC 2011, Questão 10). *Seja* $X \subset \mathbb{R}^2$ *o conjunto limitado pelas retas* $r_1 : x = 0$, $r_2 : y = 0$, $r_3 : 4x + 3y - 40 = 0$ *e* $r_4 : x + 2y - 20 = 0$. *Seja* $p \in X$ *o ponto de máximo da função* $f : X \to \mathbb{R}$ *dado por* $f(x, y) = 2x + 5y$.
Julgue os seguintes itens:

(0) *No ponto* p, *o gradiente de* f *não é ortogonal a qualquer das retas* r_1, r_2, r_3 *e* r_4.
(1) *O valor da função* f *no ponto resultante da interseção das retas* r_2 *e* r_3 *é* 70.
(2) *O valor da função* f *no ponto resultante da interseção das retas* r_3 *e* r_4 *é* 48.
(3) $p = (10, 0)$.
(4) $f(p) = 50$.

Solução

(0) **Verdadeiro.**
(1) **Falso.**
(2) **Verdadeiro.**
(3) **Falso.**
(4) **Verdadeiro.**

Exercício 112 (ANPEC 2011, Questão 15). *$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis definidas por*

$$\begin{cases} f(x,y) = 4(x^2y^2 + 5) \\ g(x,y) = 2 - 2x - y. \end{cases}$$

Encontre o valor máximo da função f sujeita às restrições $x \geq 0, \quad y \geq 0$ e $g(x,y) \geq 0$.

Solução

Resposta 21

Exercício 113 (ANPEC 2010, Questão 2). *Seja $f : R^2 \to R$ diferenciável e homogênea de grau 4, tal que $f(1,1) = 2$.*
Julgue os itens abaixo:

(0) *A soma das derivadas parciais de f no ponto $(2,2)$ é igual a 32;*
(1) *Em um ponto crítico (x_0, y_0) de f temos que $f(x_0, y_0) = 0$;*
(2) *As derivadas parciais de primeira ordem de f são também funções homogêneas de grau 4;*
(3) *As identidades $\begin{cases} xf_{xx}(x,y) + yf_{yx}(x,y) = 3f_x(x,y) \\ xf_{xy}(x,y) + yf_{yy}(x,y) = 3f_y(x,y) \end{cases}$ são válidas para todo ponto $(x,y) \in R^2$;*
(4) *Se $p = (x_0, y_0)$ e o gradiente de f em p são ortogonais, então $f(p) = 0$.*

Solução

(0) **Falso.**
(1) **Verdadeiro.**
(2) **Falso.**
(3) **Verdadeiro.**
(4) **Verdadeiro.**

Exercício 114 (ANPEC 2010, Questão 4). *Julgue as afirmativas:*

(0) *Seja* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, *tal que* $\nabla f(x, y, z) = (2, 0, 0)$ *para todo* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. *Então* $f(x, y, z) = 2x$ *para todo* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

(1) *Se* $f(x, t) = e^{-c^2 t} \sin(cx)$, *então* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ *para todo real* c;

(2) *Se* $f(x, y) = \int_x^y e^{\cos t} dt$, *então* $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -e^{\cos x}$;

(3) *Se* $z = f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, x = e^t$ *e* $y = e^{-t}$, *então* $\frac{dz}{dt} = 0$, *para* $t = 0$;

(4) $f(x, y) = 5x^{1/2} y^{3/2} - \frac{2x^3}{y}$ *é homogênea de grau* 2.

Solução

(0) **Falso.**

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Verdadeiro.**

(3) **Verdadeiro.**

(4) **Verdadeiro.**

Exercício 115 (ANPEC 2010, Questão 5). *Sejam* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x, y) = x + y$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por* $g(x, y) = x^2 + y^2$ *e* $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por* $h(x, y) = x^3 y^3 - x - y + 1$.
Julgue as afirmativas:

(0) g *possui ponto de máximo absoluto em* $\mathbb{R}^2$;

(1) *Os pontos críticos de* f *na restrição* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / g(x, y) = 1\}$ *são* $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *e* $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

(2) g *é uma função convexa em* $\mathbb{R}^2$;

(3) *A matriz hessiana de* h *é negativa definida em* $(-1, 1)$;

(4) *A equação* $h(x, y) = 0$ *define implicitamente* y *como função de* x *em torno do ponto* $(1, 1)$, *e* $y'(1) = -1$.

Solução

(0) **Falso.**

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Verdadeiro.**

(3) **Falso.**

(4) **Verdadeiro.**

Exercício 116 (ANPEC 2010, Questão 7). *Se $\Phi(x,y) = xy$ a função real definida no quadrante $A = \{(x,y)|x \geq 0 \ \text{ e } \ y \geq 0\}$.*
Julgue os itens abaixo:

(0) *A declividade da reta tangente à curva $\Phi(x,y) = 1$ no ponto $(1,1)$ é igual a -2;*
(1) *O valor absoluto da declividade da reta tangente à curva $\Phi(x,y) = 1$ no ponto $(a, 1/a)$ cresce à medida que a aumenta;*
(2) *O valor máximo do problema de otimização $\max_A \Phi(x,y)$, sujeito a condição $2x + 3y \leq 1$, é igual a $1/24$;*
(3) *O valor mínimo do problema de otimização $\min_A 4x+9y$, sujeito a condição $\Phi(x,y) = 1$, é igual a $1/12$;*
(4) *Para cada $c > 0$, seja $V(c)$ a solução do problema de otimização $\max_A \Phi(x,y)$, sujeito a condição $2x + 3y \leq c$. Então V é derivável e $V'(2) = V(2)$.*

Solução

(0) **Falso.**
(1) **Falso.**
(2) **Verdadeiro.**
(3) **Falso.**
(4) **Verdadeiro.**

Exercício 117 (ANPEC 2009, Questão 1). *Seja $f : R \times R \to R$ definida por $f(x,y) = g(x)g(y)$, em que $g : R \to R$ é a função dada por $g(x) = x^2(2-x)$. Seja $a = 4/3$ e $K = [0,2] \times [0,2]$.*
Julgue os itens abaixo:

(0) *g é decrescente no intervalo $[0,a]$.*
(1) $\nabla f(x,0) = \nabla f(0,y) = (0,0), \ \forall x, y \in R.$
(2) *p é ponto crítico de $f \Leftrightarrow p = (2,2)$ ou $p = (a,a)$.*

3 *g é convexa no intervalo $(-\infty, a/2)$.*

4 $0 \leq f(x,y) \leq f(a,a), \forall (x,y) \in K$.

Solução

0 **Falso.**

1 **Verdadeiro.**

2 **Falso.**

3 **Verdadeiro.**

4 **Verdadeiro.**

Exercício 118 (ANPEC 2009, Questão 4). *Considere a função $f : R^2_+ \to R$ definida por $f(x,y) = x^{3/4}y^{1/4}$, em que $R^2_+ = R_+ \times R_+$.*
Julgue as afirmativas:

0 *A função f é côncava.*

1 *A função f possui um ponto de máximo absoluto em R^2_+.*

2 *A partir do ponto $(1,1)$, a função cresce mais rapidamente na direção do vetor $(3/4, 1/4)$.*

3 *Se $u = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, então em que $\frac{\partial f}{\partial u}(1,1) = \frac{\sqrt{2}}{4}$, em que $\frac{\partial f}{\partial u}(1,1)$ é a derivada direcional de f, no ponto $(1,1)$, na direção do vetor u.*

4 *A função f é homogênea de grau 3.*

Solução

0 **(A).**

1 **Falso.**

2 **Verdadeiro.**

3 **Verdadeiro.**

4 **Falso.**

Exercício 119 (ANPEC 2009, Questão 5). *Sejam $f : R^2 \to R$, dada por $f(x,y) = \min\{x+y, 3\}$ e $g : R^2 \to R$, dada por $g(x,y) = 2x + 2y$*
$U = \{(x,y) \in R^2_+ / x^2 + y^2 \geq 9 - 2xy\}$. Avalie as afirmativas:

(0) *A restrição de f a U é uma função constante.*
(1) *A curva de nível* 0 *de f é uma reta que passa por* $(0,3)$.
(2) $g(1,2) \leq g(x,y)$, *para todo* $(x,y) \in U$.
(3) *Max* $f(x,y)$ *sujeito a* $g(x,y) = 4$ *é* 3.
(4) *Max* $g(x,y)$ *sujeito a* $f(x,y) = -1$ *é* -2.

Solução

(0) **Verdadeiro.**
(1) **Falso.**
(2) **Verdadeiro.**
(3) **Falso.**
(4) **Verdadeiro.**

EXERCÍCIO 120 (ANPEC 2009, Questão 9). *Seja* $f, g : R^2 \to R$ *funções diferenciáveis definidas por* $f(x,y) = xy$ *e* $g(x,y) = x^4 + y^4$. *Quando restrita ao conjunto não vazio* $K_c = \{(x,y) \in R^2 : g(x,y) = c\}$, *a função f assume um valor máximo* $V(c)$. *Seja* $\lambda = \lambda(c)$ *o multiplicador de Lagrange introduzido para a determinação do máximo da restrição de f ao conjunto* K_c. *Julgue os itens abaixo:*

(0) $\nabla g - \lambda \nabla f$, *se anula no ponto de máximo de* $f/K_c : K_c \to R$.
(1) $V(2r^2) = r$, *para todo* $r > 0$.
(2) $\lambda(c) = V'(c)$.
(3) $\lambda(c)V(c) = 1$.
(4) *Se* $c = 8$, *então* $|f(x,y)| \leq 2$, *para todo* $(x,y) \in K_c$.

Solução

(0) **Falso.**
(1) **Verdadeiro.**
(2) **Verdadeiro.**
(3) **Falso.**
(4) **Verdadeiro.**

EXERCÍCIO 121 (ANPEC 2009, Questão 10). *Sejam* $f : R^2 \to R$ *e* $F : R^2 \times R^+ \to R$ *funções diferenciáveis tais que* $f(1,2) = 1$ *e* $F(x,y,z) = z^2 f(x/z, y/z)$. *Julgue os itens abaixo:*

(0) $f(p) = F(p,1)$, *para todo* $p = (x,y) \in R^2$.

(1) $2F_x(2,4,2) + 4F_y(2,4,2) + 2F_z(2,4,2) = 4$.

(2) $U = R^2 \times R^+$ *é um conjunto convexo.*

(3) *Se* $f(x,y) = x^{1/2}y^{1/3}$, *então* f *é convexa.*

(4) $\left\langle \nabla F(X), X \right\rangle = 2F(X)$, *para todo* $X \in R^2 \times R$.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

(1) **Falso.**

(2) **Verdadeiro.**

(3) **Falso.**

(4) **(A).**

EXERCÍCIO 122 (ANPEC 2009, Questão 13). *Sejam* $f,\ g : R^2 \to R$, *dadas por* $f(x,y) = xy + 5$ *e* $g(x,y) = x^2 + y^2$. *Encontre o valor máximo de* f *restrita à* $g(x,y) \leq 2$.

Solução

Resposta 6

EXERCÍCIO 123 (ANPEC 2009, Questão 15). *Seja* $f : R^3 \to R$ *uma função* C^∞ *e homogênea de grau 3 tal que* $f(1,1,1) = 3$. *Se* $p = (2,2,2)$, *calcule o valor de* $\alpha = \left\langle \nabla f(p), p \right\rangle$.

Solução

Resposta 72

EXERCÍCIO 124 (ANPEC 2008, Questão 7). *Sejam $f, g : R^2 \to R$ funções diferenciáveis definidas por $f(x,y) = 2x + y$ $g(x,y) = x^2 - 4x + y$. Sejam*

$$U = \{(x,y) \in R^2 : g(x,y) \geq 0, x \geq 0, y \geq 0\},$$
$$V = \{(x,y) \in R^2 : g(x,y) \leq 0, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Julgue as afirmativas:

(0) *$U \cap V$ é parte do gráfico de uma parábola.*
(1) *$U \cap V$ é o gráfico de uma função convexa.*
(2) *A restrição de f ao conjunto V atinge um máximo em um ponto da fronteira da região V.*
(3) $\int\limits_V \int f = \int\limits_0^4 \int\limits_0^{4x-x^2} f(x,y)dydx.$
(4) $(9 - \max\limits_V f) \int\limits_V \int f(x,y)dxdy = 5.$

Solução

(0) **Verdadeiro.**
(1) **Falso.**
(2) **Verdadeiro.**
(3) **Verdadeiro.**
(4) **Falso.**

EXERCÍCIO 125 (ANPEC 2008, Questão 10). *Seja $\langle , \rangle$ o produto escalar usual de R^n, $f : R^n \to R$ uma função diferenciável e $\frac{\partial f}{\partial \nu}(a) = \langle \nabla f(a), \nu \rangle$, a derivada direcional em $a \in R^n$, segundo o vetor $\nu \in R^n$. Se $a, \nu \in R^n$ são tais que $|\nu| = n|\nabla f(a)| \neq 0$, julgue as afirmativas:*

(0) *Se $f(3a) = 3f(a)$, então f é homogênea de grau 3.*
(1) *Se f é homogênea de grau 2, então $\frac{\partial f}{\partial a}(a) = 2f(a)$.*
(2) $\frac{\partial f}{\partial \nu}(a) > n|\nabla f(a)|^2$.
(3) *Se $N = \nabla f(a)$, então $\frac{\partial f}{\partial \nu}(a) \leq n\frac{\partial f}{\partial N}(a)$.*
(4) $\left|\frac{\partial f}{\partial \nu}(a)\right| = n|\nabla f(a)|^2 \Leftrightarrow$ *existe $\lambda \in R$ tal que $\nabla f(a) = \lambda\nu$.*

Solução

(0) **Falso.**

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Falso.**

(3) **Verdadeiro.**

(4) **Verdadeiro.**

EXERCÍCIO 126 (ANPEC 2008, Questão 11). *Considere a função:*

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}, & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

Com relação à função acima, julgue as afirmativas:

(0) $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0.$

(1) *Se* $g(x,y) = \frac{\partial f(0,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,0)}{\partial y}$, *então* $g(2,2) = 0.$

(2) $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x}.$

(3) $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ *é contínua na origem.*

(4) $\frac{\partial^2 f(x,x)}{\partial x \partial y} = 0$ *para* $x > 0.$

Solução

(0) **Verdadeiro.**

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Falso.**

(3) **Falso.**

A seguir, calculando a derivada parcial de f *com respeito a* y.

Para $(x,y) = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Para $(x,y) \neq (0,0)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{(x^3 - 3xy^2)(x^2+y^2) - 2y(x^3y - xy^3)}{(x^2+y^2)^2}, \\ &= \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Então,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \begin{cases} 0, & se\ \ (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}, & em\ caso\ contrário. \end{cases}$$

Logo, derivando $\partial f/\partial y$ *con respeito a* x*, temos:*
Para $(x,y) = (0,0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$$

Para $(x,y) \neq (0,0)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{(5x^4 - 12x^2y^2 - y^4)(x^2+y^2)^2 - (x^5 - 4x^3y^2 - xy^4)2(x^2+y^2)2x}{(x^2+y^2)^4} \\ &= \frac{(x^2-y^2)(x^2+9y^2)}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

Então,

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \begin{cases} 0, & se\ \ (x,y) = (0,0) \\ \frac{(x^2-y^2)(x^2+9y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & em\ caso\ contrário. \end{cases}$$

Agora, analisamos se $\partial^2 f/\partial x \partial y$ *é contínua em* $(0,0)$*. Considere* $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/y = 0\}$*, então para* $(x,y) \in S$*, temos*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-y^2)(x^2+9y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4} = 1 \neq \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = 0.$$

Portanto, $\partial^2 f/\partial x \partial y$ *não é contínua em* $(0,0)$*.*

4 **Verdadeiro (gabarito é Falso).**
Do item anterior e para $x > 0$*, obtemos*

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{(x^2-y^2)(x^2+9y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Se $x = y$*, então* $\partial^2 f/\partial x \partial y = 0$*.*

EXERCÍCIO 127 (ANPEC 2008, Questão 13). *Dada a função* $f(x,y,z) = \min\left\{2x, \frac{y}{4}, z\right\}$ *definida para* $x, y, z \geq 0$, *considere o problema:*

$$\begin{cases} \max & f(x,y,z) \\ s.a & 2x + y + 5z \leq 210. \end{cases}$$

Se (x^*, y^*, z^*) *é a solução do problema, calcule* $f(x^*, y^*, z^*)$.

Solução

Resposta 21

EXERCÍCIO 128 (ANPEC 2007, Questão 5). *Se* $f : U \to R$ *uma função duas vezes diferenciável, definida em* $U = \{(x,y) : x, y > 0\}$ *e* $H_f(x,y)$ *a matriz Hessiana de* f *no ponto* $(x,y) \in U$. *Avalie as afirmativas:*

(0) *A função* f *é convexa se e somente se* $H_f(x,y)$ *é semidefinida positiva em todos os pontos de* U .

(1) *Se* $f(x,y) = -x^{1/3}y^{1/4}$, *então* f *é convexa.*

(2) *Se* f *é convexa, então* $H_f(x,y)$ *é positiva definida em todos os pontos de* U.

(3) *Se* $f(x,y) = x^2y^2$, *então* f *é convexa.*

(4) *Se* f *é convexa e* (x_0, y_0) *é um ponto crítico de* f, *então* $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$, *para todo* $(x,y) \in U$.

Solução

(0) **Falso.**

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Falso.**

(3) **Falso.**

(4) **Verdadeiro.**

EXERCÍCIO 129 (ANPEC 2007, Questão 11). *Julgue os itens abaixo:*

(0) *Se* $f(x,y)$ *é uma função homogênea de grau 2, então a função* $h(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} / \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ *homogênea de grau 1.*

1. *Se $f(x,y)$ é uma função homogênea de grau 1 e duas vezes continuamente diferenciável tal que $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 0$ em todo ponto do domínio, então $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 0$ sempre que $x \neq 0$.*
2. *Se $f(x,y)$ é uma função homogênea de grau 0, então ela é constante.*
3. *Se $f(x,y)$ é uma função linear, então ela é homogênea de grau 1.*
4. *Se $f(x,y)$ é homogênea de grau zero, então o gradiente de f em qualquer ponto (x,y) é ortogonal ao vetor (x,y).*

Solução

0. **Falso.**
1. **Verdadeiro.**
2. **Falso.**
3. **(A).**
4. **Verdadeiro.**

Exercício 130 (ANPEC 2007, Questão 12). *Sejam $f_1, f_2, f_3 : R \to R$ funções diferenciáveis tais que $f_1(0) = -\sqrt{3}, f_2(0) = 0$ e $f_3(0) = \sqrt{3}$. Suponha ainda que para todo $x \in R$,*

$$F(x, f_1(x)) = F(x, f_2(x)) = F(x, f_3(x)) = 0,$$

em que $F : R^2 \to R$ é a função dada por $F(x,y) = y^3 - 3y - \sin(x)$. Se $\alpha = f_1'(0)\ f_2'(0)\ f_3'(0)$, calcule o valor de $m = |18 + 1/\alpha|$.

Solução

Da hipótese

$$F(x, f_1(x)) = f_1^3(x) - 3f_1(x) - \sin(x) = 0,$$
$$F(x, f_2(x)) = f_2^3(x) - 3f_2(x) - \sin(x) = 0,$$
$$F(x, f_3(x)) = f_3^3(x) - 3f_3(x) - \sin(x) = 0.$$

Derivando as funções acima, temos

$$f_1'(x) = \cos(x)/(3f_1^2(x) - 3),$$
$$f_2'(x) = \cos(x)/(3f_2^2(x) - 3),$$
$$f_3'(x) = \cos(x)/(3f_3^2(x) - 3).$$

Para $x = 0$*, obtemos* $f_1'(0) = f_3'(0) = 1/6$ *e* $f_2'(0) = -1/3$*. Logo* $\alpha = f_1'(0)\ f_2'(0)\ f_3'(0) = 1/108$*. Portanto* $m = 90$*.*

EXERCÍCIO 131 (ANPEC 2007, Questão 14). *Neste problema, todas as variáveis são não-negativas. Considere o problema de maximização:*

$$\begin{cases} \max & x^2, y^2, z^4 \\ s.a & 2x + y + 5z = 40. \end{cases}$$

Se (x^*, y^*, z^*) *é a solução, calcule* $x^* + y^* + z^*$*.*

Solução

Resposta 19

EXERCÍCIO 132 (ANPEC 2007, Questão 15). *Seja* $\langle , \rangle$ *o produto escalar usual de* R^n *e* $f : R^n_{++} \to R^n$ *a função diferenciável dada por* $f(x_1, ..., x_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$*. calcule* $\alpha_1 + ... + \alpha_n$ *sabendo-se que para todo* $X \in R^n_{++}$*,* $\langle \nabla f(X), X \rangle = 2^3 f(X)$*.*

Solução

Resposta 8

EXERCÍCIO 133 (ANPEC 2006, Questão 7). *Avalie as opções:*

0. *Seja* $f : R^n \to R$ *uma função homogênea de grau* k*, então* $\partial f/\partial x$ *também é homogênea de grau* k*.*
1. *A função* $f : R \to R, f(x) = \sin(x)$ *não possui um máximo.*

(2) *Seja $f : [0,1] \to [0,1]$ uma função crescente. Então se se definir a função $g(x) = f(x) - x$ pode-se garantir que exista x^* tal que $g(x^*) = 0$ só se f for também contínua.*

(3) *Seja H o hessiano da função g. Se H for positivo definido tem-se que a função é convexa.*

(4) *Seja H o hessiano da função g. Se H for sempre diagonalizável e seus autovalores forem negativos, tem-se que a função é côncava.*

Solução

(0) **Falso.**

(1) **Falso.**

(2) **Falso.**

(3) **Verdadeiro.**

(4) **Verdadeiro.**

Exercício 134 (ANPEC 2006, Questão 8). *Julgue as afirmativas:*

(0) *Seja $f(x_1, ..., x_n)$ uma função continuamente diferenciável definida em um conjunto A aberto não-vazio e $S = \{(x_1, ..., x_n) \in R^n : g(x_1, ..., x_n) = b\}$, em que g é uma função continuamente diferenciável definida em A tal que seu gradiente nunca se anula, $S \neq \varnothing$ e b é uma constante. Se $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$ é solução, então o gradiente de f em x^* é paralelo ao gradiente de g em x^*.*

(1) *Seja $f(x_1, ..., x_n)$ duas vezes continuamente diferenciável. Se f é côncava e $f(y_1, ..., y_n)$, então $f(x_1, ..., x_n) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(y_1,...,y_n)}{\partial x_i}(x_i - y_i)$,para qualquer $(x_1, ..., x_n)$ no domínio de f.*

(2) *Toda função estritamente quase-côncava é estritamente côncava, mas a recíproca não é verdadeira.*

(3) *Seja $f(x_1, ..., x_n)$ duas vezes continuamente diferenciável. Se f é estritamente quase- côncava, então $S = \{(x_1, ..., x_n) : f = (x_1, ..., x_n) \geq c\}$ é convexo, para qualquer constante c.*

4 *Em um problema de otimização condicionada, se uma restrição não é ativa, o multiplicador de Lagrange associado é sempre não nulo.*

Solução

0 **(A).**

1 **Verdadeiro.**

2 **Falso.**

Toda função estritamente quase-côncava é estritamente côncava, esta afirmação é falsa. Considere o seguinte contraexemplo.
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *uma função definida por* $f(x) = 0$.
Logo, seja $a \in \mathbb{R}$, *o conjunto*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > a\}$$

é estritamente quase-côncava por que A *é convexo (se* $a \geq 0$, *então* $A = \phi$ *e se* $a < 0$, *então* $A = \mathbb{R}$*). Note que* f *não é estritamente côncava, dado que* f *é uma função constante.*
Por outro lado, a recíproca é verdadeira, ou seja, toda função estritamente côncava é estritamente quase-côncava.

Demostração

Considere a função $f : C \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *estritamente côncava, onde* C *é convexo. Definamos o conjunto* $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > a\}$, *para todo* $a \in \mathbb{R}$.
Note que $A \subset C$.
Sejam $x, y \in A \subset C$ *e* $t \in [0, 1]$. *Dado que* C *é convexa, então* $(1-t)x + ty \in C$. *Por ser* f *estritamente côncava, temos*

$$f((1-t)x + ty) > (1-t)f(x) + tf(y)$$
$$f((1-t)x + ty) > (1-t)a + ta$$
$$f((1-t)x + ty) > a,$$

então $(1-t)x + ty \in A$. *Portanto* A *é convexa.*
Por definição, f *é estritamente quase côncava.*

3 **Verdadeiro.**

4 **Falso.**

Exercício 135 (ANPEC 2006, Questão 13). *Resolva o seguinte problema de maximização condicionada:*

$$\begin{cases} \max \dfrac{8xyzw}{3} \\ s.a \;\; x + 2y + 3z + 4w \leq 12 \\ x.y.z.w \geq 0. \end{cases}$$

Solução

Resposta 9

Exercício 136 (ANPEC 2005, Questão 5). *Avalie as afirmativas:*

0 *O vetor* $(1, 1, 0)$ *pertence ao plano tangente à função* $f(x, y) = x^2y^3$ *no ponto* $(2, 1)$.

1 *A função* $f(x) = \frac{(e^x+e^{-x})}{2}$ *atinge um mínimo em* $x = 0$.

2 *A função* $f(x) = \frac{(e^x-e^{-x})}{2}$ *atinge um máximo em* $x = 0$.

3 *A equação geral do plano tangente a* $f(x, y) = \alpha \log x + \beta \log y$ *passando pelo ponto* $(1, 1)$ *é* $g(x, y) = \alpha x + \beta y$, *em que* log *denota o logaritmo neperiano.*

4 $g(x) = (1 + b)x$ *é uma assíntota da função* $f(x) = \frac{\sqrt{x}+b\sqrt{x-a}}{x^{-1}-\sqrt{x}}$.

Solução

0 **Falso.**

1 **Verdadeiro.**

2 **Falso.**

3 **Falso.**

4 **Falso.**

EXERCÍCIO 137 (ANPEC 2005, Questão 7). *Seja $\nu(z)$ a função que associa a cada $z \in R_+^2$, o valor máximo da função $f(x,y) = xy$ na região $\{(x,y) \in R_+^2 : 5x+3y = z\}$. Avalie as afirmativas:*

- (0) *A função ν é positivamente homogênea de grau 2.*
- (1) *A função ν é derivável para $z > 0$.*
- (2) *A derivada da função ν em $z = 1$ é igual a $15\nu(1)$.*
- (3) *ν é crescente.*
- (4) *$\nu(0) = -\infty$.*

Solução

- (0) **Verdadeiro.**
- (1) **Verdadeiro.**
- (2) **Falso.**
- (3) **Verdadeiro.**
- (4) **Falso.**

EXERCÍCIO 138 (ANPEC 2005, Questão 10). *Considere o problema (P) de maximização condicionada abaixo:*

$$\max f(x,y)$$

$$\textit{sujeito a} \ \ g(x,y;\theta) = b.$$

Os parâmetros reais b e θ são exógenos. Suponha que as funções f e g são duas vezes continuamente diferenciáveis em todos os seus argumentos. Suponha ainda que o gradiente de g (nas variáveis x e y) nunca se anule. Admita que existe um único ponto crítico $(x^*(b,\theta), y^*(b,\theta))$, aqui expresso como função dos parâmetros. Avalie as afirmativas:

- (0) *Se g é linear nas variáveis x e y, então uma condição necessária, mas não suficiente, para que o ponto crítico seja solução é que a função f seja quase-côncava.*
- (1) *Quando avaliados na solução do problema, os vetores gradientes de f e de g são paralelos.*

(2) *Seja λ o multiplicador de Lagrange do problema (P) e $V(b, \theta)$ a função-valor, ou seja, a função-objetivo avaliada na solução. Se b varia em uma unidade infinitesimal, então $V(b, \theta)$ varia em λ unidades infinitesimais.*

(3) *Se $g(x, y; \theta) = \theta x + y$ e se $x^*(b, \theta) = 0$, então $\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$.*

(4) *Se $b > 0, g(x, y; \theta) = x + y$ e $f(x, y) = \sqrt{xy}$, então o multiplicador de Lagrange não depende de b.*

Solução

(0) **Falso.**

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Verdadeiro.**

(3) **Verdadeiro.**

(4) **Verdadeiro.**

EXERCÍCIO 139 (ANPEC 2005, Questão 14). *Seja (x_0, y_0) o vetor que maximiza a função $f(x, y) = \ln(x) + \ln(y)$ na região $\{(x, y) \in R^2_+ : 2x + 3y = 5\}$. Calcule o valor de $a = 12(x_0 - y_0)$.*

Solução

Resposta 5

EXERCÍCIO 140 (ANPEC 2004, Questão 2). *Responda V (verdadeiro) ou F (falso):*

(0) *A equação da reta que passa pelos pontos $(2, -1)$ e $(1, 1)$ é $y + 2x = 3$.*

(1) *O plano tangente à superfície dada por $z = x^2 + y - xy$ no ponto $(x_0, y_0) = (1, 1)$ é o conjunto $T = \{(x, y, z) \in \Re^3$ tal que $z = x\}$.*

(2) *Se $f(x)$ é uma função côncava e $r(x)$ é uma sua reta tangente qualquer, então $r(x) \geq f(x)$, para qualquer x no domínio de definição de f.*

(3) *A interseção do plano $z - x - y = 3$ com o plano $z + x + y = 4$ é uma reta em $\Re^3$.*

(4) *Em $\Re^3$, a interseção de dois planos é sempre não-vazia.*

Solução

(0) **Verdadeiro.**
(1) **Verdadeiro.**
(2) **Verdadeiro.**
(3) **Verdadeiro.**
(4) **Falso.**

EXERCÍCIO 141 (ANPEC 2004, Questão 9). *Considerando a função* $f(x,y) = 2 \cdot x^2 + x \cdot y^2 + y^2$, *assinale V (verdadeiro) ou F (falso):*

(0) $(0,0)$ *é ponto de mínimo de* f *no círculo* $x^2 + y^2 \leq 1$;
(1) $(0,0)$ *é ponto de mínimo de* f *no plano* $\Re^2$;
(2) $(-1,0)$ *é ponto de máximo de* f *no círculo* $x^2 + y^2 \leq 1$;
(3) $(-1,2)$ *é ponto de sela de* f;
(4) $f(x,y) < x^2 + x \cdot y^2 + 1$ *para* $x^2 + y^2 < 1$.

Solução

(0) **Verdadeiro.**
(1) **Falso.**
(2) **Verdadeiro.**
(3) **Verdadeiro.**
(4) **Verdadeiro.**

EXERCÍCIO 142 (ANPEC 2004, Questão 12). *Calcule o valor máximo da função* $f(x,y,z) = (xyz)^{1/3}$ *sujeito a* $x + y + z = 90$.

Solução

Resposta 30

EXERCÍCIO 143 (ANPEC 2004, Questão 13). *Seja* $V(b)$ *o valor máximo da função* $f(x,y)$ *sobre o conjunto determinado pela restrição* $g(x,y) = b$, *em que* $f, g : \Re^2 \to \Re$ *são funções duas vezes continuamente diferenciáveis e* $b \in \Re$ *é um parâmetro exógeno. Se* $V(b) = b^2 - b$, *determine o multiplicador de Lagrange quando* $b = 50$.

Solução

Resposta 99

Exercício 144 (ANPEC 2003, Questão 6). *Considere a expansão de Taylor para a função $y = f(x)$ em torno do ponto $x = 0$.*
Assinale V (Verdadeiro) ou F (Falso):

(0) $e^x = 1 + e^x x + e^x x^2 + e^x x^3 + ...$

(1) *Para qualquer parâmetro a, o termo independente (primeiro termo) da expansão de Taylor de e^{ax} é sempre igual à unidade.*

(2) *Se $x = 0$ for um ponto estacionário da função, para afirmar se x é um ponto de máximo ou de mínimo da função basta verificar o sinal do termo de segunda ordem da expansão de Taylor.*

(3) *Para qualquer polinômio, a expansão de Taylor é necessariamente finita.*

(4) *O termo de terceira ordem da aproximação da função $y = e^{2x}$ é maior que o termo de segunda ordem, em valores absolutos.*

Solução

(0) **Falso.**

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Falso.**

(3) **Verdadeiro.**

(4) **Falso.**

Exercício 145 (ANPEC 2003, Questão 12). *Assinale V (Verdadeiro) ou (F) Falso:*

(0) *A função $f(x,y) = -\frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + x^2y - y^2 - 3y$ tem dois pontos críticos em $\Re^2$.*

(1) *O plano tangente à superfície $z = -\frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + x^2 \cdot y - y^2 - 3 \cdot y$ no ponto $(2, 1 - \frac{7}{3})$ é paralelo ao plano $z = 0$.*

(2) $10x + 2y - 3x^2 + xy - y^2 < 15$, *para todo $(x,y) \in \Re^2$.*

(3) $(0,0)$ *é ponto de mínimo de $f(x,y) = x^2 - 4xy + 4y^2 + x^4 + y^4$.*

④ *Fixado* $y \in (0, +\infty)$, *se* $V(y)$ *é o valor máximo de* $\left(\frac{yx}{1+y^2x^2}\right), x \in (0, +\infty)$, *então* $V'(y) = 0$.

Solução

⓪ **Falso.**
① **Verdadeiro.**
② **Verdadeiro.**
③ **Verdadeiro.**
④ **Verdadeiro.**

Exercício 146 (ANPEC 2003, Questão 13). *Assinale V (Verdadeiro) ou (F) Falso:*

⓪ *Se definimos* $z(x, y)$ *em torno de* $(0, 0)$ *pela equação* $(z(x, y))^2 + x^2(z(x, y))^3 + y^2 - 1 = 0$ *então* $(0, 0)$ *é ponto crítico de* $z(x, y)$.

① *Se* $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2z + 1$ *e* $z(x, y)$ *é definida em torno de* $(1, 1, -1)$ *como função de* (x, y), *em que* $z^2 + x^2z^2 + y^2 - 1 = 0$, *então* $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z(x, y))|_{(x,y)=(1,1)} = -6$.

② *Se* $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ *é uma curva diferenciável para* $t \in \Re$ *tal que* $c(0) = (1, 1, -1)$ *e* $(z(t))^2 + (x(t))^2(z(t))^3 + (y(t))^2 - 1 = 0$, *então* $-2x'(0) + 2y'(0) + z'(0) = 0$.

③ *No sistema de equações*

$$3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0$$
$$6x_1 - 10x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 0$$

é possível definir as variáveis x_2 *e* x_3 *como funções das variáveis* x_1 *e* x_4.

④ *No sistema de equações*

$$3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0$$
$$6x_1 - 10x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 0$$

é possível definir as variáveis x_1 *e* x_2 *como funções das variáveis* x_3 *e* x_4.

Solução

(0) **Verdadeiro.**
(1) **Verdadeiro.**
(2) **Verdadeiro.**
(3) **Verdadeiro.**
(4) **Falso.**

EXERCÍCIO 147 (ANPEC 2003, Questão 14). *Calcule o valor máximo da função $f(x, y) = 3x + 2y$, sujeita à restrição $g(x, y) = x^{1/2} + y^{1/2} = 5$.*

Solução

Resposta 75

EXERCÍCIO 148 (ANPEC 2002, Questão 11). *Considere a função $U : \Re^2 \to \Re$ definida por $U(x, y) = \min\{2x, y\}$.*
Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

(0) *O valor máximo de U no conjunto $A = \{(x, y) \in \Re^2; x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$ é maior que $1/2$.*
(1) *O valor máximo de U no conjunto $B = \{(x, y) \in \Re^2; x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 25\}$ é maior que 5.*
(2) *O valor máximo de U no conjunto $C = \{(x, y) \in \Re^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ é igual a 2.*
(3) *O valor máximo de U no conjunto $D = \{(x, y) \in \Re^2; x \geq 0, y \geq 0, xy \leq 1\}$ é menor que 1.*
(4) *O valor máximo de U no conjunto $E = A \cap B \cap C \cap D$ é maior que $1/2$.*

Solução

(0) **Verdadeiro.**
(1) **Falso.**
(2) **Falso.**
(3) **Falso.**

④ **Verdadeiro.**

EXERCÍCIO 149 (ANPEC 2002, Questão 12). *Considere a seguinte função definida pelo problema de maximização em duas variáveis cuja solução é única e representada pelo vetor* (x^*, y^*)*:*

$$U(M) = \max_{x,y} F(x,y) \quad s.a \quad G(x,y) \leq M,$$

em que F *e* G *são funções continuamente 2-vezes diferenciáveis. Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):*

⓪ *Se* $\frac{\partial}{\partial x}F(x^*,y^*) = 3$ *e* $\frac{\partial}{\partial x}G(x^*,y^*) = 1$ *então a restrição não é ativa.*

① *Fixe* M *e considere* $\frac{\partial}{\partial x}F(x^*,y^*) = 3$ *e* $\frac{\partial}{\partial x}G(x^*,y^*) = 1$*. Então* $U'(M) = 3$*.*

② *No ponto de ótimo, se* $\frac{\partial}{\partial x}F(x^*,y^*) < 0$ *então* $\frac{\partial}{\partial x}G(x^*,y^*) > 0$*.*

③ *Para um dado* M*, se* $\frac{\partial}{\partial x}G(x^*,y^*) = \frac{\partial}{\partial y}G(x^*,y^*) = 0$ *Então* $U'(M) = 0$ *não pode ser interpretado como preço sombra.*

④ *Se* F *é uma função estritamente côncava, então as condições de* 1^a *ordem são também suficientes para a solução do problema de maximização.*

Solução

⓪ **Falso.**

① **Verdadeiro.**

② **Falso.**

③ **Verdadeiro.**

④ **Falso.**

EXERCÍCIO 150 (ANPEC 2002, Questão 13). *Considere a função* $F : \Re^3 \to \Re$ *diferenciável e* $\nabla F(x)$ *denotando o gradiente de* F *no ponto* $x \in \Re^3$*. Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):*

⓪ *Sabendo-se que* F *é estritamente côncava, e que no ponto* $(1,2,3)$ *tem-se* $F(1,2,3) = 0$ *e* $\nabla F(1,2,3) = (3,4,5)$*, conclui-se que seu valor no ponto* $(2,3,4)$ *satisfaz a* $F(2,3,4) < 12$*.*

1. *Se F for homogênea do segundo grau e no ponto $(2,6,10)$ seu gradiente for $\nabla F(2,6,10) = (1,1,4)$, conclui-se que seu valor no ponto $(1,3,5)$ é igual a $F(1,3,5) = 6$.*
2. *Dados o plano $P = \{(x_1,x_2,x_3) \in \Re^3; 2x_1 + x_2 + x_3 = 9\}$ e a superfície $S = \{(x_1,x_2,x_3) \in \Re^3; F(x_1 + x_2 + x_3) = 9\}$, Se no ponto $(1,2,5)$ tiver-se $F(1,2,5) = 9$ e $\nabla F(1,2,5) = (1,1,1)$, conclui-se que o plano P é tangente à superfície S no ponto $(1,2,5)$.*
3. *Dados o plano $L = \{(x_1,x_2,x_3) \in \Re^3; x_1 + x_2 + x_3 = 7\}$ e a superfície $H = \{(x_1,x_2,x_3) \in \Re^3; F(x_1,x_2,x_3) = 7\}$ sabe-se que o plano L é tangente à superfície H no ponto $(1,3,3)$. Isto posto, se F for estritamente convexa, então, se $F(x) > 7$ para todo ponto $x \in L, x \neq (1,3,3)$.*
4. *Sabendo-se que F é ao mesmo tempo côncava e convexa, e que no $(1,3,7)$ tem-se $\nabla F(1,3,7) = (1,2,4)$, $F(1,3,7) = 36$, pode-se afirmar que a forma funcional de F é necessariamente $F(x_1,x_2,x_3) = x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 1$.*

Solução

0. **Verdadeiro.**
1. **Verdadeiro.**
2. **Falso.**
3. **Falso.**
4. **Verdadeiro.**

Exercício 151 (ANPEC 2001, Questão 10). *Dada a função $f : R^2 \to R$ definida por $f(x,y) = xy$, assinale V (verdadeiro) ou F (falso):*

0. *O valor máximo de f sujeito à restrição $|x| + |y| \leq 2$ é igual a 1 (um);*
1. *O valor máximo de f sujeito às restrições $y + 2x \leq 2$ e $2y + x \leq 2$ é igual a 1(um);*
2. *O valor máximo de f sujeito à restrição $x^2 + y^2 \leq 2$ é igual a 1 (um);*
3. *O valor mínimo de f sujeito às restrições $-2 \leq y+2x \leq 2$ e $-2 \leq 2y+x \leq 2$ é igual a -4 (menos quatro);*

4. *O valor máximo de f sujeito às restrições $x \geq 0$, $y \geq 0$, $-2 \leq y + 2x \leq 2$ e $-2 \leq 2y + x \leq 2$ é inferior a 1(um).*

Solução

0. **Verdadeiro.**
1. **Falso.**
2. **Verdadeiro.**
3. **Verdadeiro.**
4. **Verdadeiro.**

EXERCÍCIO 152 (ANPEC 2001, Questão 11). *A respeito das funções $R^n \to R$ abaixo assinale V (verdadeiro) ou F (falso):*

0. *Dada $f : R^3 \to R$, definida por $f(x,y,z) = e^{2x} \cdot \sqrt{y+z}$, então o vetor gradiente de f no ponto $(0,4,0)$ é $\nabla f(0,4,0) = (4, 1/4, 1/4)$;*
1. *Dada uma função $g : R^3 \to R$ diferenciável homogênea do terceiro grau, sabe-se que no ponto $(1,2,6)$ o vetor gradiente de g é $\nabla g(1,2,6) = (2,2,1)$. Conclui-se que o valor de g neste ponto é $g(1,2,6) = 4$;*
2. *Dada uma função $h : R^2 \to R$ diferenciável, para cada ponto $x \in R$ associa-se implicitamente um ponto $y \in R$ por meio da expressão $h(x,y) = y^2$. Sabendo-se que no ponto $(3,2)$ßR^2 o vetor gradiente de h é $\nabla h(3,2) = (3,1)$, então a derivada $\frac{dy}{dx}|_{x=3}$ é igual a 2 (dois);*
3. *Dada a função $f : R^2 \to R$, definida por $f(x,y) = xy$, define-se uma nova função $F : R \to R$ pela regra: $F(u) =$ valor máximo de $f(x,y)$ sujeito à restrição $x^2/2 + y^2/3 \leq u^2$. Então a derivada dF/du calculada no ponto $u = \sqrt{3/2}$ é igual a 3;*
4. *O conjunto dos pontos em que a função $h : R^2 \to R$, definida por $h(x,y) = xy\ e^{-xy}$, atinge seu valor máximo é uma parábola.*

Solução

0. **Verdadeiro.**
1. **Verdadeiro.**

2 **Falso.**
3 **Verdadeiro.**
4 **Falso.**

EXERCÍCIO 153 (ANPEC 2000, Questão 10). *Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):*

0 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1$;

1 *Se* $f(x,y)$ *é o menor valor entre* x *e* y *, então* $f(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$;

2 *Se* $f(x,y)$ *tem derivadas parciais de todas as ordens em torno do ponto* $(-1,1)$ *e se* $\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = 1$ *e* $(x^2+2xy+7)\cdot \frac{\partial f}{\partial x^2}(x,y)+(3x-y+4)\cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$*, então* $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(-1,1) = -\frac{1}{2}$;

3 *Se* $f(x,y)$ *for diferenciável* $(0,0)$ *e se sua derivada direcional em* $(0,0)$ *na direção do vetor* $(1,2)$*for* 1 *e, na direção de* $(1,-1)$*or* -1*, então* $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0 = +\frac{1}{3})$;

4 *A reta* $-\frac{x}{6}+\frac{3}{2}$ *é tangente ao isoquanta de* $f(x,y) = e^y\sqrt{x}$ *que passa pelo ponto* $(9,0)$.

Solução

0 **Falso.**
1 **Verdadeiro.**
2 **Verdadeiro.**
3 **Falso.**
4 **Falso.**

EXERCÍCIO 154 (ANPEC 2000, Questão 11). *Sendo dada a função* $f : R^2 \to R : (x,y) \to f(x,y) = \sqrt{6xy}$*, calcule o valor máximo de* $f(x,y)$ *sujeito às restrições:* $x^2+2y^2 \le 2$ *e* $2x^2+y^2 \le 2$.

Solução

Resposta 2

EXERCÍCIO 155 (ANPEC 1999, Questão 10). *Dizemos que uma função $f : R \to R$ satisfaz a propriedade C nos pontos a, b e c quando*

$$f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3}$$

Classifique como V ou F cada uma das afirmações abaixo:

(0) *Qualquer trinômio do segundo grau satisfaz a propriedade C para quaisquer a, b e c.*

(1) *Se f é côncava então satisfaz à propriedade C para quaisquer a, b e c.*

(2) *Se $f(x) = x^3$ então f satisfaz à propriedade C se a, b e c são números reais positivos.*

(3) *Se $f(x) = x^3$ então f satisfaz à propriedade C se a, b e c são números reais negativos.*

Solução

(0) **Falso.**

(1) **Falso.**

(2) **Verdadeiro.**

(3) **Falso.**

EXERCÍCIO 156 (ANPEC 1998, Questão 1). *A respeito das funções $f : \Re^2 \to \Re$ definidas abaixo, responda V ou F.*

(0) *O valor mínimo da função $f(x, y) = xy^2$ sujeito à restrição $|x| + 9|y| \leq 9$ é inferior a -1 (menos um);*

(1) *O valor mínimo da função $f(x, y) = |x|-|y|$ sujeito à restrição $(x-1)^2+y^2 = 1$ é superior a zero;*

(2) *O valor máximo da função $f(x, y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$ sujeito à restrição $|x| + |y| = 2$ é superior a 4.*

Solução

(0) **Verdadeiro.**

(1) **Falso.**

2. **Verdadeiro.**

EXERCÍCIO 157 (ANPEC 1998, Questão 9). *Seja a função $F : \Re^3 \to \Re$ homogênea do 3° grau, e diferenciável. Dados $F(2,4,6,) = 16/3$, e as derivadas parciais $F_1(2,4,6,) = 8/3$ e $F_2(3,6,9,) = 1$, responda V ou F:*

0. $F(3,6,9) = 9$.
1. $F_1(3,6,9) = 6$.
2. $F_3(2,4,6) = 40/27$.

Solução

0. **Falso.**
1. **Verdadeiro.**
2. **Falso.**

EXERCÍCIO 158 (ANPEC 1998, Questão 12). *Certa empresa produz relógios ao custo unitário de 8 e sabe que se fixar o preço em x, venderá $(100 - 2x)$ unidades por período de tempo(onde $x \leq 50$). Qual deve ser o valor de x para que a lucro das vendas seja máximo?*

Solução

Resposta 29

EXERCÍCIO 159 (ANPEC 1997, Questão 6). *Os itens abaixo referem-se ao teorema da função implícita. Julgue as afirmações:*

0. *Seja $f(x,y) = 3x^2 + 2xy + 4y^3$. Pelo teorema da função implícita, podemos expressar y como função $y = \xi(x)$ de x se, e somente se, $y \neq -3x$.*
1. *Seja $g(x,y) = 7x^2 + 2xy^2 + 9y^4$ e suponha que $36y^3 + 4xy \neq 0$. Então podemos escrever $y = \xi(x)$ e, além disso, vale $\frac{dy}{dx} = -\frac{14x+2y^2}{36y^3+4xy}$.*
2. *Seja $h(x,y) = 6x^3 - 5y$. Então $\frac{dy}{dx}(\sqrt{5}) = 18$.*
3. *Seja $z(x,y) = 12x^5 - 2y$ e suponha que $x > 0$. Então $(\frac{1}{x^4})(\frac{dy}{dx}) = 60$.*

Solução

0. **Falso.**
1. **Verdadeiro.**
2. **Verdadeiro.**
3. **Falso.**

EXERCÍCIO 160 (ANPEC 1997, Questão 8). *Considere o seguinte problema de otimização condicionada:*

$$\begin{cases} \max\limits_{x,y,z} \ Q(x,y,z) = 3xy + z^2 \\ s.a \ \ x^2 + y^2 + z^2 = 81. \end{cases}$$

Julgue as afirmativas abaixo:

0. *Quatro pontos diferentes satisfazem as condições de primeira ordem.*
1. *No ponto (x^*, y^*, z^*) que resolve o problema, $Q(x^*, y^*, z^*) = 27$.*
2. *O ponto $(0, 0, 9)$ satisfaz as condições de segunda ordem.*
3. *O multiplicador de Lagrange associado à solução é negativo.*

Solução

0. **Falso.**
1. **Falso.**
2. **Falso.**
3. **(A).**

EXERCÍCIO 161 (ANPEC 1996, Questão 2). *Dada a função $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4xy + 6x$, indique as afirmativas verdadeiras e as falsas:*

0. *A matriz hessiana de f é simétrica para $(x,y) \in \Re^2$.*
1. *Se $f(x,y) = 0$ então a derivada implícita $\frac{dy}{dx}$ no ponto $(1,-1)$ é igual a -4*
2. *A equação da reta tangente ao gráfico da curva $f(x,y) = 0$ no ponto $(0,1)$ é dada por $5x + y = 1$.*
3. *O teorema de Euler é válido para f.*

Solução

0. **Verdadeiro.**
1. **Falso.**
2. **Verdadeiro.**
3. **Falso.**

EXERCÍCIO 162 (ANPEC 1996, Questão 6). *Considere a equação* $\phi(x, y, z) = xz^3 + y^2z - 2xy = 0$, *que é satisfeita no ponto* $(x, y, z) = (1, 1, 1)'$.
Uma condição suficiente para aplicar o teorema da função implícita é que $\frac{\partial\phi(\cdot)}{\partial z} \neq 0$ *em* $(x, y, z) = (1, 1, 1)'$.

0. *Qual o valor de* $\frac{\partial\phi(\cdot)}{\partial z}$ *em* $(x, y, z) = (1, 1, 1)'$?
1. *Aplique o teorema da função implícita e calcule* $60\left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)$ *em* $(x, y, z) = (1, 1, 1)'$.
2. *Aplique o teorema da função implícita e calcule* $\frac{\partial z}{\partial y}$ *em* $(x, y, z) = (1, 1, 1)'$.

Solução

0. **(A).**
1. **(A).**
2. **(A).**

EXERCÍCIO 163 (ANPEC 1996, Questão 7). *Determine o valor mínimo da função* $f(x, y) = 4x^2 - 2xy + y^2$ *sujeito à* $xy = 2$.

Solução

Resposta 4

EXERCÍCIO 164 (ANPEC 1995, Questão 1). *Sabendo que a função* $y = y(x), x > 0$ *satisfaz à equação diferencial de primeira ordem* $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{1+x}y = \frac{1}{1+x}$ *e que* $y(0) = 3$, *calcule* $y(1)$.

Solução

Resposta (P)

Exercício 165 (ANPEC 1995, Questão 2). *Sabendo que a função $y(x)$ satisfaz à equação diferencial de segunda ordem $2\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+3y=15$ e que $y(0)=0$ e $\frac{dy}{dx}(0=0)$, calcule $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)$.*

Solução

Resposta 5

Exercício 166 (ANPEC 1995, Questão 4). *Seja a função $F:\Re^3\to\Re$ homogênea do 2° grau e diferenciável. Dado $F(2,3,4)=6$, verifique se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas.*

- (0) *$F(4,6,8)=36$.*
- (1) *Se as derivadas parciais em relação às duas primeiras variáveis no ponto $(2,3,4)$ são respectivamente $F_1(2,3,4)=1$ e $F_2(2,3,4)=2$, então conclui-se que $F_3(2,3,4)=4$.*
- (2) *Com base nos valores das derivadas parciais F_1 e F_2 no ponto $(2,3,4)$ dados no item anterior, pode-se concluir que $F_2(4,6,8)/F_1(4,6,8)=2$.*
- (3) *Seja ε_i a elasticidade em relação a uma das variáveis. Com base nas informações dadas, pode-se concluir que $\sum\limits_{i=1}^{3}\varepsilon_i=2$.*

Solução

- (0) **Falso.**
- (1) **Falso.**
- (2) **Verdadeiro.**
- (3) **Verdadeiro.**

Exercício 167 (ANPEC 1995, Questão 5). *Indique se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas.*

(0) *O valor máximo da função* $f(x, y) = |x| + |y|$ *sujeito à restrição* $x^2 + y^2 = 9$ *é inferior a* 3*.*

(1) *O valor máximo da função* $f(x, y) = |x - 1| + |y - 1|$ *sujeito à restrição* $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ *é superior a* 2*.*

(2) *O valor máximo da função* $f(x, y) = (x + 1)^2 + (y + 1)^2$ *sujeito à restrição* $|x| + y = 1$ *é igual a* 9/2*.*

Solução

(0) **Falso.**

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Falso.**

EXERCÍCIO 168 (ANPEC 1995, Questão 7). *Seja a função* $F(N) = \max x_1^{\frac{1}{N}}.x_2^{\frac{1}{N}}.x_3^{\frac{1}{N}}...x_N^{\frac{1}{N}}$ *sujeita à restrição* $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_N = N$*, em que* N *é um número natural. Calcule* $\lim_{N \to \infty} F(N)$*.*

Solução

Resposta 1

EXERCÍCIO 169 (ANPEC 1994, Questão 4). *Seja a função* $f(x, y) = -x^3 + y^3 + x^2 + y^2$*. Esta função:*

(0) *Apresenta um ponto de máximo em* $(2/3, -2/3)$*.*

(1) *Apresenta um ponto de mínimo em* $(0, 0)$*.*

(2) *Apresenta um ponto de máximo em* $(2/3, 0)$*.*

(3) *Não apresenta ponto de sela.*

Solução

(0) **Verdadeiro.**

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Falso.**

(3) **Falso.**

Exercício 170 (ANPEC 1994, Questão 10). *Dada a equação* $\frac{xz^2}{x+y}+y=0$*, calcule* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *no ponto* $(x,y,z)=(-1,2,2)$*.*

Solução

Resposta (P)

Exercício 171 (ANPEC 1993, Questão 4). *Seja* $f(x,y)=-\frac{1}{xyz}-x-y-z$*. Ache a soma dos valores absolutos dos determinantes dos menores principais da matriz hessiana avaliada em* $x=y=z=1$*.*

Solução

Resposta 9

Exercício 172 (ANPEC 1993, Questão 5). *Calcule o valor máximo da função* $f(x,y)=8x^2+4y+4y^2$*, sujeita à restrição* $x^2-y^2=1$*.*

Solução

Resposta 9

Exercício 173 (ANPEC 1993, Questão 12). *Sabendo que a equação* $xyz+x^3+y^3+z^3=-19$ *define* ϕ *como função de* x *e* y*, calcule* $\left(\frac{\partial z}{\partial x}-2\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ *no ponto* $(0,-3)$*.*

Solução

Resposta 25

Exercício 174 (ANPEC 1993, Questão 15). *Calcule o valor mínimo da função:*

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_1x_2+4x_2^2+x_1x_3+x_3^2+2.$$

Solução

Resposta 2

Exercício 175 (ANPEC 1992, Questão 6). *Dada a função* $f(x, y) = 3x^2y - 8xy^2 - 2y$*, indique as afirmações verdadeiras e as falsas:*

(0) *A partir do ponto* $(1, 0)$*, o vetor* $(0, 1)$ *indica a direção de maior crescimento função.*

(1) *A partir do ponto* $(0, 5)$*, o vetor* $(2, 2)$ *indica a direção de maior crescimento função.*

(2) *A partir do ponto* $(0, 1)$*, o vetor* $(-2, -1/2)$ *indica a direção de maior crescimento função.*

(3) *A partir do ponto* $(2, 1)$*, o vetor* $(1, 1)$ *indica a direção de maior crescimento função.*

Solução

Exercício 176 (ANPEC 1992, Questão 12). *Dada a função* $z = 2x + 4y + xy$ *sujeita à restrição* $x + 6y = 4$*, determine o valor mínimo que ela pode obter.*

Exercício 177 (ANPEC 1992, Questão 13). *Dado que a função* $z = f(x, y)$ *é homogênea de grau um em seus argumentos, determine o seu valor quando* $x = y = 1$*, sabendo que, neste caso,* $\frac{\partial f}{\partial x} = 15$ *e* $\frac{\partial f}{\partial y} = -3$*.*

Exercício 178 (ANPEC 1992, Questão 15). *Dada a expressão* $y^3 - 1000xz^2 = 0$*, determine a razão* $\frac{\partial y/\partial x}{\partial y/\partial z}$*, quando* $z = 8x$*.*

Exercício 179 (ANPEC 1991, Questão 4). *Suponha que para uma economia se manter em equilíbrio, o investimento deva crescer de acordo com a equação*

$$I(t) = I(0)e^{0,03t} \text{ onde } e^{0.03t} = \exp(0,03t).$$

Qual é a taxa percentual de crescimento correspondente a ela?

EXERCÍCIO 180 (ANPEC 1991, Questão 5). *Dado que* $z = (6x - x^2)(y^2 - 2\omega), x = -3t, y = 5t^3$ *e* $\omega = e^t + 1$, *determine o valor de* dz/dt *para* $t = 0$.

EXERCÍCIO 181 (ANPEC 1991, Questão 7). *Calcule o valor máximo que a função* $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ *pode atingir quando* x *e* y *estão sujeitos às restrições* $x + y = 1$ *e* $x^2 = y - 1$.

EXERCÍCIO 182 (ANPEC 1990, Questão 4). *Considere* $w = x^3y^2z, \;\; x = t^2, \;\; y = t^3, \;\; z = t^4$, *calcule a derivada* $\frac{dw}{dt}$ *para* $t = 1$.

EXERCÍCIO 183 (ANPEC 1990, Questão 5). *Dado* $y - e^{f(x)} = 0$ *onde* $f(x) = 0,12\sqrt{t} - 0,02t$, *determine* dy/dt *para* $t = 9$.

EXERCÍCIO 184 (ANPEC 1990, Questão 6). *Calcule o comprimento do vetor* $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ *que minimiza o valor da função* $z = e^{x^4} + y^4$.

EXERCÍCIO 185 (ANPEC 1990, Questão 7). *Ache os valores de* x_1 *e* x_2 *correspondentes ao máximo da função* $y = (-x_1^2 - x_2^2 + 10x_1 + 10x_2 + 31)^{1/2}$ *e satisfazem a equação* $x_1 + 2x_2 = 5$. *Em cada opção assinale se falsa ou verdadeira:*

0 0 *e* 4.

1 2 *e* 3.

2 3 *e* 1.

3 1 *e* 0.

4 4 *e* 2.

EXERCÍCIO 186 (ANPEC 1990, Questão 8). *Determine o perímetro máximo de um retângulo inscrito no interior de um círculo de raio* $\sqrt{2}$.

EXERCÍCIO 187 (ANPEC 1990, Questão 14). *Dada uma equação diferencial de segunda ordem* $\frac{d^2y}{d^2t} + a\frac{dy}{dt} + by = c$. *Onde* $c \neq 0$, *diga quais afirmações são verdadeiras ou falsas.*

- (0) *Existem infinitas soluções da equação diferencial.*
- (1) *Se* $y_1(t)$ *e* $y_2(t)$ *são soluções, então* $y_3(t)$, *definida como* $y_3(t) \equiv y_1(t) + y_2(t)$ *também é solução.*
- (2) *Se* $y_1(t)$ *e* $y_2(t)$ *são soluções e se* $a > 0, b > 0$, *então* $y_1(t) - y_2(t)$ *converge a* 0 *quando* $t \to \infty$.
- (3) *Se* $y_1(t), y_2(t)$ *e* $y_3(t)$ *são soluções, então* $y_4(t)$ *definida como* $y_4(t) \equiv y_1(t) - y_2(t) + y_3(t)$, *também é uma solução.*
- (4) *Se* $y_1(t)$ *e* $y_2(t)$ *são soluções, então* $y_3(t) \equiv y_1(t).y_2(t)$ *também é solução.*

CAPíTULO 19

Integrais

[1]

19.1. Questões ANPEC Trabalhadas

19.1.1. Cálculo de integrais.

ANPEC 2021, Questão 4.

Considere as funções $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$ e $g(x) = \int_0^x e^{2t^2} dt$ definidas no intervalo $[0, +\infty)$. Determine o valor $H = \lim_{x\to+\infty} \frac{f^2(x)}{g(x)}$.

Note que ambas integrais divergem quando $x \to \infty$, i.e.,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty.$$

Portanto, como ambas f e g são diferenciáveis, podemos aplicar L'Hôspital:

$$H = \lim_{x\to+\infty} \frac{f^2(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2f(x)f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2f(x)e^{x^2}}{e^{2x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2f(x)}{e^{x^2}}.$$

Como novamente temos um limite do tipo ∞/∞, aplicamos novamente L'Hôspital:

$$H = \lim_{x\to+\infty} \frac{2f'(x)}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{xe^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

ANPEC 2020, Questão 8. A veracidade das seguintes afirmações a seguir devem ser avaliadas.

0 Dada uma constante $k > 1$, $\lim_{a\to0^+} \int_a^{ka} \frac{1}{x}\, dx = 0$.

Falso. Note que

$$\lim_{a\to0^+} \int_a^{ka} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{a\to0^+} \ln(x)\Big|_a^{ka} = \lim_{a\to0^+} \ln\left(\frac{ka}{a}\right) = \lim_{a\to0^+} \ln(k) = \ln(k).$$

[1] Última Atualização: 09/08/2022

(1) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (x^{\frac{1}{n}} - x^n)\, dx = 1.$

Verdadeiro.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{n}} - x^n\right) dx = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\Big|_0^1 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} - \frac{1^{n+1}}{n+1}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{n}+1} - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

(3) $\int_{-1}^1 \frac{x^{2020}(\cos(x))^{21}\sin(x)}{(x^2+1)^{2020}} |x|\, dx = 0.$

Verdadeiro. O integrando é função ímpar.

ANPEC 2018, Questão 8. Julgue as seguintes afirmativas:

(2) Usando a regra da substituição obtém-se que: $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\ x\ dx;$

Falso. Seja $x = \sin\ \theta$. Então $\sqrt{1-x^2} = \cos\ \theta,\ dx = \cos\ \theta\ d\theta$, para $x = -1$ temos $\theta = -\pi/2$ e para $x = 1$ temos $\theta = \pi/2$. Portanto

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\ \theta\ d\theta.$$

ANPEC 2011, Questão 8. Julgue as afirmativas a seguir.

(0) $\int_1^2 2x^3 e^{x^2}\, dx = 4e^3$

Falso. Usando substituição de variáveis com $u = x^2$, obtemos $du = 2x\, dx$ e

$$\int_1^2 2x^3 e^{x^2}\, dx = \int_1^2 x^2 e^{x^2} 2x\, dx = \int_1^4 ue^u\, du = \int_1^4 u(e^u)'\, du$$
$$= u(e^u)\Big|_1^4 - \int_1^4 e^u\, du = 4e^4 - e - e^u\Big|_1^4 = 4e^4 - e - e^4 + e = 3e^4.$$

(1) Se $g(x) = \int_1^{2\sin\ x} e^{t^2} dt$, então $g'(\pi) = -2$.

Verdadeiro. Pelo teorema fundamental do cálculo, temos

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} h(t)dt\right) = h(f_2(x))f_2'(x) - h(f_1(x))f_1'(x).$$

Para este problema, obtemos

$$\frac{dg(x)}{dx} = e^{(2\sin(x))^2}(2\sin(x))' = 2e^{4\sin^2(x)}\cos(x).$$

Para $x = \pi$, concluímos $g'(\pi) = -2$.

2 $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ é divergente.

Verdadeiro. Integrando, obtemos

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_1^a x^{-1/2}\,dx = \lim_{a\to\infty} 2x^{1/2}\Big|_1^a = \lim_{a\to\infty} 2a^{1/2} - 2 = \infty.$$

3 $\int_{-2}^1 \frac{1}{x^4}\,dx = -\frac{3}{8}$.

Falso. Esta é uma clássica "pegadinha" envolvendo integrias. Note que as contas

$$\int_{-2}^1 \frac{1}{x^4}\,dx = \int_{-2}^1 x^{-4}\,dx = -\frac{x^{-3}}{3}\Big|_{-2}^1 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{24} = -\frac{9}{24} = -\frac{3}{8}$$

estão erradas. De fato, o integrando não está definido em $x = 0$, e o teorema fundamental do cálculo não pode ser utilizado. A forma correta de se tentar calcular esta integral é via

$$\int_{-2}^1 \frac{1}{x^4}\,dx = \int_{-2}^0 \frac{1}{x^4}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x^4}\,dx.$$

Entretanto,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^4}\,dx = \lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{x^4}\,dx = \lim_{a\to 0} -\frac{x^{-3}}{3}\Big|_a^1 = -\lim_{a\to 0}\left[\frac{1}{3} - \frac{a^{-3}}{3}\right]$$

que não existe. O mesmo ocorre com $\int_{-2}^0 \frac{1}{x^4}\,dx$, e portanto $\int_{-2}^1 \frac{1}{x^4}\,dx$ diverge.

4 Se f for contínua em $[a,b]$, então $\int_a^b xf(x)\,dx - x\int_a^b f(x)\,dx = 0$, para todo $x \in [a,b]$.

Falso. A afirmativa não faz o menor sentido, pois $\int_a^b xf(x)\,dx$ é um número dependendo de a e b, e $x\int_a^b f(x)\,dx$ depende de x.

ANPEC 2007, Questão 8. Considere as seguintes informações:

Sejam $I = (0, \infty)$ e $F, f : I \to R$ funções definidas por $F(x) = e^{x \ln x}$ e $f(x) = x^x(1 + \ln x)$.

Julgue os itens abaixo.

4 $f(1)\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ é igual ao comprimento de um círculo de raio $r = 1$.

Falso. Seja $x = 2\sin\theta$, então $4\cos^2\theta = 4 - 4\sin^2\theta$, $dx = 2\cos\theta\; d\theta$, para $x = 0$ temos $\theta = 0$ e para $x = 2$ temos $\theta = \pi/2$. Dado que $f(1) = 1$, temos

$$\begin{aligned} f(1)\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx &= \int_0^{\pi/2} 4\ \cos^2\theta\; d\theta = 4\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2\theta)}{2} d\theta \\ &= 2\theta\Big|_0^{\pi/2} + \sin(2\theta)\Big|_0^{\pi/2} = \pi. \end{aligned}$$

Outra forma de calcular $\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta &= \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi/2} \sin\theta(\cos\theta)'\, d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} + \sin\theta\cos\theta\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \cos\theta\cos\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta \end{aligned}$$

e portanto $\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta = \pi/4$.

ANPEC 2006, Questão 5. Avalie as opções a seguir.

2 $\int\limits_1^e x\log(x)\,dx < \int\limits_1^e x\,dx$.

Verdadeiro. Basta notar que no intervalo $(1, e)$, vale $\log(x) < 1$.

3 $\frac{d}{dx}e^{\int_1^x \frac{dt}{t}} > \frac{1}{x}e^{\int_1^x \frac{dt}{t}}$ para todo $x > 1$.

Falso. Note que

$$\frac{d}{dx}e^{\int_1^x \frac{dt}{t}} = \frac{1}{x}e^{\int_1^x \frac{dt}{t}}.$$

(4) Considere uma função contínua f e defina os conjuntos $A = \{x \in [0,1], f(x) \geq 0\}$ e $B = \{x \in [0,1], f(x) < 0\}$. Então $\int_0^1 f(x)\,dx < \int_{x\in A} f(x)\,dx + \int_{x\in B} |f(x)|\,dx$ sempre que $B \neq \varnothing$.

Verdadeiro. Basta ver que $[0,1] = A \cup B$ e então

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_{x\in A} f(x)\,dx + \int_{x\in B} f(x)\,dx.$$

Como $B \neq \varnothing$, então

$$\int_{x\in B} f(x)\,dx = -\int_{x\in B} |f(x)|\,dx < \int_{x\in B} |f(x)|\,dx.$$

Logo,

$$\int_0^1 f(x)\,dx < \int_{x\in A} f(x)\,dx + \int_{x\in B} |f(x)|\,dx.$$

ANPEC 2021, Questão 14. Julgue a veracidade das afirmativas a seguir.

(1) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função homogênea de grau 1 e $f(2) = 4$, então $\int_0^{\sqrt{3}} f(x)\,dx = 1$.

Falso. Note que $4 = f(2) = 2f(1)$ e portanto $f(1) = 2$. Em particular,

$$\int_0^{\sqrt{3}} f(x)\,dx = \int_0^{\sqrt{3}} xf(1)\,dx = f(1)\int_0^{\sqrt{3}} x\,dx = 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{3}} = 3.$$

(2) $\int_{-2}^2 [\max\{2x, 2x^2\} - x(1+x) - |x - x^2|]\,dx = 0$.

Verdadeiro. veja que

$$\int_{-2}^2 [\max\{2x, 2x^2\} - x(1+x) - |x - x^2|]\,dx$$
$$= \int_{-2}^0 2x^2\,dx + \int_0^1 2x\,dx + \int_1^2 2x^2\,dx - 2\int_0^2 x^2\,dx - \int_{-2}^0 |x - x^2|\,dx - \int_0^2 |x - x^2|\,dx$$
$$= \int_0^1 2x\,dx + \int_1^2 2x^2\,dx - \int_{-2}^0 -x + x^2\,dx - \int_0^1 x - x^2\,dx - \int_1^2 -x + x^2\,dx$$
$$= \int_0^1 2x\,dx + \int_1^2 2x^2\,dx + \int_{-2}^0 x\,dx - \int_{-2}^0 x^2\,dx - \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 x\,dx - \int_1^2 x^2\,dx = 0$$

Esta conta obviamente consome muito tempo. Uma alternativa melhor seria perceber que

$$\max\{2x, 2x^2\} - x(1+x) - |x - x^2| = 0$$

para todo $x \in [-2, 2]$.

3 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+e^x}\, dx = 1.$

Verdadeiro. Note que o integrando não é função par. Entretanto podemos explorar outra simetria. Sempre que uma integral de uma função $f(x)$ é calculada em $(-a, a)$, vale

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{a} f(-x)\, dx.$$

Para ver isto, basta substituir $u = -x$. Então, chamando a integral de

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+e^x}\, dx,$$

temos que

$$\begin{aligned} 2I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+e^x}\, dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(-x)}{1+e^{-x}}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+e^x} + \frac{\cos x}{1+e^{-x}}\, dx \\ = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \frac{1+e^{-x}+1+e^x}{(1+e^x)(1+e^{-x})}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = 2. \end{aligned}$$

Portanto $I = 1$, i.e., o valor da integral da afirmativa é 1.

4 Se definimos a função $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \int_0^x \left(\int_1^t \frac{1}{u^2} du \right) dt$, então $f'(x) = \ln x^2$.

Falso. Para simplificar, chame $h(t) = \int_1^t \frac{1}{u^2} du$. Logo, $f(x) = \int_0^x h(t)\, dt$, e pelo teorema fundamental do cálculo,

$$f'(x) = h(x) = \int_1^x \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u}\Big|_1^x = -\frac{1}{x} + 1.$$

19.1.2. Áreas planas. Integrais envolvendo cálculo de áreas planas.

ANPEC 2013, Questão 15.

Calcule a seguinte integral dupla: $\frac{140}{33}\int\int_D (x^2+y)\,dxdy$, sendo D a região entre as parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$.

Note que a região compreendida é dada por

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\, x^2 < y < \sqrt{x}\}.$$

Basta então calcular

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2+y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left[x^2(\sqrt{x}-x^2) + \frac{x}{2} - \frac{x^4}{2}\right] dx$$
$$= \left(\frac{2}{7}x^{7/2} - \frac{3}{10}x^5 + \frac{x^2}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{7} - \frac{3}{10} + \frac{1}{4} = \frac{33}{140}.$$

Logo, a resposta é 1.

ANPEC 2004, Questão 14.

Considere a região do plano $B = \{(x,y) \in \Re^2 / x+y \leq 6 \; e \; x,y \geq 0\}$ e a função $f(x,y) = xy$. Calcule a integral dupla $\int\int_B f(x,y)\,dy\,dx$.

Note que

$$\int\int_B f(x,y)dy\,dx = \int_0^6 \int_0^{6-x} xy\,dy\,dx = \int_0^6 x\frac{y^2}{2}\Big|_0^{6-x} dx = \frac{1}{2}\int_0^6 x(6-x)^2\Big|_0^{6-x} dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^6 36x - 12x^2 + x^3\,dx = \frac{1}{2}[18x^2 - 4x^3 + \frac{1}{4}x^4\Big|_0^6] = \frac{1}{2}[18\times 36 - 4\times 6\times 36 + \frac{1}{4}36\times 36]$$
$$= 18[18 - 24 + 9] = 54.$$

19.1.3. Integrais impróprias.

ANPEC 2015, Questão 11. Julgue as seguintes afirmativas:

0 A integral $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ é uma integral imprópria divergente;

Falso. Basta fazer as contas:

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}(-e^{-x}\Big|_0^b) = \lim_{b\to\infty}(1-e^{-b}) = 1.$$

3 A integral $\int_{-\infty}^{2} \frac{8}{(4-x)^2}\, dx$ converge a 4;

Verdadeiro, pois

$$\int_{-\infty}^{2} \frac{8}{(4-x)^2}\, dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{2} \frac{8}{(4-x)^2}\, dx = \lim_{a\to-\infty} 8(4-x)^{-1}\Big|_a^2 = \lim_{a\to-\infty} \frac{8}{2} - \frac{8}{(4-a)} = 4.$$

4 A integral $\int_{-\infty}^{\infty} x\, dx$ é igual à integral $\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} x\, dx$.

Falso. Note que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} x\, dx = 0.$$

e portanto o limite existe. Mas para $\int_{-\infty}^{\infty} x\, dx$ existir, as duas integrais $\int_{0}^{\infty} x\, dx$ e $\int_{-\infty}^{0} x\, dx$ têm que existir. E neste caso isto é falso.

ANPEC 2006, Questão 10. Avalie as afirmativas a seguir.

0 $\int_0^\infty xe^{-x}\, dx = 1.$

Verdadeiro. Uma integração por partes nos dá

$$\int_0^\infty xe^{-x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b xe^{-x}\, dx = \lim_{b\to\infty} xe^{-x}\Big|_0^b + \int_0^b e^{-x}\, dx = -\lim_{b\to\infty} e^{-x}\Big|_0^b = 1.$$

1 $\int\limits_0^\infty x^2 e^{-x}\, dx = 2.$

Verdadeiro. Basta fazer as contas e usar 1.

2 Se $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\, dx$, para n inteiro positivo, então $\Gamma(n) = n$.

Falso. Basta usar os itens 1 e 2 e ver que a afirmativa é falsa para $n = 1$ e $n = 2$.

4 $\int_0^\infty \frac{1}{x} e^{-x}\, dx = \infty.$

Verdadeiro. Basta notar que

$$\int_0^\infty \frac{1}{x} e^{-x}\, dx > \int_0^1 \frac{1}{x} e^{-x}\, dx > \frac{1}{e} \int_0^1 \frac{1}{x}\, dx = \infty.$$

ANPEC 1990, Questão 13.

Determine o valor de $\int_0^\pi e^t \cos 2t\, dt$ e assinale cada opção abaixo como falsa ou verdadeira.

(0) $\frac{1}{5}(e^{2\pi} - 1)$.
(1) $\frac{1}{3}(e^{\pi} + 1)$.
(2) $e^{2\pi}$.
(3) $\frac{1}{5}(e^{\pi} - 1)$.
(4) $\frac{2}{3}e^{2\pi}$.

Note que esta integral pode ser calculada por integrações por partes repetidas:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^t \cos 2t\, dt &= \int_0^\pi (e^t)' \cos 2t\, dt = e^t \cos 2t\Big|_0^\pi + 2\int_0^\pi e^t \sin 2t\, dt \\ &= (e^\pi - 1) + 2\int_0^\pi (e^t)' \sin 2t\, dt = (e^\pi - 1) + e^t \sin 2t\Big|_0^\pi - 4\int_0^\pi e^t \cos 2t\, dt \\ &= (e^\pi - 1) - 4\int_0^\pi e^t \cos 2t\, dt\end{aligned}$$

e portanto

$$\int_0^\pi e^t \cos 2t\, dt = \frac{1}{5}(e^\pi - 1).$$

19.2. Questões ANPEC Resolvidas

Exercício 188 (ANPEC 2022, Questão 6). *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes continuamente diferenciável. Julgue as afirmações abaixo de acordo com a sua veracidade:*

(0) *Se todo elemento do intervalo $[0,1]$ é ponto de máximo local da função f, então $\int_0^1 f''(x)\, dx < 0$.*
(1) *Se $f'(x^*) = -1$ e $f''(x^*) < 0$, então x^* é ponto de máximo local da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) + x$.*
(2) *Se para todo natural $n \geq 1$ vale que $f(c) \geq f(x) - \frac{1}{n}$ para todo x, então $f'(c) = 0$.*
(3) *Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $g(x) = f(e^x)$, então $g'(x) = f'(x)e^x$.*

4) *Se* $0 \leq f(x) \leq 1$, *então* $0 \leq f''(x) \leq 1$.

0) **Falso.**
1) **Verdadeiro.**
2) **Verdadeiro.**
3) **Falso.**
4) **Falso.**

Exercício 189 (ANPEC 2022, Questão 15). *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função duas vezes continuamente diferenciável tal que* $f'(x) - f(x) = e^{2x}$ *e* $f(0) = 1$. *Encontre o valor de* $|\int_0^{\ln(5)} f(x)\,dx|$.

Exercício 190 (ANPEC 2021, Questão 4). *Considere as funções* $f(x) = \int_0^x e^{t^2}dt$ *e* $g(x) = \int_0^x e^{2t^2}dt$ *definidas no intervalo* $[0, +\infty)$. *Determine o valor* $H = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f^2(x)}{g(x)}$.

Exercício 191 (ANPEC 2021, Questão 14). *Julgue a veracidade das seguintes afirmativas:*

0) $\lim\limits_{a\to 0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = +\infty$.
1) *Se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função homogênea de grau 1 e* $f(2) = 4$, *então* $\int_0^{\sqrt{3}} f(x)\,dx = 1$.
2) $\int_{-2}^2 [\max\{2x, 2x^2\} - x(1 + x) - |x - x^2|]\,dx = 0$.
3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\, x}{1+e^x}\,dx = 1$.
4) *Se definimos a função* $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ *por* $f(x) = \int_0^x \left(\int_1^t \frac{1}{u^2}du\right)dt$, *então* $f'(x) = \ln x^2$.

Exercício 192 (ANPEC 2021, Questão 15). *Seja* $V = \int\int_D f(x, y)\,dxdy$, *em que* $f(x, y) = (x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$ *e* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1\}$. *Calcule* $20V$.

Exercício 193 (ANPEC 2020, Questão 2). *Considere a função* $f : X \to Y$ *dada por* $f(x) = \max\{x, -x\}, \forall x \in X$, *em que* $X = [-1, 0] \cup [1, 2]$ *e* $Y = [0, 2]$.

(0) f *é uma função injetora.*
(1) f *é uma função sobrejetora.*
(2) f *admite função inversa* $f^{-1} : Y \to X$.
(3) f^{-1} *não é contínua em* Y.
(4) $\int_0^2 f^{-1}(t)dt > \int_1^2 f(t)dt$.

Solução

(0) **Falso.**
(1) **Verdadeiro.**
(2) **Falso.**
(3) **Verdadeiro.**
(4) **Falso.**

Exercício 194 (ANPEC 2020, Questão 8). *Julgue a veracidade das seguintes afirmações:*

(0) *Dada uma constante* $k > 1, \lim_{a \to 0^+} \int_a^{ka} \frac{1}{x}\, dx = 0$.
(1) $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 (x^{\frac{1}{n}} - x^n)\, dx = 1$.
(2) $\int_0^\pi e^x \sin(x)\, dx = 1 + e^\pi$.
(3) $\int_{-1}^1 \frac{x^{2020}(\cos(x))^{21}\sin(x)}{(x^2+1)^{2020}} |x|\, dx = 0$.
(4) $\ln(2) > 2 \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx$.

Solução

(0) **Falso.**

$$\lim_{a \to 0^+} \int_a^{ka} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{a \to 0^+} \ln(x)\Big|_a^{ka} = \lim_{a \to 0^+} \ln\left(\frac{ka}{a}\right) = \lim_{a \to 0^+} \ln(k) = \ln(k).$$

(1) **Verdadeiro.**

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left(x^{\frac{1}{n}}-x^n\right)dx=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\Big|_0^1=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}-\frac{1^{n+1}}{n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{n}+1}-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

(2) **Falso.**

$$\int_0^\pi e^x\sin(x)\,dx=e^x\sin(x)\big|_0^\pi-\int_0^\pi e^x\cos(x)\,dx,$$

$$=e^x\sin(x)\big|_0^\pi-e^x\cos(x)\big|_0^\pi-\int_0^\pi e^x\sin(x)\,dx.$$

Então

$$2\int_0^\pi e^x\sin(x)\,dx=e^x\sin(\pi)-e^0\sin(0)-e^\pi\cos(\pi)+e^0\cos(0)$$

$$2\int_0^\pi e^x\sin(x)\,dx=e^\pi+1$$

Portanto

$$\int_0^\pi e^x\sin(x)\,dx=\frac{1+e^\pi}{2}$$

(3) **Verdadeiro.** *O integrando é função ímpar.*

(4) **Falso.**

$$2\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\,dx=\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}\,dx=\int_0^1\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\ln(x^2+1)\Big|_0^1=\ln(2)-\ln(1)=\ln(2).$$

Exercício 195 (ANPEC 2020, Questão 11). *Calcule o valor da integral* $\int_0^3\left(\int_{\frac{4x}{3}}^{\sqrt{25-x^2}}6x\,dy\right)dx$.

Solução

Resposta 50

EXERCÍCIO 196 (ANPEC 2019, Questão 10). *Considere que $f(x), g(x)$ e $h(x)$ são funções diferenciáveis e que tanto a expressão $\frac{df(x)}{dx}$ como a expressão $f'(x)$ denotam a derivada da função $f(x)$. Avalie as expressões abaixo quanto a sua veracidade:*

0. *Se $\int f(x)\,dx = e^{x^2}$, então $f(x) = x^2 e^{x^2}$.*
1. *Se a expansão em Taylor até terceira ordem de $f(x)$ em $x = 0$ é $P_3(x) = 5x^3$, então podemos afirmar que $f(x)$ tem um ponto de inflexão em $x = 0$.*
2. $\int_1^e (\ln x)\,dx = 1$.
3. $\int_{-0,5}^{0,5} \frac{2x}{1-x^2}\,dx = \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{-u} du = \ln(0,75) - \ln(0,25)$, *em que* $u = x^2 - 1$.
4. *Como $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)h(x)] = f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$, então $\int_a^b f(x)g(x)h'(x)\,dx = [f(b)g(b)h(b)-f(a)g(a)h(a)]-\int_a^b[f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)]\,dx$.*

Solução

0. **Falso.**

Note que

$$\frac{d\, e^{x^2}}{dx} = 2xe^{x^2} = f(x).$$

1. **Verdadeiro.**

Pela formula de Taylor de terceira ordem em $x = 0$, temos

$$P_3 = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)(x-0) + \frac{1}{2!}f''(0)(x-0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)(x-0)^3,$$
$$P_3 = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 = 5x^3.$$

Então

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0 \ \text{ e } \ f'''(0) = 30$$

Dado que $f'(0) = 0$, então $x = 0$ é ponto crítico, mas não é mínimo e máximo, já que $f''(0) = 0$. Então, $x = 0$ é candidato a ponto de inflexão. Agora, dado que $f'''(0) = 30 > 0$, então existe um intervalo $(-\delta, \delta)$ tal que f'' é crescente, assim podemos concluir que $x = 0$ é ponto de inflexão.

② **Verdadeiro.**

Integrando por partes, obtemos

$$\int_1^e \ln(x)\,dx = \ln(x)x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}.x\,dx = \ln(x)x\Big|_1^e - x\Big|_1^e$$
$$\int_1^e \ln(x)\,dx = \ln(e)e - \ln(1) - e + 1 = 1.$$

③ **Falso.**

Considere $u_1 = u_2$, então

$$\int_{u_1}^{u_2} -\frac{1}{u}du = 0 \neq \ln(0.75) - \ln(0.25)$$

④ **Verdadeiro.**

Integrando por partes, temos

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)h'(x)\,dx &= f(x)g(x)h(x)\Big|_a^b - \int_a^b \Big(f(x)g(x)\Big)' h(x)\,dx\\ &= f(x)g(x)h(x)\Big|_a^b - \int_a^b \Big[f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x)\Big]\,dx\\ &= \Big[f(b)g(b)h(b) - f(a)g(a)h(a)\Big] - \int_a^b \Big[f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x)\Big]\,dx.\end{aligned}$$

Exercício 197 (ANPEC 2019, Questão 15). *Seja $V = \int_D f(x,y)\,dxdy$, em que $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \;\; e \;\; y \geq 0\}$ e $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$. Calcule $\frac{100}{\pi}V$.*

Solução

Do conjunto D, temos

FALTA FIGURA

Então, $x \in [-1,1]$ *e* $0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$*. Logo*

$$V = \int_D f(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2)dy\,dx,$$
$$V = \int_{-1}^{1}\left[(1-x^2)y - \frac{y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx,$$
$$V = \int_{-1}^{1}\frac{2}{3}\sqrt{1-x^2}^3\,dx.$$

Agora, seja $x = \sin(\theta)$*, então* $-1 \leq \sin(\theta) \leq 1$*, assim* $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ *e* $dx = \cos(\theta)d\theta$*. Logo*

$$V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{2}{3}\sqrt{1-\sin^2(\theta)}^3\cos(\theta)d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{2}{3}\cos^4(\theta)d\theta = \frac{2}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)^2 d\theta$$
$$V = \frac{1}{6}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big(1+2\cos(2\theta)+\cos^2(2\theta)\Big)d\theta$$
$$V = \frac{1}{6}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big(1+2\cos(2\theta)+\frac{1}{2}+\frac{\cos(4\theta)}{4}\Big)d\theta$$
$$V = \frac{1}{6}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{3}{2}+2\cos(2\theta)+\frac{\cos(4\theta)}{4}\right)d\theta$$
$$V = \frac{1}{6}\left[\frac{3}{2}\theta+\sin(2\theta)+\frac{\sin(4\theta)}{16}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

Logo

$$\frac{100}{\pi}y = \frac{100}{\pi}.\frac{\pi}{4} = 25.$$

Exercício 198 (ANPEC 2018, Questão 8). *Julgue as seguintes afirmativas:*

(0) *Considere* $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ *definida como* $f(x) = \sqrt{1-x^2}$*. Então* $\int_{-1}^{1} f(x)^2\,dx = 2$*;*

1. *Depois de resolver a integral* $\int x^2 \ln x\, dx$, *resulta que o coeficiente do termo* x^3 *é* $\frac{1}{9}$;
2. *Usando a regra da substituição obtém-se que:* $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\ x\ dx$;
3. *Se* $f(x) = x^3 - 5x$, *então* $f(-2.00001) + f(2.00001) = 0$;
4. *Se* $f(x) = 2x^2 + \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x} + 5x$, *então* $f'(\frac{1}{x}) + x^2 f'(x) = 0$.

Solução

0. **Falso.**

A integral

$$\int_{-1}^{1} f(x)^2\, dx = \int_{-1}^{1} (1-x^2)\, dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 2 - \frac{2}{3}.$$

1. **Falso.**

Integrando por partes

$$\int x^2 \ln x\, dx = \int \left(\frac{x^3}{3}\right)' \ln x\, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3}\, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c,$$

onde c é uma constante.

2. **Falso.**

Seja $x = \sin\ \theta$. *Então* $\sqrt{1-x^2} = \cos\ \theta$, $dx = \cos\ \theta\ d\theta$, *para* $x = -1$ *temos* $\theta = -\pi/2$ *e para* $x = 1$ *temos* $\theta = \pi/2$. *Portanto*

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\ \theta\ d\theta.$$

3. **Verdadeiro.**

Seja $x = -2.0001$, *então*

$$f(x) + f(-x) = x^3 - 5x - x^3 + 5x = 0.$$

4. **Verdadeiro.**

Derivando a função f, *temos*

$$f'(x) = 4x - \frac{4}{x^3} - \frac{5}{x^2} + 5.$$

Então

$$f'\left(\frac{1}{x}\right) + f'(x) = \frac{4}{x} - 4x^3 - 5x^2 + 5 + x^2\left(4x - \frac{4}{x^3} - \frac{5}{x^2} + 5\right)$$
$$= \frac{4}{x} - 4x^3 - 5x^2 + 5 + 4x^3 - \frac{4}{x} - 5 + 5x^2 = 0.$$

EXERCÍCIO 199 (ANPEC 2018, Questão 15). *Seja* $V = \int_D f(x,y)dy\,dx$*, em que* D *é a região delimitada por* $x = 0, y = 0$ *e* $x + y = 1$ *e* $f(x,y) = 1 - x - y$*. Calcule* $6V$*.*

Solução

RESPOSTA 1

EXERCÍCIO 200 (ANPEC 2017, Questão 14). *Sabendo que* $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$*, defina* $I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+(2y-x)^2+2y^2)}\,dxdy$*.*
Calcule $\frac{8\sqrt{2}}{\pi}I$*.*

Solução

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+2(y-x)^2+2y^2)}\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(x-y)^2-4y^2}\,dx\,dy.$$
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4y^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(x-y)^2}\,dx\,dy.$$

Substituindo $x - y = \frac{z}{\sqrt{2}}$*, temos* $dx = dz/\sqrt{2}, -\infty < z < \infty$ *e*

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4y^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-z^2}}{\sqrt{2}}dz\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4y^2}dy.$$

Substituindo $w = \frac{y}{2}$*, temos* $dw = dy/2, -\infty < w < \infty$ *e*

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-w^2}}{2}dw = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Portanto

$$\frac{8\sqrt{2}}{\pi}\,I = 4.$$

Exercício 201 (ANPEC 2016, Questão 7). *Analise a verdade ou falsidade das seguintes afirmações:*

(0) *Sabendo que* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}$, *então* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2+3x}\, dx = \sqrt{\pi e^{9/8}}$;

(1) *A área compreendida entre as curvas* $y = -x^2 + 6$ *e* $y = x$ *é* $\frac{125}{6}$;

(2) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(nx)\, dx = \frac{2(-1)^{n/2}}{n}$, *se* n *é um número par;*

(3) $\int\limits_{1}^{e^2} \ln(x)\, dx = \frac{7e^8+1}{16}$;

(4) *Seja* $F(x) = \int\limits_{e^x}^{e^{x^2}} (\ln(t))^2 dt$. *Então* $F'(2) = 4(16\, e^4 - e^2)$.

Solução

(0) **Falso.**

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2+3x}\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-2[(x-3/4)^2 - \frac{9}{16}]}\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-2(x-3/4)^2} . e^{9/8}\, dx,$$

$$= e^{9/8} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-2(x-3/4)^2}\, dx.$$

Seja $t/2 = x - 3/4$, *então* $t \in (-\infty, +\infty)$ *e* $\frac{1}{2}\frac{dt}{dx} = 1$.
Logo, $dt = 2\, dx$. *Assim, temos*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2+3x} = \frac{e^{9/8}}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t/2)^2} dt = \frac{e^{9/8}}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \frac{e^{9/8}}{2}\sqrt{2\pi}.$$

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Falso.**

(3) **Verdadeiro.**

4 **Verdadeiro.**

Pelo teorema do calculo fundamental, temos

$$F_1(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt, \qquad F_1'(x) = f(g(x))g'(x),$$
$$F_2(x) = \int_{h(x)}^{a} f(t)dt, \qquad F_2'(x) = -f(h(x))h'(x),$$
$$F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt, \qquad F'(x) = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x).$$

Então

$$F'(x) = \left(\ln(e^{x^2})\right)^2 e^{x^2} 2x - (\ln(e^x))^2 e^x$$
$$F'(2) = 16e^4 4 - 4e^2$$
$$F'(2) = 4(16e^4 - e^2)$$

Exercício 202 (ANPEC 2016, Questão 10). *Seja* $R = \left\{(x,y) \in [0,4]X[0,4] |\, \min\{x,x^2\} \leq y \leq \max\{x,x^2\}\right\}$ *e* $f(x,y) = xy^2$. *Calcular* $\int\int_R f(x,y)\, dxdy$. *Apresente como resposta a parte inteira desse valor.*

Solução

Para $x \in [0,1]$, *então* $\min\{x,x^2\} = x^2$ *e* $\max\{x,x^2\} = x$. *Para* $x \in [1,2]$, *temos* $\min\{x,x^2\} = x$ *e* $\max\{x,x^2\} = x^2$. *Finalmente, para* $x \in [1,2]$, *obtemos* $\min\{x,x^2\} = x$ *e* $\max\{x,x^2\} = x^2$, *agora notei que* $y \in [0,4]$, *então* $\max\{x,x^2\} = 4$.

Assim, juntamos

$$\int\int_R f(x,y)\,dxdy = \int_0^1\int_{x^2}^{x} xy^2dy\,dx + \int_1^2\int_x^{x^2} xy^2dy\,dx + \int_2^4\int_x^4 xy^2dy\,dx$$
$$= \int_0^1 x\frac{y^3}{3}\Big|_{x^2}^{x} + \int_1^2 x\frac{y^3}{3}\Big|_x^{x^2} dx + \int_2^4 x\frac{y^3}{3}\Big|_x^4 dy$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{x^4}{3} - \frac{x^7}{3}\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{x^7}{3} - \frac{x^4}{3}\right) dx + \int_2^4 \left(x\frac{4^3}{3} - \frac{x^4}{3}\right) dx$$
$$= \left(\frac{x^5}{15} - \frac{x^8}{24}\right)\Big/_0^1 + \left(\frac{x^8}{24} - \frac{x^5}{15}\right)\Big/_1^2 + \left(\frac{x^2}{2}\frac{4^3}{3} - \frac{x^5}{15}\right)\Big/_2^4$$
$$= \frac{1}{15} - \frac{1}{24} + \frac{256}{24} - \frac{32}{15} - \frac{1}{24} + \frac{1}{15} + \frac{1024}{6} - \frac{1024}{15} - \frac{256}{6} + \frac{32}{15}$$
$$= \frac{2}{15} - \frac{2}{24} + \frac{1024}{6} - \frac{1024}{15} - 3\frac{256}{24}$$
$$= 0.133 - 0.083 - 170.666 - 32$$
$$= 0.133 - 0.083 + 170.666 - 68.266 - 32$$
$$= 0.050 + 170.666 - 100.266$$
$$= 70.450.$$

EXERCÍCIO 203 (ANPEC 2015, Questão 8). *Julgue as seguintes afirmativas:*

(0) *Seja* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2}$. *Então a função definida por* $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$ *é uma função decrescente;*

(1) *A função* F *do item anterior é côncava no intervalo* $(0,+\infty)$*;*

(2) *Seja* $h(x) = f(x, g(x))$, *com* f *e* g *de classe* C^2 *(isto é,* f *e* g *duas vezes diferenciáveis, com derivadas segunda contínuas). A segunda derivada de* h *é dada pela fórmula* $\left(\frac{\partial f}{\partial x} + g\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$*;*

(3) *Defina* $r(x) = -\frac{f''(x)}{f'(x)}$. *A derivada da função* r *é dada pela fórmula* $r^2 + r\frac{f'''(x)}{f''(x)}$*;*

(4) *Se no item anterior* f *for estritamente côncava e estritamente crescente, então, supondo que* $f'''(x) < 0$, *podemos afirmar que é estritamente crescente.*

Solução

0 **Falso.**

1 **Verdadeiro.**

2 **Falso.**

3 **Verdadeiro.**

4 **Verdadeiro.**

EXERCÍCIO 204 (ANPEC 2015, Questão 11). *Julgue as seguintes afirmativas:*

0 *A integral* $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ *é uma integral imprópria divergente;*

1 *A integral imprópria* $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ *é convergente;*

2 *A integral imprópria* $\int_1^\infty \frac{1}{(x+1)^3}\,dx$ *converge a* 8*;*

3 *A integral* $\int_{-\infty}^2 \frac{8}{(4-x)^2}\,dx$ *converge a* 4*;*

4 *A integral* $\int_{-\infty}^\infty x\ dx$ *é igual à integral* $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-n}^n x\ dx$*.*

Solução

0 **Falso.**

1 **Falso.**

2 **Falso.**

3 **Verdadeiro.**

4 **Falso.**

EXERCÍCIO 205 (ANPEC 2014, Questão 12). *A função* $f(x,y) = kxy^2$*,* $k > 0$*, está definida no conjunto* $C = \left\{(x,y) \in R^2/0 \le x \le 1, (x/2) \le y \le x\right\}$*. Avalie as seguintes asserções:*

0 *Se* $\int\int\limits_C f(x,y)\,dxdy = 1$*, então o valor de* k *é* 1*.*

1 *Se* $k = 1$*, então* $\int\int\limits_C xf(x,y)\,dxdy = 0,048$*.*

2 *Considere* $k = 1$*. Para cada* $y \in [0,1]$ *definimos o conjunto* $C_y = \left\{x \in [0,1]/(x,y) \in C\right\}$ *e a função* $f_Y(y) = \int\limits_{C_y} f(x,y)\,dx$*. Então* $\frac{f_Y(3/4)}{f_Y(1/4)} = 2,33$*.*

3 *A área da região* C *é* $\int\int\limits_C dxdy$*.*

(4) *Existe* $(x_0, y_0) \in C$ *tal que* $\int\int_C f(x,y)\,dxdy = f(x_0,y_0)$.

Solução

(0) **Falso.**
(1) **(A) acho que é de Anulado.**
(2) **Falso.**
(3) **Verdadeiro.**
(4) **Verdadeiro.**

Exercício 206 (ANPEC 2014, Questão 14). *Calcule a parte inteira de* $\int_1^e x^3 \ln(x)\,dx$. *Considere* $e^4 = 54,6$.

Solução

Resposta 10

Exercício 207 (ANPEC 2013, Questão 8). *Analise a veracidade das seguintes afirmações:*

(0) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} x^4 \sin(x)\,dx = 0$.
(1) *Se* $P(x)$ *é um polinômio de grau* n, *então* $\int P(x)\,dx$ *é um polinômio de grau* $n-1$.
(2) $\int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right) dx = 2 - \ln(3)$.
(3) *A área compreendida entre* $f(x) = \frac{1}{x}$ *e* $g(x) = -\frac{x}{5} + \frac{6}{5}$ *é igual a* $\frac{6}{5} - \ln(5)$.
(4) $\int f(x)g(x)\,dx = \left(\int f(x)\,dx\right) g(x) + f(x)\left(\int g(x)\,dx\right)$.

Solução

(0) **Verdadeiro.**
(1) **Falso.**
(2) **Verdadeiro.**
(3) **Falso.**

4 **Falso.**

EXERCÍCIO 208 (ANPEC 2013, Questão 15). *Calcule a seguinte integral dupla:* $\frac{140}{33}\int\int_D (x^2+y)\,dxdy$, *sendo* D *a região entre as parábolas* $y=x^2$ *e* $x=y^2$.

Solução

Resposta 1

EXERCÍCIO 209 (ANPEC 2012, Questão 10). *Julgue as afirmativas:*

0 $\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = 0$.
1 $\int_1^e \ln x\,dx = 1$, *em que* e *é a base do logaritmo natural.*
2 $\int_1^\infty \frac{dx}{(4x+3)^2} = \frac{1}{28}$.
3 *Se* $y=\int_0^{x^2}(3t+2)^5\,dx$, *então* $\frac{dy}{dx}=(3x^2+2)^5$.
4 *A área da região limitada pelos gráficos de* $y=x^3, y=12-x^2$ *e* $x=0$ *é* $\frac{52}{3}$.

Solução

0 **Falso.**
1 **Verdadeiro.**
2 **Verdadeiro.**
3 **Falso.**
4 **Verdadeiro.**

EXERCÍCIO 210 (ANPEC 2012, Questão 14). *Seja* $S=\{(x,y)\in R^2 : x\geq -2 \;\; e \;\; 0\leq y\leq e^{-x}\}$, *em que* e *é a base do logaritmo natural. Se* $k=\frac{8}{e^4}$, *calcule o valor da integral dupla* $\int\int_s kyx^2 \;\; dxdy$.

Solução

Resposta 5

EXERCÍCIO 211 (ANPEC 2011, Questão 8). *Julgue as afirmativas:*

(0) $\int_1^2 2x^3 e^{x^2}\,dx = 4e^3$
(1) *Se* $g(x) = \int_1^{2\sin\, x} e^{t^2} dt$, *então* $g'(\pi) = -2$.
(2) $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ *é divergente.*
(3) $\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^4}\,dx = -\frac{3}{8}$.
(4) *Se* f *for contínua em* $[a,b]$, *então* $\int_a^b xf(x)\,dx - x\int_a^b f(x)\,dx = 0$, *para todo* $x \in [a,b]$.

Solução

(0) **Falso.**

(1) **Verdadeiro.**

Pelo teorema fundamental do cálculo, temos

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} h(t)dt\right) = h(f_2(x))f_2'(x) - h(f_1(x))f_1'(x).$$

Para este problema, obtemos

$$\frac{dg(x)}{dx} = e^{(2\sin(x))^2}(2\sin(x))' = 2e^{4\sin^2(x)}os(x).$$

Para $x = \pi$, *concluímos* $g'(\pi) = -2$.

(2) **Verdadeiro.**

Integrando, obtemos

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_1^a x^{-1/2}\,dx = \lim_{a\to\infty} 2x^{1/2}\Big|_1^a = \lim_{a\to\infty} 2a^{1/2} - 2 = \infty.$$

(3) **Falso.**

Calculando a integral

$$\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^4}\,dx = \int_{-2}^{1} x^{-4}\,dx = -\frac{x^{-3}}{3}\Big|_{-2}^{1} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{24} = \frac{7}{24}.$$

④ **Falso.**

Consideremos $f(x) = 1$, $a = 0$ *e* $b = 1$. *Então,*

$$\int_a^b xf(x)\,dx - x\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx - x\int_0^1 dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - x^2\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}.$$

Exercício 212 (ANPEC 2011, Questão 13). *Seja* $A = \{(x,y) \in R^2 : 1 \leq e^x \leq 5 \;\; e \;\; 1 \leq e^y \leq 2\}$ *e* $f : A \to R$ *a função dada por* $f(x,y) = 2x - y$. *Calcule a integral:* $\int_A e^{f(x,y)}\,dxdy$.

Solução

Resposta 6

Exercício 213 (ANPEC 2010, Questão 3). *Sejam* $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *e* $g : [-\sqrt{5}, \sqrt{5}] \to \mathbb{R}$ *funções tais que* $f(x) = \ln x$ *e* $g(x) = x\sqrt{5 - x^2}$. *Julgue as afirmativas:*

⓪ $\int\limits_1^e f(x)\,dx = \frac{1}{e}$;

① $\int \frac{x}{x^2+7}\,dx = \frac{f(x^2+7)}{2} + c$, *em que* c *é uma constante arbitrária;*

② *A área delimitada pelo gráfico de* g, *o eixo* x *e as retas verticais* $x = -1$ *e* $x = 2$ *é* $7/3$;

③ $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}} = 2$;

④ *Se* $\int\limits_a^b h(x)\,dx > 0$, *então* $h(x) \geq 0$, *para todo* $x \in [a,b]$.

Solução

⓪ **Falso.**

① **Verdadeiro.**

② **Falso.**

③ **Verdadeiro.**

④ **Falso.**

Exercício 214 (ANPEC 2009, Questão 14). *Seja $f : R \to R$ uma função duas vezes diferenciável, tal que $f(0) = f'(0) = 1$ e $f'' + 2f' + f = 0$. Se $A = \ln\left(\frac{f(4)}{9}\right)$, calcule o valo de $\alpha = \left[A \int\limits_0^1 e^t f(t)dt\right]^2$.*

Solução

da hipotési $f''(t)e^t + 2f'(t)e^t + f(t)e^t = 0$, logo aplicamos a integral

$$\int_0^x f''(t)e^t dt + 2\int_0^x f'(t)e^t dt + \int_0^x f(t)e^t dt = 0$$

Integrando por partes, o primero termo

$$\begin{aligned} f'(x)e^x - 1 - \int_0^x f'(t)e^t dt + 2\int_0^x f'(t)e^t dt + \int_0^x f(t)e^t dt = 0 \\ f'(x)e^x - 1 + \int_0^x f'(t)e^t dt + \int_0^x f(t)e^t dt = 0 \end{aligned}$$

De novo, integrando por partes

$$f'(x)e^x - 1 + f(x)e^x - 1 - \int_0^x f(t)e^t dt + \int_0^x f(t)e^t dt = 0.$$

Então

$$f'(x)e^x + f(x)e^x = 2.$$

Novamente, aplicamos integral na equação anterior

$$\int_0^t f'(x)e^x \, dx + \int_0^t f(x)e^x \, dx = \int_0^t 2 \, dx$$

Por último, integrando por partes o primero termo

$$f(t)e^t - 1 - \int_0^t f(x)e^x \, dx + \int_0^t f(x)e^x \, dx = 2t.$$

Portanto

$$f(t) = (2t + 1)e^{-t}.$$

Logo $A = -4$, então $\alpha = 64$.

EXERCÍCIO 215 (ANPEC 2008, Questão 5). *Seja $f : R \to R$ uma função contínua e $F : R \to R$ dada por*

$$F(x) = \int_0^x (1+t^2)f(t)dt.$$

Julgue as afirmativas:

(0) *F é derivável.*

(1) *F é uma primitiva da função f.*

(2) *Se $F(x) = (1-x^2)\cos\, x + 2x\, \sin\, x - 1$, então $f(x) = \cos x$.*

(3) *Se $F(x) = x + x^3/3$, então f é uma função constante.*

(4) *Se $F(x) = (1-x^2)\cos x + 2x\sin x - 1$, então $\int_0^{\pi/2} t^2 f(t)dt = \pi - 1$.*

Solução

(0) **Verdadeiro.**

(1) **Falso.**

(2) **Falso.**

(3) **Verdadeiro.**

(4) **Falso.**

EXERCÍCIO 216 (ANPEC 2008, Questão 9). *Para cada subconjunto $A \subset R$ a função característica $\chi_A : R \to R$ é definida por $\chi_A(x) = 1$, se $x \in A$ e $\chi_A(x) = 0$, se $x \notin A$. Sejam $f, g : R \to R$ funções definidas por*

$$\begin{cases} f(x) = h(x)\chi_Q(x) \\ g(x) = h(x)\chi_{R-Q}(x), \end{cases}$$

em que $Q \subset R$ é o conjunto dos números racionais e $h : R \to R$ é a função definida por $h(x) = x^2$. Julgue as afirmativas:

(0) *f não é diferenciável em $x = 0$.*

(1) *g não é contínua em $x = 0$.*

(2) *$f + g$ é diferenciável em R.*

(3) *$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$, para todo x real.*

(4) *$\int_0^1 f + g = 1/3$.*

Solução

0 **Falso.**
1 **Falso.**
2 **Verdadeiro.**
3 **Falso.**
4 **Verdadeiro.**

EXERCÍCIO 217 (ANPEC 2007, Questão 7). *Seja* $f : R \to R$ *a função dada implicitamente por* $\tan[f(x)] = x$. *Sabendo-se que* $f(R) = (-\pi/2, \pi/2)$, *julgue os itens abaixo:*

0 f *não é uma função diferenciável.*
1 *O Teorema da Função Implícita nos garante que* f *é uma função diferenciável e* $f'(x) = 1/(1+x^2)$.
2 $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = 1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = 1 - f(1) + f(0)$.
3 $\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx = \ln 2 + \pi/2$.
4 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\pi$.

Solução

0 **Falso.**
1 **Verdadeiro.**
2 **Verdadeiro.**
3 **Falso.**
4 **Falso.**

EXERCÍCIO 218 (ANPEC 2007, Questão 8). *Sejam* $I = (0, \inf)$ *e* $F, f : I \to R$ *funções definidas por* $F(x) = e^{x \ln x}$ *e* $f(x) = x^x(1 + \ln x)$. *Julgue os itens abaixo:*

0 *A função* $F : I \to R$ *não é uma primitiva de* f.
1 $\int_1^2 f(x)\,dx = 3$.
2 *Se* $A = \int_1^2 f(x)\cos^2 x\,dx$ *e* $B = \int_1^2 f(x)\sin^2 x\,dx$, *então* $A + B = 4$.
3 *Se* $\int_1^2 [f(x)/F(x)]\,dx = 2\ln(2)$.

(4) *$f(1)\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ é igual ao comprimento de um círculo de raio $r = 1$.*

Solução

(0) **Falso.**

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Falso.**

(3) **Verdadeiro.**

(4) **Falso.**

Seja $x = 2\sin\theta$, então $4\cos^2\theta = 4 - 4\sin^2\theta$, $dx = 2\cos\theta\, d\theta$, para $x = 0$ temos $\theta = 0$ e para $x = 2$ temos $\theta = \pi/2$. Dado que $f(1) = 1$, temos

$$f(1)\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} 4\ \cos^2\theta\ d\theta = 4\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2\theta)}{2} d\theta$$
$$= 2\theta\Big|_0^{\pi/2} + \sin(2\theta)\Big|_0^{\pi/2} = \pi.$$

EXERCÍCIO 219 (ANPEC 2006, Questão 5). *Avalie as opções*

(0) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,dx = 2\int\limits_0^{\pi} \sin(x)\,dx.$

(1) *Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in [0,1]$ então $\int\limits_0^1 f(x)\,dx < 0$.*

(2) $\int\limits_1^e x\log(x)\,dx < \int\limits_1^e x\,dx.$

(3) $\frac{d}{dx}e^{\int\limits_1^x \frac{dt}{t}} > \frac{1}{x}e^{\int\limits_1^x \frac{dt}{t}}$ *para todo $x > 1$.*

(4) *Considere uma função contínua f e defina os conjuntos $A = \{x \in [0,1], f(x) \geq 0\}$ e $B = \{x \in [0,1], f(x) < 0\}$. Então $\int\limits_0^1 f(x)\,dx < \int\limits_{x\in A} f(x)\,dx + \int\limits_{x\in B} |f(x)|\,dx$ sempre que $B \neq \varnothing$.*

Solução

(0) **Falso.**

(1) **Falso.**

(2) **Verdadeiro.**

③ **Falso.**

④ **Verdadeiro.**

EXERCÍCIO 220 (ANPEC 2006, Questão 10). *Avalie as afirmativas:*

⓪ $\int\limits_0^\infty xe^{-x}\,dx = 1$.

① $\int\limits_0^\infty x^2e^{-x}\,dx = 2$.

② *Se* $\Gamma(n) = \int\limits_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx$, *para* n *inteiro positivo, então* $\Gamma(n) = n$.

③ $\int\limits_0^\infty 2xe^{-2x}\,dx = 2$.

④ $\int\limits_0^\infty \frac{1}{x}e^{-x}\,dx = \infty$.

Solução

⓪ **Verdadeiro.**

① **Verdadeiro.**

② **Falso.**

③ **Falso.**

④ **Verdadeiro.**

Considere

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}\,dx + \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx.$$

Note que $e^{-1} < e^{-x} < 1$, *para* $x \in (0,1)$. *Então*

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^{-1}}{x}\,dx &\leq \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}\,dx,\\ e^{-1}\ln(x)\Big|_0^1 &\leq \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}\,dx,\\ -\lim_{a\to 0}\ln(a) &\leq \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}\,dx.\end{aligned}$$

Logo $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}\,dx = \infty$. *Portanto*

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}\,dx + \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx = \infty.$$

EXERCÍCIO 221 (ANPEC 2006, Questão 14). *Para* $f(x) = 2\int_0^{x^2} yx dy$, *calcule* $f'(2)$.

Solução

Resposta 80

EXERCÍCIO 222 (ANPEC 2005, Questão 3). *Avalie as afirmativas:*

(0) *Se* C *é uma constante arbitraria, então* $\int \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} du = \ln\left(u - \sqrt{u^2-1}\right) + C$.

(1) $\int_0^1 \frac{2}{1+x^2}\, dx = \pi$.

(2) $\int_{-1}^1 x^2 \sin(3x)\, dx > 0$.

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}$.

(4) $\int_0^{+\infty} \frac{4}{e^{3x}}\, dx = \frac{4}{3}$.

Solução

(0) **Falso.**

(1) **Falso.**

(2) **Falso.**

(3) **Falso.**

(4) **Verdadeiro.**

EXERCÍCIO 223 (ANPEC 2005, Questão 11). *Calcule* $2\int_1^{e^5} \frac{\ln x}{x}\, dx$, *em que* e^t *é o exponencial de* t.

Solução

Resposta 25

EXERCÍCIO 224 (ANPEC 2005, Questão 13). *Encontre o valor de* $\frac{d}{dt}\big|_{t=2}\left(\int\limits_0^3\int\limits_0^{x-t} xy\ dy\ \ dx\right)$.

Solução

Da hipótese

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=2}\left(\int_0^3\int_0^{x-t} xy\ dy\ \ dx\right) = \int_0^3\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=2}\int_0^{x-t} xy\ dy\right)\,dx$$

Pelo teorema fundamental do calculo,

$$\begin{aligned}\int_0^3\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=2}\int_0^{x-t} xy\ dy\right)\,dx &= \int_0^3 x(x-t)(x-t)'\bigg|_{t=2}\,dx\\ &= \int_0^3 -x(x-2)\,dx = 0.\end{aligned}$$

EXERCÍCIO 225 (ANPEC 2004, Questão 8). *Responda V (verdadeiro) ou F (falso):*

0. $\int_{-\pi}^{\pi} x^3\sin(x)\,dx = 0.$
1. $\int_0^{\infty} x^3e^{-x}\,dx = 2.$
2. *O limite* $\lim_{M\to\infty}\left(\frac{1}{\ln(M)}\int\limits_0^M \frac{x}{1+x^2}\,dx\right)$ *diverge.*
3. *Se* $M(t) = \int\limits_0^{\infty} e^{(t-1)x}\,dx$*, em que* $t<1$*, então* $M'(0)=0$.
4. *Se* $F(y) = y - 1 + \int\limits_1^{y}\ln(x)\,dx$*, então* $F(1)=0$.

Solução

0. **Falso.**
1. **Falso.**
2. **Falso.**
3. **Falso.**
4. **Verdadeiro.**

EXERCÍCIO 226 (ANPEC 2004, Questão 10). *Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):*

⓪ $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \cdot \cos x + 2 \cdot x \cdot \sin x)\, dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$;

① $\left|\int\limits_0^2 (x^4 - 4 \cdot x^2)\, dx\right| < 4$;

② $(f(x) \cdot g(x))$ *é uma primitiva para a função* $(f(x) \cdot g'(x)) + f'(x) \cdot g(x))$;

③ $\int\limits_{-2}^{4} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}}\, dx = \int\limits_{-1}^{2} \sqrt{1 + x^2}\, dx$;

④ $\frac{d}{dx} \int\limits_{-x}^{x} \frac{1}{t^5+1} dt = \frac{2}{1-x^{10}}$.

Solução

⓪ **Verdadeiro.**

① **Falso.**

② **Verdadeiro.**

③ **Falso.**

④ **Verdadeiro.**

Exercício 227 (ANPEC 2004, Questão 14). *Considere a região do plano* $B = \{(x, y) \in \Re^2 / x + y \leq 6 \; e \; x, y \geq 0\}$ *e a função* $f(x, y) = xy$. *Calcule a integral dupla* $\int\int_B f(x, y) dy\, dx$.

Solução

Resposta 54

Exercício 228 (ANPEC 2003, Questão 9). *Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):*

⓪ $\int\limits_{-1}^{0} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}\, dx \leq \frac{1}{3}$.

① $\int\limits_{1}^{2} x \cdot \ln(x)\, dx = -\frac{3}{4} + 2\ln(2)$.

② $\int\limits_{x}^{2x} \frac{1}{t} dt > 1$, *para todo* $x > 0$.

③ $\int\limits_{-1}^{0} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = -\int\limits_{0}^{1} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}\, dx$.

④ $\frac{15}{16}\int\limits_{-1}^{3} x\sqrt{1+x}\,dx = 7$.

Solução

⓪ **Verdadeiro.**

① **Verdadeiro.**

② **Falso.**

③ **Falso.**

④ **Verdadeiro.**

Seja $x = t^2 - 1$. Logo $dx = 2t\,dt$, para $x = -1$ temos $t = 0$ e para $x = 3$ temos $t = 2$. Então

$$\frac{15}{16}\int_{-1}^{3} x\sqrt{1+x}\;dx = \frac{15}{16}\int_{0}^{2}\left(t^2-1\right) t\; 2t\; dt$$
$$= \frac{15}{16}\int_{0}^{2} 2t^4 - 2t^2\; dt = 7.$$

Exercício 229 (ANPEC 2002, Questão 9). *Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):*

⓪ $\int_0^2 e^{x^2-2x+1}(x-1)\,dx = 0$.

① $\int_0^4 \frac{x^2-4}{x+2}\,dx = 0$.

② $\int_2^4 \sqrt{\frac{x^3-x^2-x+1}{x+1}}\,dx = 4$.

③ $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx < 3$.

④ $\int_0^3 \frac{x}{1+x^2}\,dx < 1$.

Solução

⓪ **Verdadeiro.**

① **Verdadeiro.**

② **Verdadeiro.**

③ **Falso.**

④ **Falso.**

Exercício 230 (ANPEC 2001, Questão 2). *A respeito da função* $f : R \to R$ *definida por* $f(x) = x^3 e^{-|x|}$, *responda V (verdadeiro) ou F (falso):*

(0) *A função* f *possui um ponto de máximo global;*
(1) *A função* f *possui um ponto de mínimo global;*
(2) *A função* f *possui quatro pontos de inflexão;*
(3) *Para todo* $r \in R$ *tem-se* $\int_{-r}^{r} f(x)\, dx = 0$;
(4) *A função* f *possui um ponto de mínimo local no ponto* $x = 0$.

Solução

(0) **Verdadeiro.**
(1) **Verdadeiro.**
(2) **Falso.**
(3) **Verdadeiro.**
(4) **Falso.**

Exercício 231 (ANPEC 2001, Questão 6). *A respeito das integrais abaixo, assinale V (verdadeiro) ou F (falso):*

(0) $\int_{-\infty}^{+\infty} \max\{0, xe^{-x^2}\}\, dx = 0,5$;
(1) $\int_{-1}^{+1} \min\{1 - x, e^{-x}\}\, dx < 2$;
(2) $\int_{0}^{2} \int_{\sqrt{x}}^{2+x} y\, dy\, dx \leq 8$;
(3) $\int_{1}^{e} x \ln(x^2)\, dx < 5$;
(4) $\int_{0}^{\pi/2} x\ \sin(x)\, dx = 1$.

Solução

(0) **Verdadeiro.**
(1) **Falso.**
(2) **Falso.**
(3) **Verdadeiro.**
(4) **Verdadeiro.**

Exercício 232 (ANPEC 2001, Questão 12). *A respeito da função* $f : R^2 \to R$, *definida por* $f(x,y) = (x+y)e^{-(x+y)}$, *assinale V (verdadeiro) ou F (falso):*

(0) *Essa função não possui ponto de mínimo global;*
(1) *Os pontos de máximo global de f formam uma reta;*
(2) *O valor máximo de f é superior a* 1 *(um);*
(3) $\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)\,dxdy = 2$;
(4) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,y) = 0$ *para todo y fixado.*

Solução

(0) **Verdadeiro.**
(1) **Verdadeiro.**
(2) **Falso.**
(3) **Verdadeiro.**
(4) **Verdadeiro.**

Exercício 233 (ANPEC 2000, Questão 3). *Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):*

(0) $\int_{-1}^1 x^3 5^{x^2}\,dx = 0.$
(1) $\int_0^4 (1-|x-2|)\,dx = 0.$
(2) $\int_0^6 (x-3)e^{-2|x-3|}\,dx > 0.$
(3) $\int_0^{2\pi} |x-\pi|\sin(x-\pi)\,dx > 0.$

Solução

(0) **Verdadeiro.**
(1) **Verdadeiro.**
(2) **Falso.**
(3) **Falso.**

Exercício 234 (ANPEC 2000, Questão 4). *Se* $f : [0,1] \to \Re$ *é uma função contínua tal que* $\int\limits_0^x f(t)dt = \int\limits_x^1 t^2 f(t)dt + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{8} - \frac{c}{24}$, *calcule o valor da constante c.*

Solução

Derivando a ultima equação

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = \frac{d}{dx}\int_x^1 t^2 f(t)dt + x^5 + x^7.$$

Pelo teorema de calculo fundamental

$$f(x) = -x^2 f(x) + x^5 + x^7.$$

Então $f(x) = x^5$. *Logo*

$$\int_0^x t^5 dt = \int_x^1 t^7 dt + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{8} - \frac{c}{24}.$$

Portanto $c = 3$.

Exercício 235 (ANPEC 1998, Questão 2). *Identifique quais das afirmativas abaixo sobre a função* $y : \Re \to \Re$ *definida por* $y(x) = |x|e^{-2|x|}$ *são verdadeiras e quais são falsas;*

- (0) $\int_{-\infty}^{+\infty} y(x)\, dx = 1$;
- (1) *y possui um único ponto de mínimo global;*
- (2) *y possui um único ponto de máximo global;*
- (3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{dy(x)}{dx}$ *não existe.*

Solução

- (0) **Falso.**
- (1) **Verdadeiro.**
- (2) **Falso.**
- (3) **Verdadeiro.**

Exercício 236 (ANPEC 1998, Questão 4). *Responda V ou F:*

- (0) $\int\limits_{-1}^{1} xe^{-|x|}\, dx = 0.$
- (1) $\int\limits_{-2}^{2} x(1 - |x|)\, dx = 1.$

(2) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |x| \sin\ x\ dx = 0.$

(3) $\int\limits_{0}^{4} (x-2)e^{-(x-2)^2} = 0.$

Solução

(0) **Verdadeiro.**

(1) **Falso.**

(2) **Verdadeiro.**

(3) **Verdadeiro.**

Exercício 237 (ANPEC 1998, Questão 8). *A função $y : \Re \to \Re$ definida por*

$$y(x) = \int_{x}^{4x^2} 3^{\sqrt{t}} dt.$$

Calcule $\frac{dy}{dx}$ para $x = 1$.

Solução

Resposta 69

Exercício 238 (ANPEC 1998, Questão 14). *Classifique como verdadeira ou falsa cada uma das afirmativas:*

(0) *A área compreendida entre a curva $x.y = 3$ e a reta $y = 4 - x$ é menor do que 1.*

(1) *A inclinação da função*

$$y = \frac{(2x^3 + 4)}{(x^2 - 4x + 2)}$$

quando $x = 1$ é superior a 5.

(2) *Fazendo-se a integração por partes de $\int x.e^x.dx$ obtém-se como resultado $(x - 1)e^x + C$ onde C é uma constante.*

Solução

(0) **Verdadeiro.**

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Verdadeiro.**

EXERCÍCIO 239 (ANPEC 1997, Questão 5). *Classifique como verdadeira ou falsa as afirmações a seguir :*

(0) *Se* $f(0) = 5$ *e* $f(x) = \int 3x^{\frac{1}{2}}\, dx$, *então* $f(4) = 21$.

(1) *Seja* $\Theta = \int\limits_{1}^{\infty} \frac{2x}{(x^2+1)^2}\, dx$. *Então* $4(\Theta+1)^2 + 1 = 9$.

(2) $\int\limits_{0}^{1} x^2 e^{-x}\, dx = \frac{5}{e} + 5$, *onde e é a exponencial.*

Solução

(0) **Verdadeiro.**

(1) **Falso.**

(2) **Falso.**

EXERCÍCIO 240 (ANPEC 1996, Questão 8). *Indique se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas:*

(0) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin\, x\ dx = 0.$

(1) $\int\limits_{0}^{1} \ln x\ dx = -\infty.$

(2) $\int\limits_{0}^{\infty} x e^{-x}\, dx = 1.$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} x\ dx = 0.$

Solução

(0) **Verdadeiro.**

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Verdadeiro.**

(3) **Verdadeiro.** *Deveria ser falsa: esta integral não está definida.*

EXERCÍCIO 241 (ANPEC 1995, Questão 10). *A função* $y : \Re \to \Re$ *é definida por:* $y(x) = \int_{x}^{x+1} 2^{t^2} dt$. *Calcule* $dy/\,dx$ *para* $x = 1$.

Solução

Resposta 14

EXERCÍCIO 242 (ANPEC 1995, Questão 14). *Indique se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas.*

(0) *A área compreendida entre a curva* $y = -x^2 + 4x - 3$, *o eixo* x *e a reta* $x = 2$ *é maior que* $2/3$.

(1) *Dada a equação* $x^2 + y^2 - 2kx + 1 = 0$, *em que* k *é uma constante,* $y == f(x)$, *então, o valor da expressão* $2xy\frac{dy}{dx} + x^2 - y^2 - 1$ *só será determinado se* $k = 0$.

(2) *A função* $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$ *é estritamente convexa.*

(3) *A taxa de variação de* $\sqrt{x^2 + 72}$ *em relação a* $1/x$ *é menor que* 1 *para* $x \in \{-3, 3\}$.

Solução

(0) **Falso.**

(1) **Falso.**

(2) **Verdadeiro.**

(3) **Falso.**

EXERCÍCIO 243 (ANPEC 1994, Questão 7). *Assinale as proposições verdadeiras e as falsas:*

(0) $\int_{0}^{\infty} 2e^{-2x}\, dx = 1$.

(1) $\int_{\infty}^{0} e^{x}\, dx = \infty$.

(2) $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{1/2}}\, dx =$

(3) $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^3}\, dx = 1/2$.

4. $\int\limits_{3}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = 1/3.$

Solução

0. **Verdadeiro.**
1. **Falso.**
2. **(P).**
3. **Verdadeiro.**
4. **Verdadeiro.**

Exercício 244 (ANPEC 1993, Questão 10). *Calcule a área compreendida entre o gráfico da curva $y = x\sqrt{2x^2 - 7} - \frac{1}{3}$, o eixo Ox e as retas $x = 2$ e $x = 4$.*

Solução

Resposta 20

Exercício 245 (ANPEC 1993, Questão 11). *Assinale como verdadeira ou falsa cada uma das afirmativas abaixo:*

0. $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\, dx = 0.$
1. $\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x}\, dx = 3.$

Solução

0. **Verdadeiro.**
1. **Falso.**

Exercício 246 (ANPEC 1992, Questão 14). *Determine a área sob a curva $y = 15x^2$ no intervalo onde x varia de 1 a 2.*

Solução

Exercício 247 (ANPEC 1991, Questão 12). *Dados os conjuntos $A = \{(x, y) | y \leq 2(-18 + 9x - x^2), x \in R\}$ e $B = \{(x, y) | y \geq 0, x \in R\}$, determine a área formada pela interseção de A e B.*

Solução

EXERCÍCIO 248 (ANPEC 1990, Questão 12). *Calcule o valor de* $\int_0^1 (3x+6)^2\,dx$.

Solução

EXERCÍCIO 249 (ANPEC 1990, Questão 13). *Determine o valor de* $\int_0^{\pi} e^t \cos 2t \cdot dt$ *e assinale cada opção abaixo como falsa ou verdadeira.*

(0) $\frac{1}{5}(e^{2\pi}-1)$.
(1) $\frac{1}{3}(e^{\pi}+1)$.
(2) $e^{2\pi}$.
(3) $\frac{1}{5}(e^{\pi}-1)$.
(4) $\frac{2}{3}e^{2\pi}$.

Solução

(0)
(1)
(2)
(3)
(4)

CAPíTULO 20

Sequências e Séries

[1]

20.1. Questões ANPEC Trabalhadas

20.1.1. Sequências. Talvez um dos testes mais importantes para determinar limites de sequências seja o da razão; ver Seção 9.1. Considere (x_n) sequência de números positivos tal que (x_{n+1}/x_n) converge e $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}/x_n) = L$. Se $L < 1$, então $\lim_{n\to\infty}(x_n) = 0$. Se $L > 1$, então $(x_n) \to \infty$.

ANPEC 2022, Questão 7. Julgue como verdadeiras ou falsas as afirmativas a seguir.

1 $\lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m$.

Falso. Para $m \in \mathbb{R}$ fixado,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m = 1^m = 1.$$

Logo

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m = \lim_{m\to\infty} 1 = 1.$$

Por outro lado, para $n > 0$,

$$\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m = 0,$$

assim

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

Portanto

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m \neq \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m$$

[1]Última Atualização: 18/08/2022

3 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{3n} = 0.$

Verdadeiro. Note que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^{3n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^{3n} = 0$$

4 $\lim_{n\to\infty}\frac{2022^n}{n^{2022}} = +\infty.$

Verdadeiro. Usando o teste da razão:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2022^{n+1}}{(n+1)^{2022}}\frac{n^{2022}}{2022^n} = \lim_{n\to\infty} 2022\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{2022} = 2022 > 1.$$

Portanto, a sequência diverge para infinito.

Outra forma, mais complicada , é supor que $n \in \mathbb{R}$ e aplicar a regra de L'Hôspital 2022 vezes:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2022^n}{n^{2022}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2022^n(\ln(2022))^{2022}}{2022!} = \frac{(\ln(2022))^{2022}}{2022!}\lim_{n\to\infty}2022^n = +\infty$$

ANPEC 2010, Questão 13. Julgue as afirmativas:

0 Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais não nulos, tal que $|a_{n+1}| < \frac{|a_n|}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$;

Verdadeiro. Primeiro note que

$$|a_n| \to 0 \implies a_n \to 0.$$

Só precisamos então nos preocupar com $|a_n|$. Pelo teste da razão,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < \frac{1}{2}.$$

Logo, a sequência converge para zero.

1 Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$, então $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n} = \max\{a,b\}$;

Verdadeiro. Seja $c = \max\{a, b\} \geq 0$. Então

$$c = \sqrt[n]{c^n} \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{2c^n} = c\sqrt[n]{2},$$

e portanto, tomando $n \to \infty$,

$$c = \lim_{n\to\infty} c \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} c = c.$$

Temos então um "sanduíche" (ver Lema 9.1.3), e concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = c = \max\{a, b\}.$$

3 $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^2 2^n} = 0$;

Falso. Pelo teste da razão,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^2 2^{(n+1)}} \frac{n^2 2^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = \infty.$$

Logo, a sequência diverge.

ANPEC 2009, Questão 12. Esta questão define as sequências (x_n) e (y_n) por $x_n = \frac{n}{n!}$ e $y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. As afirmativas abaixo devem ser consideradas.

0 y_n é monótona decrescente.

Verdadeiro. Note que

$$y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Então $y_{n+1} < y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, y_n é monótona decrescente.

1 $\lim_{n\to\infty} x_n^2 = \infty$.

Falso. Pelo teste da razão, $x_n \to 0$, e portanto $x_n^2 \to 0$.

ANPEC 2006, Questão 11. Avalie as opções.

> 0 A sequência $a_n = (-1)^n$ não possui limite. é, portanto, ilimitada.

Falso. A sequência (a_n) é limitada, já que $|a_n| \le 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

> 4 Seja A uma matriz $n \times n$ que tem n autovalores reais diferentes. Se todos os autovalores de A são menores do que 1 (em módulo) então $A^t \xrightarrow{t\to\infty} 0$.

Verdadeiro. Se A possui n autovalores diferentes, então ela é diagonalizável, i.e., $A = PDP^{-1}$, onde D é matriz com diagonal formada pelos autovalores: $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Portanto,

$$A^t = (PDP^{-1})^t = PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1} \dots PDP^{-1}PDP^{-1} = PDD\dots DP^{-1}$$

$$= PD^tP^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^t P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^t \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

pois $|\lambda_i| < 1 \implies \lambda_i^t \to 0$.

20.1.2. Séries.

ANPEC 2022, Questão 8. Julgue como verdadeiras ou falsas as seguintes afirmativas.

> 0 Se (x_n) é uma sequência com $x_n > 0$ para todo $n \ge 1$, e $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{x_{n+1} + x_n}$ converge.

Verdadeiro. Note que as somas parciais são dadas por

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{x_{n+1} + x_n} = \sum_{n=1}^{k} (x_{n+1} - x_n) = x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \cdots + x_{k+1} - x_k = x_{k+1} - x_1.$$

Então $\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} - x_1 = 1 - x_1$, e a série converge.

(2) Para qualquer número real a satisfazendo $2 < a < 3$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} (3-a)^n$ converge.

Verdadeiro. Note que como $2 < a < 3$, então $\alpha = 3 - a \in (0, 1)$. Lembrando que a série geométrica

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \alpha^n = \frac{1 - \alpha^{k+1}}{1 - \alpha},$$

temos que $S_k \to 1/(1-\alpha)$, pois $\alpha < 1$.

(3) A série $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n^n}$ é absolutamente convergente.

Verdadeiro. Basta ver que pelo teste da raiz,

$$\lim_{n\to\infty} 1/\sqrt[n]{n^n} = 1/n = 0.$$

(4) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ converge.

Falso pois $n^n/n! \not\to 0$.

ANPEC 2020, Questão 4.

Dado um número inteiro positivo $n \geq 1$, para cada $k \in 0, 1, ..., n$ o coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ é definido como $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Duas de suas propriedades básicas são:
(i) Para todo $k \in \{0, 1, ..., n\}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;
(ii) Para todo $k \in \{2, ..., n-2\}$, $\binom{n}{k} \geq 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$.
Definimos uma sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ a partir da soma dos inversos dos coeficientes binomiais, ou seja, para cada inteiro positivo $n \geq 1$, $x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$. Determine $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Note que

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} = 1 + \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} + \frac{1}{n} + 1 = 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

Agora, para $2 \leq k \leq n-2$,

$$\binom{n}{k} \geq \frac{n(n-1)}{2} \implies \frac{1}{\binom{n}{k}} \leq \frac{2}{n(n-1)}.$$

Então,

$$x_n \leq 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{2}{n(n-1)} = 2 + \frac{2}{n} + (n-3)\frac{2}{n(n-1)}$$

e podemos concluir que $\lim_{n\to\infty} x_n \leq 2$. Mas como $x_n \geq 2$, temos que $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$.

ANPEC 2020, Questão 9. Julgue a veracidade das seguintes afirmações.

0 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ é absolutamente convergente.

Falso. A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

é harmônica, e não converge.

1 Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente.

Verdadeiro. Convergência absoluta $\implies$ convergência. O inverso não vale em geral.

2 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{e^n}$ é convergente.

Verdadeiro. Denotemos

$$a_n = \frac{(-1)^n n^3}{e^n}.$$

Pelo teste da razão

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^3 e^n}{e^{n+1} n^3} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n} \right)^3 = \frac{1}{e} < 1.$$

Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

20.2. Questões ANPEC Resolvidas

Exercício 1 (ANPEC 2022, Questão 7)

Julgue como verdadeiras ou falsas as seguintes afirmativas:

(0) Sejam $(x_n), (y_n)$ e (z_n) sequências de números reais. Se a sequência (z_n) é convergente e $z_n = \frac{x_n+y_n}{2}$ para todo $n \geq 1$, então (x_n) e (y_n) são convergentes.

(1) $\lim\limits_{m\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^m = \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{m\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^m$.

(2) A sequência de números reais (x_n) cujo termo geral satisfaz $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, para todo $n \geq 1$, não converge.

(3) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{3n} = 0$.

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{2022^n}{n^{2022}} = +\infty$.

Solução

(0) **Falso.**

Consideremos

$$(x_n) = (1, 2, 3, ...) \quad \text{e} \quad (y_n) = (-1, -2, -3, ...)$$

então

$$(z_n) = \frac{(x_n) + (y_n)}{2} = (0, 0, 0, ...).$$

A sequência (z_n) converge, mas as sequências (x_n) e (y_n) não convergem.

(1) **Falso.** Seja $m \in \mathbb{R}$, então

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^m = 1^m,$$

logo

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^m = \lim_{m\to\infty} 1^m = 1$$

Agora, seja $n > 2$, então

$$\lim_{m\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^m = 0,$$

assim

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^m = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

Portanto

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m \neq \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m$$

(2) **Falso.** Dado que

$$\lim_{n\to\infty}|x_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,$$

então

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Portanto, a série (x_n) converge

(3) **Verdadeiro.**

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{3n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^{3n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^{3n} = 0\end{aligned}$$

(4) **Verdadeiro.**

Aplicando a regra de L$'$ Hôspital 2022 vezes, temos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2022^n}{n^{2022}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2022^n(\ln(2022))^{2022}}{2022!} = \frac{(\ln(2022))^{2022}}{2022!}\lim_{n\to\infty}2022^n = +\infty$$

Exercício 2 (ANPEC 2022, Questão 8) Julgue como verdadeiras ou falsas as seguintes afirmativas:

(0) Se (x_n) é uma sequência com $x_n > 0$ para todo $n \geq 1$, e $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_{n+1}^2-x_n^2}{x_{n+1}+x_n}$ converge.

(1) Se $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ e $y_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ são séries convergentes e, portanto, são também convergentes $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$.

(2) Para qualquer número real a satisfazendo $2 < a < 3$, a série $\sum_{n=1}^{\infty}(3-a)^n$ converge.

(3) A série $\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{n^n}$ é absolutamente convergente.

(4) A série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ converge.

Exercício 3 (ANPEC 2022, Questão 3)

Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas:

0. Para todo número natural $n \geq 1$, vale que $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln(n+1)$, em que $\ln(a)$ representa o logaritmo natural de $a > 0$.
1. Para todo número real $x \in \mathbb{R}$, vale que $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.
2. Dados dois números reais $x, y \in \mathbb{R}$, vale a desigualdade $|x-y| \geq 1$ se, e somente se, $x \geq y+1$.
3. O conjunto $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{e^x} > e^{-1}\right\}$ satisfaz $A = \emptyset$, em que $e = 2,718281...$ é o número irracional neperiano.
4. Para todo número real $x > 0$ tal que $x \neq 1$, vale a desigualdade $\ln(x) < x-1$, permitindo concluir que $\pi^e < e^\pi$, em que $\pi = 3,14159...$ é o número irracional *pi*.

Exercício 4 (ANPEC 2021, Questão 7)

Julgue como verdadeiras ou falsas as seguintes afirmativas:

0. A série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left[\frac{n^{n-1}}{(n-1)^n}\right]}{n(n-1)}$ é convergente e seu valor é 0.
1. Se $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função e $0 < a < 1$ é um número real dado de modo que para todo $x \geq 0$ temos $f(x) \leq a^x$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge.
2. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n^2}$ converge.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(n\pi) = 0$.
4. Se $a > 1$ é um número inteiro, então $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}\right) - \frac{1+a}{a^2} = \frac{1}{a^3-a^2}$.

0. **Verdadeiro.**
1. **Falso.**
2. **Falso.**
3. **Verdadeiro.**
4. **Verdadeiro.**

Exercício 5 (ANPEC 2020, Questão 4) Dado um número inteiro positivo $n \geq 1$, para cada $k \in 0, 1, ..., n$ o coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ é definido como

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Duas de suas propriedades básicas são:
(i) Para todo $k \in \{0, 1, ..., n\}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;
(ii) Para todo $k \in \{2, ..., n-2\}$, $\binom{n}{k} \geq 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$.
Definimos uma sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ a partir da soma dos inversos dos coeficientes binomiais, ou seja, para cada inteiro positivo $n \geq 1$, $x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$.
Determine $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Exercício 6 (ANPEC 2020, Questão 9)

Julgue a veracidade das seguintes afirmações :

0. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ é absolutamente convergente.
1. Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente.
2. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{e^n}$ é convergente.
3. A integral $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin^2(x)dx$ é convergente e seu valor é menor ou igual a 1.
4. A integral $\int_1^{+\infty} \frac{x^3}{x^4+4}dx$ é convergente.

Solução

0. **Falso.**

A serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

é harmônica, então ela não converge.

1. **Verdadeiro.**

Note que

$$0 \leq x_n + |x_n| \leq 2|x_n|.$$

Dado que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} 2|x_n|$ é convergente. Pelo teste da comparação , temos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n + |x_n|$ é convergente. Então

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + |x_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

é a diferença de duas séries convergente e é, portanto convergente.

(2) **Verdadeiro.**

Denotemos

$$a_n = \frac{(-1)^n n^3}{e^n}.$$

Pelo teste da razão

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)^3 e^n}{e^{n+1}(-1)^n n^3}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{e}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^3\right| = \frac{1}{e}.$$

Dado que $1/e < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

(3) **Verdadeiro.**

Já que $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, então

$$0 \leq e^{-x}\sin^2(x) \leq e^{-x}.$$

Integrando, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin^2(x)dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-x}dx\\
0 &\leq \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin^2(x)dx \leq \lim_{a\to\infty}\int_0^{a} e^{-x}dx\\
0 &\leq \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin^2(x)dx \leq 1.
\end{aligned}$$

(4) **Falso.**

Integrando

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^3}{x^4+4}dx = \frac{1}{4}\int_1^{+\infty}\frac{d(x^4+4)}{x^4+4} = \frac{1}{4}\lim_{a\to\infty}\int_1^{a}\frac{d(x^4+4)}{x^4+4} = \frac{1}{4}\lim_{a\to\infty}\Big(\ln(a^4+4)-\ln(5)\Big) = +\infty.$$

Exercício 7 (ANPEC 2019, Questão 11)

Julgue como verdadeiras ou falsas as seguintes afirmativas:

0 A integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+x}$ é convergente.

1 A integral $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2-x+1}$ não converge.

2 A série $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ converge porque $\frac{1}{n}$ tende para zero quando n vai para o infinito.

3 A série $\sum_{k=1}^\infty \frac{2^k}{k^2(\ln\ 2)^2}$ diverge porque $\frac{2^k}{k^2(\ln\ 2)^2}$ tende para o infinito quando k vai para o infinito.

4 A série $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\ln(2^k)}$ converge.

Solução

0 **Verdadeiro.**

Integrando, obtemos

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^2+x} = \int_2^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \lim_{a\to\infty} \int_2^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \lim_{a\to\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\Big/_2^a.$$

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^2+x} = \lim_{a\to\infty}\left(\ln\left(\frac{a}{a+1}\right) - \ln\left(\frac{2}{3}\right)\right) = -\ln\left(\frac{2}{3}\right).$$

Portanto, a integral é convergente.

1 **Falso.**

Note que, dado que $x \geq 2$,

$$0 \leq \frac{1}{x(x-1)+1} \leq \frac{1}{x(x-1)}.$$

Integrando, temos

$$\int_2^\infty 0\ dx \leq \int_2^\infty \frac{1}{x(x-1)+1}dx \leq \int_2^\infty \frac{1}{x(x-1)}dx.$$

A integral

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(x-1)}dx = \int_2^\infty \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right)dx = \lim_{a\to\infty}\ \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\Big/_2^a$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left(\ln\left(\frac{a-1}{a}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right),$$

Logo podemos concluir, da desigualdade anterior, que a integral converge.

(2) **Falso.**

A série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ é harmônica, então é divergente.

(3) **Verdadeiro.**

Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. O recíproco do enunciado anterior é, se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. Dado que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2^k}{k^2(\ln 2)^2} = \infty \neq 0$$

então a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2(\ln 2)^2}$$

diverge.

(4) **Falso.**

A série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(2^k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

é harmônica, então é divergente.

Exercício 8 (ANPEC 2017, Questão 15)

Calcular o valor de a em que:

$$a = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{-n}(n+2)}{n^2+n}.$$

Solução

Resposta 1

Calculando a série, temos

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{-n}(n+2)}{n^2+n} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{n+2}{n^2+n}\Big)2^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{n(n+1)}2^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{2}{n}-\frac{1}{n+1}\Big)\frac{1}{2^n}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{n2^{n-1}}-\frac{1}{(n+1)2^n}\Big) = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{n2^n}-\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}\Big).\end{aligned}$$

Seja $a_n = 1/(n2^n)$, então pelo teste da razão

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}}\right| = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1/n} = 1/2 < 1.$$

Assim a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n2^n$ converge. A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/(n+1)2^{n+1}$ também converge pelo mesmo teste.

Logo, da igualdade das series

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{-n}(n+2)}{n^2+n} &= 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n} - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}\\ &= 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n} - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}\\ &= 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)2^{n+1}} - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)2^{n+1}} = 1.\end{aligned}$$

Exercício 9 (ANPEC 2016, Questão 13)

Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas:

0. A sequência $\left(1+\frac{a}{n}\right)^r$ converge para todo real a e todo racional r fixados;
1. Se $\{a_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de números positivos tal que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ também converge;
2. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{2}$;
3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{2\cdot 4^n - 3\cdot 2^n + 1} = 1$;

④ Se $0 < a < 1$, então $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n \cos(n\pi) = \frac{a}{1-a^2}$.

Solução

⓪ **Verdadeiro.**

A sequência $(1 + a/n)^r$ converge, já que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^r = 1.$$

① **Verdadeiro.**

Denotemos

$$s_m = \sum_{n=1}^{m} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_m,$$
$$r_m = \sum_{n=1}^{m} a_n^2 = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_m^2.$$

Dado que $\lim\limits_{m\to\infty} s_m$ converge, então $\lim\limits_{m\to\infty} s_m^2$ converge. Já que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos para todo $m \in \mathbb{N}$

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_m^2 \leq (a_1 + a_2 + ...a_m)^2,$$
$$r_m \leq s_m,$$
$$\lim_{m\to\infty} r_m \leq \lim_{m\to\infty} s_m.$$

Logo, da desigualdade anterior e pelo teste da comparação , a série

$$\lim_{m\to\infty} r_m = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$$

converge.

② **Falso.**

A série

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-1} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$$

Dado que a série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} 1/(n^2-1)$ é convergente, então podemos fazer

$$\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+...\right)\frac{-3}{4}.$$

(3) **Verdadeiro.**

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{2.4^n-3.2^n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{(2.2^n-1)(2^n-1)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right).$$

Agora, denotemos $a_n = 1/(2^n-1)$, então

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n-1}{2^{n+1}-1}\right|=\frac{1}{2}<1.$$

Logo pelo teste da razão, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ também converge, pelo mesmo teste.
Assim

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{2.4^n-3.2^n+1}&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n-1}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}-1}\\&=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}-1}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}-1}=1.\end{aligned}$$

④ **Falso.**

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{+\infty} a^n \cos(n\pi) &= a^0 \cos(0) + a^1 \cos(\pi) + a^2 \cos(2\pi) + a^3 \cos(3\pi) + ... \\
&= a^0 - a^1 + a^2 - a^3 \\
&= (a^0 + a^2 + ...) - (a^1 + a^3 + ...) \\
&= (a^0 + a^2 + ...) - a(a^0 + a^2 + ...) \\
&= (1-a)(a^0 + a^2 + a^4 + ...) \\
&= (1-a)\sum_{n=1}^{+\infty}(a^2)^{n-1} = \frac{(1-a)}{1-a^2}.
\end{aligned}$$

Exercício 10 (ANPEC 2015, Questão 12)

Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas:

⓪ A série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^2+n-1}{n^2-n+1}$ é convergente;

① $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n^2+8n+3} = \frac{1}{2}$;

② $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+6n+8} = \frac{5}{6}$;

③ A série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$ é convergente;

④ A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{n!}$ é convergente.

Solução

⓪ **Falso.**

Dado que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-1}{n^2-n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+1/n-1/n^2}{1-1/n+1/n^2} = 2 > 0,$$

então a série é divergente.

(1) **Verdadeiro.**

Primeiro, mostremos que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n^2+8n+3}$ converge. Note que

$$\frac{1}{4n^2+8n+3} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Pelo teste da comparação , a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n^2+8n+3}$ converge, já que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. Então,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n^2+8n+3} &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(2) **Falso.**

Primeiro, mostremos que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+6n+8}$ converge. Note que

$$\frac{1}{n^2+6n+8} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Pelo teste da comparação , a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+6n+8}$ converge, já que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. Então,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+6n+8} &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+4}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{12}.\end{aligned}$$

(3) **Verdadeiro.**

Seja $a_n = n^2/2^n$. Pelo teste da razão

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2 2^n}{2^{n+1}n^2}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Assim, a série converge, dado que $1/2 < 1$.

4 **Verdadeiro.**

seja $a_n = 5^n/n!$. Pelo teste da razão

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{5^{n+1}n!}{(n+1)!5^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{5}{n+1}\right| = 0 < 1.$$

Então, a série converge.

Exercício 11 (ANPEC 2014, Questão 9)

Analisar a veracidade das seguintes afirmações :

0 O valor de $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$ é $1/2$.

1 A série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$ é divergente.

2 Defina a sequência $\{a_n\}_{n\geq 0}$ da seguinte forma: $a_0 = 0,\ a_1 = 1$ e a_n é o ponto médio dos dois antecessores, para $n \geq 2$. Então $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 2/3$.

3 Se $b_n = \frac{2}{3} - a_n,\ \ n \geq 0$, em que $\{a_n\}_{n\geq 0}$ é a sequência definida na parte 2 desta questão. Então $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = 1/3$.

4 A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^{2n}3^{1-n}$ convergente.

Solução

0 **Falso.**

A série $s = 1 - 1 + 1 - 1 + ... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ não é absolutamente convergente, dado que $\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n| = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ não é convergente.

Portanto, podemos concluir que s diverge.

1 **Falso.**

Note que

$$\frac{1}{n^2+3n+2} < \frac{1}{n^2}.$$

Então, da desigualdade anterior e pelo teste da comparação a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 1/(n^2+3n+2)$ converge, já que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 1/n^2$ converge.

(2) **Verdadeiro.**

Da hipótese $a_n = (a_{n-1} + a_{n-2})/2$, então

$$\begin{cases} 2a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0, \\ a_0 = 0, a_1 = 1. \end{cases}$$

Pelo polinômio característico

$$2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

temos $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1/2$. Logo a solução de (1) é

$$a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n = c_1 + c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Das condições iniciais

$$a_0 = c_1 + c_2 = 0 \quad \text{e} \quad a_1 = c_1 - \frac{c_2}{2} = 1$$

então $c_1 = 2/3$ e $c_2 = -2/3$.

Assim temos

$$a_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}.$$

(3) **Falso.**

Da hipótese e do item (2), temos

$$b_n = \frac{2}{3} - a_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2}{3}\;\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}\;\frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{9}.$$

④ **Falso.**

Denotemos $a_n = 2^{2n}.3^{1-n}$. Pelo teste da razão

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{2(n+1)}3^{1-n-1}}{2^{2n}3^{1-n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^2}{3}\right| = 1,3 > 1.$$

Então, a série é divergente.

Exercício 12 (ANPEC 2012, Questão 8)

Julgue as afirmativas:

⓪ A função $f(x) = \ln x, x > 0$, é diferenciável em $x = 1$.

① Seja $f : (-1, \infty) \to R$ uma função contínua, tal que $xf(x) = \ln(1 + x)$. Então $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0$.

② Se $x \neq 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right] = 0$

③ Seja e a base do logaritmo natural e $R > 0$ o raio de convergência da série $\sum \frac{n^n}{n!}x^n$. Então $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{1}{R} = e$.

④ Seja a_n uma sequência qualquer de números reais distintos e $f_n : R \to R$ a sequência de funções definidas por $f_n(x) = 0$, se $x < a_n$ e $f_n(x) = 2^{-n}$, se $x \geq a_n$. Então para cada $x \in R$ a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge.

Exercício 13 (ANPEC 2012, Questão 7)

Julgue as afirmativas:

⓪ Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente.

① $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ converge.

② $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^n}$ é absolutamente convergente.

③ Se $0 < b_n < \frac{1}{n}$, para todo $n > 0$, então podemos afirmar que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

④ Seja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série convergente e $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma bijeção qualquer. Se $b_n = a_{\varphi(n)}$, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Solução

⓪ **Falso.**

Consideremos o seguinte contraexemplo, a série harmônica $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n$ não converge e $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$.

① **Verdadeiro.**

Denotemos $a_n = n\ e^{-n^2}$. Pelo teste da razão

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)e^{-(n+1)^2}}{n\ e^{-n^2}} = \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n\ e^{2n}} = \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{2n}} + \frac{1}{n\ e^{2n}} = 0 < 1.$$

Logo, a série é convergente.

② **Verdadeiro.**

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^n}$ é absolutamente convergente se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(\ln n)^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$$

é convergente. Denotemos $a_n = 1/(\ln n)^n$. Logo, pelo teste da raiz

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\ln n)^n} = 0 < 1.$$

Então, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^n}$ é absolutamente convergente.

③ **Falso.**

Considere o seguinte contraexemplo. Seja $b_n = 1/2n$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2n = 1/2\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ é divergente.

④ **Falso.**

Utilizaremos o teorema de Riemann para mostrar que este item é falso.

Teorema de Riemann (series): Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, então para todo $M \in \mathbb{R}$ existe uma bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = M.$$

Agora, da hipótese temos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é qualquer bijeção . Solo temos que considerar uma serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ absolutamente convergente e um $M \neq a$ para dizer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Também, podemos mostrar a falsidade de este item com o seguinte contraexemplo.
Primeiro, consideremos uma série absolutamente convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, onde $a_n = (-1)^{n+1}/n$.
Agora definamos a bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dada por

$$\varphi(n) = \begin{cases} 2\left(\dfrac{n-1}{3}\right) + 1 & \text{se} \quad n = \mathring{3} - 2 \\ 4\left(\frac{n-2}{3}\right) + 2 & \text{se} \quad n = \mathring{3} - 1 \\ 4\left(\frac{n}{3}\right) & \text{se} \quad n = \mathring{3} \end{cases}$$

Então

$$\begin{array}{ccc} b_1 = a_1 & b_2 = a_2 & b_3 = a_4 \\ b_4 = a_3 & b_5 = a_6 & b_6 = a_8 \\ b_7 = a_5 & b_8 = a_{10} & b_9 = a_{12} \\ b_{10} = a_7 & b_{11} = a_{14} & b_{12} = a_{16} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Assim

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \cdots \\ &= b_1 + b_2 + b_4 + b_3 + b_7 + b_5 + b_{10} + b_6 + b_{13} + b_8 + b_{16} + b_9 + \cdots\end{aligned}$$

Ordenando em forma crescente os b, temos

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} &= (b_1 + b_2) + b_3 + (b_4 + b_5) + b_6 + (b_7 + b_8) + b_9 + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \cdots\end{aligned}$$

Somando os parêntesis, juntamos

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Exercício 14 (ANPEC 2011, Questão 4)

Julgue as afirmativas:

0. Se $x_1 = x_2 = 1$ e $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, para todo $n \geq 2$, então (x_n) é uma sequência convergente.
1. Se $x_1 = \sqrt{2}$ e $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$, para todo $n \geq 1$, então (x_n) converge para 2.
2. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(2n+1)}}$ diverge.

3 Se (x_n) é uma sequência de números reais não nulos, com $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1} - x_n)$ converge.

4 Sejam (a_n) e (b_n) sequências de números positivos, tais que $a_1 > b_1$. Se $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ e $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, então $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Solução

0 **Falso.**

A sequência

$$(x_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 13, \cdots).$$

Logo (x_n) não converge. Por que a sequência é crescente e ilimitado.

1 **Verdadeiro.**

Note que

$$x_1 = 2^{\frac{1}{2}},\ \ x_2 = 2^{\frac{1}{2}}.\, 2^{\frac{1}{2^2}},\ \ x_3 = 2^{\frac{1}{2}}.\, 2^{\frac{1}{2^2}}.\, 2^{\frac{1}{2^3}},\ \ \cdots, x_n = 2^{\frac{1}{2}}.\, 2^{\frac{1}{2^2}}.\, 2^{\frac{1}{2^3}}, \cdots 2^{\frac{1}{2^n}}.$$

Logo

$$\begin{aligned} x_n &= 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}} = 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-1} \\ &= \sum_{2^{m=1}}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1. \end{aligned}$$

Agora, o valor da série geométrica é

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} = 2.$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} 2^{\sum_{m=1}^{n}(\frac{1}{2})^{m-1}-1} = 2^{\sum_{m=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^{m-1}-1} = 2^{2-1} = 2.$$

(2) **Verdadeiro.**

Note que

$$\frac{1}{\sqrt{2n+2}\,\sqrt{2n+2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}\,\sqrt{2n+1}}.$$

Então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+2}\,\sqrt{2n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$
$$= \frac{1}{2}\Big(-1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\Big) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Dado que a série harmônica é divergente, então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+2}\,\sqrt{2n+2}}$$

é divergente. Logo da desigualdade anterior, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,\sqrt{2n+1}}$$

é divergente.

(3) **Falso.**

Seja $x_n = n$, então $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. A série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1} - x_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1-n) = \sum_{n=1}^{\infty} 1$$

é divergente.

(4) **Verdadeiro.**

Provemos por indução que $a_n > b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(i) para $n = 1$. Da hipótese $a_1 > b_1$

(ii) Suponha valido para $n-1$. Então $a_{n-1} > b_{n-1}$

(iii) Prova para n. Dado que $a_{n-1} > b_{n-1}$, então

$$\frac{\left(\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{b_{n-1}}\right)^2}{2} > 0,$$
$$\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} > \sqrt{a_n b_n},$$
$$a_{n+1} > b_{n+1}.$$

Logo $a_n > b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Já que $a_n > b_n$, então $a_n > (a_n + b_n)/2$, logo $a_n > a_{n+1}$. Também dado que $a_n > b_n$, temos $\sqrt{a_n b_n} > b_n$, então $b_{n+1} > b_n$. Assim, as sequências (a_n) e (b_n) são monótomas. Dado que $a_n > b_n > 0$ e $a_1 > a_n$, então (a_n) e (b_n) são limitadas. Portanto (a_n) e (b_n) são convergentes.

Tomando limite na equação $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, temos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Exercício 15 (ANPEC 2010, Questão 13)

Julgue as afirmativas:

0. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais não nulos, tal que $|a_{n+1}| < \frac{|a_n|}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;
1. Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^n$ diverge;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^2 2^n} = 0$;
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n + 3}{n}$ é convergente.

Solução

0. **Verdadeiro.**

(1) **Verdadeiro.** Seja $c = \max\{a, b\}$, então

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{c^n} \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} &\leq \sqrt[n]{2c^n}, \\
\lim_{n\to\infty} c \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} &\leq \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} c, \\
c \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} &\leq c \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}}, \\
c \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} &\leq c.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = c = \max\{a, b\}.$$

(2) **Falso.**

Denotemos $a_n = (\ln n)^n / n^n$. Pelo teste da raiz, temos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a^n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\ln(n)}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n}.$$

Pela regra de L′ Hôspital

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1.$$

Portanto, a série converge.

(3) **Falso.**

(4) **Falso.** Note que

$$\begin{aligned}
0 \leq \sin^2(n) \leq 1 \\
\frac{3}{n} \leq \frac{\sin^2(n) + 3}{n} \leq \frac{4}{n}.
\end{aligned}$$

Dado que a série harmônica $3 \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ é divergente, então da ultima desigualdade concluímos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n) + 3}{n}$$

é divergente.

Exercício 16 (ANPEC 2010, Questão 14)

Seja a_n uma sequência de números positivos e $S = \{n \in N | a_n \geq 1\}$.

Julgue os itens abaixo:

0. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então S é finito;
1. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também converge;
2. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2/(1+a_n^2)$ convergem;
3. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $R = \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$ existe, então $R \leq 1$;
4. A série $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n!$ converge somente quando $|x| < 1$.

Solução

0. **Verdadeiro.**

   Dado que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Assim dado $\in > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Rightarrow |a_n| < \in$. Então, para $\in = 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Rightarrow |a_n| = a_n < 1$. Logo, existe no máximo N elementos tal que $a_n \geq 1$.

   Portanto, o conjunto S é finito.

1. **Falso.**

   Considere o seguinte contraexemplo. A série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ é convergente, mas a série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ é divergente.

2 **Verdadeiro.**

Denotemos

$$s_m = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m = \sum_{n=1}^{m} a_n,$$

$$r_m = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_m^2 \sum_{n=1}^{m} a_n^2,$$

$$t_m = \frac{a_1^2}{1+a_1^2} + \frac{a_2^2}{1+a_2^2} + \frac{a_3^2}{1+a_3^2} + \cdots + \frac{a_m^2}{1+a_m^2} = \sum_{n=1}^{m} \frac{a_m^2}{1+a_m^2}.$$

Dado que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então existe $s \in \mathbb{R}$ tal que

$$s = \lim_{m\to\infty} s_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Note que, para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$0 < t_m \leq r_m \leq s_m < s.$$

Também, para todo $m \in \mathbb{N}$

$$t_m < t_{m+1} \qquad \text{e} \qquad r_m < r_{m+1}.$$

Então as sequência (t_m) e (r_m) são limitadas e monótonas.
Portanto, estas sequências são convergentes, isto é, existem t e r em $\mathbb{R}$ tal que

$$t = \lim_{m\to\infty} t_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m^2}{1+a_m^2} \qquad \text{e} \qquad r = \lim_{m\to\infty} r_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_m^2.$$

3 **Verdadeiro.**

Demostremos por contradição . Suponhamos que

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1.$$

Então pelo teste da razão, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge (contradição). Portanto

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1.$$

4 **Falso.**

Seja $x = 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n! = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n!$. Agora, denotemos $a_n = 1/n!$. Pelo teste da razão, temos

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(1+n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n} = 0.$$

Portanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n!$ converge para $x = 1$.

Exercício 17 (ANPEC 2009, Questão 7)

Seja $f : R \to R$ a função definida por $f(x) = -x^2 + 8x - 16$ e L o limite de uma sequência (x_n) de números reais positivos tais que $x_1 = a$ e $x_{n+1}^2 - x_n^2 = f(x_n)$.

Avalie se cada afirmação abaixo é verdadeira (V) ou falsa (F):

0 $f(L) \neq 0$.

1 O gráfico de f é uma parábola com vértice $V = (L, 0)$.

2 O gráfico de f é uma parábola com vértice $V = (0, L)$.

3 $f \leq 0$ e $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq 0$.

4 $a \geq x_n \geq L = 4$, para todo $n \geq 1$.

Solução

0 **Falso.**

Da hipótese $f(x_n) = x_{n+1}^2 - x_n^2$, então

$$-x_n^2 + 8x_n - 16 = x_{n+1}^2 - x_n^2,$$

$$x_{n+1}^2 = 8x_n - 16. \tag{20.2.1}$$

Dado que $\lim_{n\to\infty} x_n = L$, então $L^2 = 8L - 16$, logo $L = 4$. Portanto $f(L = 4) = 0$.

1 **Verdadeiro.**
Dado que $f(x) = -(x-4)^2$, o vértice desta parábola é $V = (4, 0) = (L, 0)$.

2 **Falso.**
Toda parábola só tem um vértice. Então, do item 1 o vértice é $V = (L, 0)$.

3 **Verdadeiro.**
Dado que $f(x) = -(x-4)^2$ então $f(x) \leq 0$.
Agora

$$\begin{aligned} f(x_n) = -(x_n - 4)^2 &\leq 0 \\ 8x_n - 16 &\leq x_n^2. \end{aligned}$$

Da desigualde anterior e da equação (20.2.1), temos

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 &\leq x_n^2 \\ x_{n+1} &\leq x_n. \end{aligned}$$

4 **Verdadeiro.**
Do item 3 $a \geq x_n \quad \forall n \geq 1$. Dado que $\lim_{n\to\infty} x_n = 4$ e $x_n \geq x_{n+1} \geq 0$, então $x_n \geq 4$.
Portanto $a \geq x_n \geq 4$.

Exercício 18 (ANPEC 2009, Questão 8)
Seja a_n uma sequência de números reais tais que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge ao tomarmos $x = 2$. Suponha ainda que o limite $L = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \infty$ existe. Para cada $x \in R$, defina $b_n(x) = a_n x^n$ e avalie se cada afirmação abaixo é verdadeira (V) ou falsa (F):

0 $\lim \left|\frac{b_{n+1}(x)}{b_n(x)}\right| = L|x|$.

1 $2L > 1$.

2 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge se $|x| < 2$.

3 $\lim a_n = 1$.

4 qualquer que seja $x \in R$ a série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ converge.

Solução

0 **Verdadeiro.**

O limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}(x)}{b_n(x)} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n\ x^n}\right| = |x| \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|L.$$

1 **Falso.**

Demostração por contradição . Suponha que $2L > 1$. Agora seja $x = 2$, então do item anterior temos

$$2L = |x|L = \lim \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n\ x^n}\right| > 1.$$

Então, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverge (contradição). Portanto $2L \leq 1$.

2 **Verdadeiro.**

Do item anterior $2L \leq 1$. Agora, se $|x| < 2$, então $|x|L < 2L \leq 1$. Assim

$$|x|L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n\ x^n}\right| < 2L \leq 1.$$

Portanto, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge.

3 **Falso.**

Considere $a_n = 1/4^n$ e $x = 2$, então a série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

converge, onde

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4^n} = 0.$$

4 **Verdadeiro.**

Denotemos $a_n = x^n/n!$. Agora, pelo teste da razão temos

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}n!}{(n+1)!\, x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x}{n+1}\right| = 0 < 1.$$

Portanto, a série converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 19 (ANPEC 2009, Questão 12)

Considere as sequências (x_n) e (y_n) definidas por $x_n = \frac{n}{n!}$ e $y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Julgue as afirmativas:

0 y_n é monótona decrescente.

1 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = \infty$.

2 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

3 A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ é convergente.

4 A série $a^2 + \frac{a^2}{1+a^2} + \frac{a^2}{(1+a^2)^2} + \frac{a^2}{(1+a^2)^3} + ...$ é convergente, para todo $a \in R$.

Solução

0 **Verdadeiro.**

Da hipótese, temos

$$y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Então $y_{n+1} < y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, y_n é monótona decrescente.

1 **Falso.**

(2) **Verdadeiro.**

Do item (0), temos

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$$

(3) **Falso.**

Note que, para $n \geq 5$,

$$\frac{1}{n} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Somando, temos

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n} < \sum_{n=5}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} 1/n < \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

A série harmônia $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ é divergente, então pelo teste da comparação , a série $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ diverge.

(4) **Verdadeiro.**

Para todo $a \in R, 1 + a^2 > 1$, então $r = 1/(1+a^2) < 1$. Logo

$$\begin{aligned} a^2 + \frac{a^2}{1+a^2} + \frac{a^2}{(1+a^2)^2} + \frac{a^2}{(1+a^2)^3} + \cdots &= a^2\left(\left(\frac{1}{1+a^2}\right)^0 + \left(\frac{1}{1+a^2}\right)^1 + \left(\frac{1}{1+a^2}\right)^2 + \cdots\right) \\ &= a^2\left(r^0 + r^1 + r^2 + \cdots\right) \\ &= a^2 \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} \\ &= \frac{a^2}{1-r} = 1 + a^2. \end{aligned}$$

Exercício 20 (ANPEC 2008, Questão 6)

Seja $f : I \to R$ uma função definida em um intervalo aberto $I \subset R$. Sejam $a, b \in I$ e (x_n) a sequência definida por $x_n = (1 - \lambda_n)a + \lambda_n b$, em que $\lambda_n = 1/n$. Julgue as afirmativas:

(0) Se $f(b) < f(a)$, $\quad f(x_n) \leq (1 - \lambda_n)f(a) + \lambda_n f(b) < (1 - \lambda_n)f(a) + \lambda_n f(a) = f(a)$.

(1) Se $f(b) < f(a)$ e f é convexa, então $f(x_n) < f(a)$.

(2) Se f é contínua, todo mínimo local de f é um mínimo global.

(3) Se f é convexa, todo mínimo local de f é um mínimo global.

(4) A sequência (x_n) não é convergente.

Solução

(0) **Falso.**

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Falso.**

(3) **Verdadeiro.**

(4) **Falso.**

Exercício 21 (ANPEC 2008, Questão 15)

Seja $r = 1/2, I = (-1, 1)$ e $f : I \to R$ a função definida por $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$.

Sabendo-se que

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right),$$

calcule o valor de $\alpha = 5\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}$.

Solução

Resposta 20

Exercício 22 (ANPEC 2007, Questão 6)

Seja $x : N \to R$ a sequência dada por $x(n) = x_n = 1/n$ e seja $s_n = x_1 + \cdots + x_n$. Julgue os itens abaixo:

(0) $x_k < x_{2n}$, para algum $k \leq 2n$.
(1) $s_{2n} - s_n = x_{n+1} + x_{n+2} \cdots + x_{2n} \geq nx_{2n} \geq 1/2$.
(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} < 1$.
(3) A série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ é divergente.
(4) A série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é divergente.

Solução

(0) **Falso.**
(1) **Verdadeiro.**
(2) **Verdadeiro.**
(3) **Falso.**
(4) **Falso.**

Exercício 23 (ANPEC 2007, Questão 9)

A expressão $\ln(x)$ denota o logaritmo natural de x. Julgue os itens abaixo:

(0) $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{\ln(2)}{x}\right)^x = 2$.
(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{[\ln(2)]^n}{n!} = 2$.
(2) $\lim_{x\to\infty} \ln\left\{\sqrt[4]{\left(1+\frac{4}{x}\right)^x}\right\} = 2\ln(2)$.
(3) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\left[k\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]^n}{n!} = 2$.
(4) $\frac{d}{dy}\left\{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{y\ln(2)}{x}\right)^{-x}\right\} = -[\ln(2)]\exp\{-y\ln(2)\}$.

Solução

(0) **Verdadeiro.**
Seja $\frac{\ln(2)}{x} = \frac{1}{y}$, então $y = \frac{x}{\ln(2)}$. Dado que $x \to \infty$, temos $y \to \infty$.
Logo

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\ln(2)}{x}\right)^x = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y\ln(2)} = \lim_{y\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^{\ln(2)} = e^{\ln(2)} = 2.$$

1 **Verdadeiro.**

Seja $f(x) = e^x$, pelo polinômio de Taylor em torno de 0, temos

$$e^x = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots,$$
$$e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Para $x = \ln(2)$, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\ln(2)]^n}{n!} = 2.$$

2 **Falso.**

Seja $\frac{4}{x} = \frac{1}{y}$, então $y = \frac{x}{4}$. Dado que $x \to \infty$, temos $t \to \infty$. Logo

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left\{\sqrt[4]{\left(1+\frac{4}{x}\right)^x}\right\} = \lim_{y\to\infty} \ln\left\{\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right\} = \ln\left\{\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right\} = \ln\ e = 1.$$

3 **Verdadeiro.**

Do item 1 temos

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

para $x = k\ln\left(\frac{1}{2}\right)$, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(k\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)^n}{n!} = e^{k\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Da hipóteses

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[k\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

(4) **Verdadeiro.**

Denotemos $\frac{y\ln(2)}{x} = \frac{1}{t}$. Dado que $x \to \infty$, então $y \to \infty$. Logo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}\left\{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{y\ln(2)}{x}\right)^{-x}\right\} &= \frac{d}{dy}\left\{\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t(-y\ln(2))}\right\}\\ &= \frac{d}{dy}\left(e^{-y\ln(2)}\right)\\ &= -\ln(2)e^{-y\ln(2)}.\end{aligned}$$

Exercício 24 (ANPEC 2006, Questão 11)

Avalie as opções

(0) A sequência $a_n = (-1)^n$ não possui limite. é, portanto, ilimitada.

(1) A função diferenciável $f : R \to R$ é estritamente crescente se e somente se $f'(x) > 0$ em todo o domínio.

(2) Seja a série de $S^n = \sum_n a_n$. Se a série $S_n^* = \sum_n |a_n|$ converge, então S_n também converge.

(3) Se a serie S_n é convergente, a série $S_n^* = \sum_n |a_n|$ também converge.

(4) Seja A uma matriz $n \times n$ que tem n autovalores reais diferentes. Se todos os autovalores de A são menores do que 1 (em módulo) então $A^t \xrightarrow{t\to\infty} 0$.

Solução

(0) **Falso.**

A sequência (a_n) é limitada, já que $|a_n| \leq 1; \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

(1) **Falso.**

A ida é falso, consideremos o seguinte contraexemplo. Seja a função estritamente crescente $f(x) = x^3$, onde $f'(0) = 0$.

Portanto, se a ida é falso então todo o enunciado é falso.

(2) **Verdadeiro.**

Dado que $a_n < |a_n|$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então pelo teste da comparação $\sum_n a_n$ converge, já que $\sum_n |a_n|$ converge.

(3) **Falso.**

A série $S_n = \sum_n (-1)^n/n = 0$ converge, mas a série $S_n^* = \sum_n 1/n$ é harmônia e não converge.

(4) **Verdadeiro.**

Exercício 25 (ANPEC 2003, Questão 10)

Assinale V (Verdadeiro) ou F (Falso):

(0) $\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n} + \cdots = \frac{1}{i}$ para $i > 0$.

(1) A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{3}\right)^{1-n}$ é divergente.

(2) A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\cdot \left(\frac{5}{3}\right)^n$ divergente.

(3) A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\sqrt{n}}{1+n}$ divergente.

(4) A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+\pi}{n!}$ divergente.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

(1) **Falso.**

(2) **Falso.**

(3) **Verdadeiro.**

(4) **Verdadeiro.**

Exercício 26 (ANPEC 2001, Questão 8)

A respeito das séries abaixo, assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

(0) A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n$ é divergente;

1. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{Fat(n)}$, onde $Fat(n) \equiv n(n-1)(n-2)...4.3.2.1$, é convergente para todo $X \in R$;
2. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + ...$ é divergente;
3. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{12}} + ...$ é divergente;
4. A série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt[n]{n}$ é divergente.

Solução

0. **Falso.**
1. **Verdadeiro.**
2. **Verdadeiro.**
3. **Verdadeiro.**
4. **Falso.**

Exercício 27 (ANPEC 2000, Questão 8)

A respeito dos limites abaixo, assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

0. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+r+(r^2/2!)+(r^3/3!)+(r^4/4!)+...+(r^n/n!)}{(1+r/n)^n} = 1$
1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2r+3r^2+4r^3+5r^4+...+nr^{n-1}}{1+r+r^2+r^3+r^4+...+r^n} > \frac{1}{1+r}$; para $|r| < 1$
2. $r - (r^3/3!) + (r^5/5!) - (r^7/7!) + (r^9/9!) - ...... = \cos(r)$
3. $1 - (r^2/2!) + (r^4/4!) - (r^6/6!) + (r^8/8!) - ...... = \sin(r)$

Solução

0. **Verdadeiro.**

Pela série de Maclaurin

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{r^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{r^i}{i!} = e^r$$

Agora, o limite exponencial

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = e^r$$

Das duas ultimas equações , temos

$$\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{r^i}{i!}}{\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{r}{n})^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{r^i}{i!}}{(1+\frac{r}{n})^n} = 1.$$

(1) **Falso.**

Da série de potências, temos

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} ir^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} ir^{i-1} = \frac{1}{(1-r)^2}, \qquad \text{para} \qquad |r|<1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n} r^{i} = \sum_{i=1}^{\infty} r^{i} = \frac{1}{1-r}, \qquad \text{para} \qquad |r|<1$$

Logo,

$$\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} ir^{i-1}}{\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=0}^{n} r^{i}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} ir^{i-1}}{\sum\limits_{i=0}^{n} r^{i}} = \frac{1}{1-r}.$$

Então, a seguinte desigualdade é falsa para $r=-1/2$

$$\frac{1}{1-r} > \frac{1}{1+r}.$$

(2) **Falso.**

Pela série de Maclaurin

$$\sin(r) = r - \frac{r^3}{3!} + \frac{r^5}{5!} - \frac{r^7}{7!} + \frac{r^9}{9!} - ...$$

(3) **Falso.**

Pela série de Maclaurin

$$\cos(r) = 1 - \frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} - \frac{r^6}{6!} + \frac{r^8}{8!} - ...$$

Exercício 28 (ANPEC 2000, Questão 15)

Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

(0) Se a série $\sum_1^\infty x_n$ for convergente, então a série $\sum_1^\infty |x_n|$ também será convergente;

(1) Se a série $\sum_1^\infty |x_n|$ for convergente, então a série $\sum_1^\infty x_n$ também será convergente;

(2) Sabendo-se que a série $\sum_1^\infty |x_n|$ é convergente, dada uma outra série $\sum_1^\infty y_n$ cujo termo geral satisfaz à propriedade $|y_n| \leq |x_n|$ para todo inteiro natural n, podemos afirmar que $\sum_1^\infty y_n$ também é convergente;

(3) Se a sequência $\{y_n\}$ atender à propriedade $|y_n| \leq 1/n$ para todo inteiro natural n, então a série $\sum_1^\infty |y_n|$ será convergente.

Solução

(0) **Falso.**

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Verdadeiro.**

(3) **Falso.**

Exercício 29 (ANPEC 1997, Questão 2)

Os itens abaixo referem-se a sequências e séries de números reais. Julgue as afirmações :

(0) Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série convergente. Então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(1) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ também converge.

(2) Se $|\alpha| < 1$, então $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}$.

(3) Suponha que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, onde $a, b \in \Re$. Então $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$ se, e somente se, a e b têm o mesmo sinal.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

(1) **Falso.**

(2) **Verdadeiro.**

3 **Falso.**

ANPEC 1994, Questão 11 Marque como verdadeira ou falsa cada uma das proposições abaixo:

0 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^{n^2}}$ é divergente.

1 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^3}\right)$ é divergente.

2 A série $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$ é divergente.

3 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln n}\right)$ é divergente.

4 A série $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$ é divergente.

Solução

0 **Falso.**
1 **Falso.**
2 **Verdadeiro.**
3 **Verdadeiro.**
4 **Verdadeiro.**

ANPEC 1990, Questão 3 Encontre a parte inteira do limite da série

$$1 + 3 + \frac{3^2}{2} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + ...$$

Solução

CAPíTULO 21

Equações Diferenciais e de diferenças

[1]

21.1. Questões ANPEC Trabalhadas

21.1.1. EDOs.

ANPEC 2021, Questão 6.

Considere a seguinte equação diferencial: $y^{iv} - y'' = x + 1$.

Julgue as seguintes afirmativas.

1 A solução particular da equação diferencial ordinária é um polinômio de grau 3.

Verdadeiro no gabarito, mas deveria ser falso ou anulada. Considere **uma** solução particular y_p e seja $v = y_p''$. Temos então $v'' - v = x + 1$, e portanto $v(x) = -x - 1$ resolve a equação. Integrando duas vezes, vemos que a solução particular y_p é também um polinômio, da forma

$$y_p(x) = -\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + ax + b,$$

onde a e b são constantes.

Por que então o gabarito deveria ser falso (ou, melhor ainda, a questão deveria ser anulada)? Seja $y_h(x) = e^x$. Então y_h é solução homogênea, pois resolve $y_h^{iv} - y_h'' = 0$. Logo, $y_p + y_h$ também é solução particular da EDO, mas não é um polinômio.

[1] Última Atualização: 20/09/2022

ANPEC 2020, Questão 10. Classifique as afirmações abaixo segundo a sua veracidade:

> 0 A função $x(t) = e^t + 1$ é uma solução para a equação diferencial $x'(t) = x(t) + t$ em $\mathbb{R}$.

Falso. Basta substituir $x(t) = e^t + 1$ na EDO $x'(t) - x(t) - t = 0$:

$$x'(t) - x(t) - t = e^t - e^t - 1 - t = -1 - t \neq 0.$$

> 3 As funções $x_1(t) = \sin(t)$ e $x_2(t) = \cos(t)$ são as únicas soluções para a equação diferencial $x''(t) + x(t) = 0$.

Falso. qualquer combinação linear do tipo $a\sin(t)+b\cos(t)$, onde a e b são constantes, também é solução da equação diferencial.

> 4 Se $a, b \in \mathbb{R}$ satisfazem $a^2 = 4b$, então a solução geral para a equação $x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0$ é $x(t) = (A + Bt)e^{-\left(\frac{a}{2}\right)t}$, em que $A, B \in \mathbb{R}$ são constantes.

Verdadeiro. A equação característica $r^2 + ar + b = 0$ tem como uma única raiz $-a/2$, dado que $a^2 = 4b$. Então, a solução da equação diferencial é

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\frac{a}{2}t}.$$

ANPEC 2017, Questão 10. Considere as seguintes informações.

> Uma bactéria está disseminando-se rapidamente, de maneira que a velocidade de propagação segue a equação $\dot{p} = Ap(1 - p)$, em que $p = p(t) \in [0, 1]$ é a percentagem da população contaminada após $t \geq 0$ dias, $\dot{p} = \frac{dp}{dp}$ e $A > 0$ é uma constante.

Antes de mais nada, vale a pena apontar a gralha em $\dot{p} = \frac{dp}{dp}$, que deveria ser $\dot{p} = \frac{dp}{dt}$. A seguir, as seguintes afirmativas devem ser analisadas quanto às suas veracidades.

> 0 A função p é uma função logarítmica;

Falso. Suponha $0 < p(0) < 1$. Como a equação é separável, temos que

$$\int_{p(0)}^{p(t)} \frac{dp}{p(1-p)} = \int_0^t A\, d\tau = At,$$

Note que

$$\int_{p_0}^{p(t)} \frac{dp}{p(1-p)} = \ln\left(\frac{p(\tau)}{1-p(\tau)}\right)\Big|_0^t = \ln\left(\frac{p(t)}{1-p(t)}\right) - \ln\left(\frac{p(0)}{1-p(0)}\right) = \ln\left(\frac{1}{\alpha}\frac{p(t)}{1-p(t)}\right)$$

onde $\alpha = p(0)/(1-p(0))$, e $\alpha > 0$. Então

$$\frac{1}{\alpha}\frac{p(t)}{1-p(t)} = e^{At} \implies p(t) = \frac{\alpha e^{At}}{1+\alpha e^{At}}.$$

ANPEC 2014, Questão 10.

Considere a seguinte equação diferencial: $y'' + ay' + y = 5$, $y(0) = 7$, $y'(0) = -3$, em que $a \in R$

Avalie as seguintes afirmações

0 Se $a > 2$, então a solução converge monotonicamente decrescente a $\bar{y} = 5$.

Verdadeiro. A equação característica da equação homogênea $y'' + ay' + y = 0$ é dada por

$$r^2 + ar + 1 = 0,$$

com raízes

$$r_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2-4}}{2}, \quad r_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2-4}}{2}.$$

Dado que $a > 2$, então as raízes r_1 e r_2 são reais e $r_1 < r_2 < 0$. Assim, a solução geral da equação homogênea é

$$y_c = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

Agora, a solução particular é da forma $y_p = 5$. Portanto, a solução geral é dada por

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + 5.$$

Para determinar se y é ou não decrescente, note que $y(0) = 7$, e portanto a solução tem valor inicial 7 e decai para 5 quando x cresce.

1 Se $-2 < a < 2$, então a solução converge oscilando a $\bar{y} = 5$.

Falso para $a = 0$, quando a solução não decai (é puramente oscilatória).

2 Se $a = 2$, então a solução converge a $\bar{y} = 5$.

Verdadeiro. Para $a = 2$, a solução é da forma $c_1e^{-x} + c_2te^{-x} + 5$.

3 Se $a < -2$, então a solução diverge de $\bar{y} = 5$.

Verdadeiro. Neste caso, $r_2 > 0$, e portanto a solução $y = y_c + y_p = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} + 5$ diverge quando $x \to \infty$.

4 Se $a = -2$, então a solução particular é uma função linear de x com inclinação negativa.

Falso, a solução é da forma $c_1e^{x} + c_2te^{x} + 5$ (ver item 2).

ANPEC 2011, Questão 12. Considere as seguintes informações.

Seja A a matriz 2×2 à qual está associado o sistema de equações diferenciais com coeficientes constantes reais

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

Avalie os seguintes itens:

1 A origem $(0, 0)$ é um ponto de sela se $a = b = d = 1$ e $c > 1$.

Verdadeiro. A origem $(0, 0)$ será um ponto de sela se houver dois autovalores com sinais contrários. No caso,

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ c & 1-\lambda \end{bmatrix},$$

e A tem autovalores λ tais que

$$(1-\lambda)^2 - c = 0 \implies \lambda^2 - 2\lambda - c + 1 = 0.$$

O produto de autovalores é $1 - c < 0$ pois $c > 1$. Então os autovalores são reais com sinais distintos.

(3) A origem $(0,0)$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para $a = d = -b = -1$ e $c = \frac{1}{4}$.

Verdadeiro. A origem $(0,0)$ será assintoticamente estável se

$$\lim_{t\to\infty}(x(t), y(t)) = (0,0)$$

para todas condições iniciais. Isto acontecerá se e somente se a parte real dos autovalores forem negativas. Neste problema,

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 \\ \frac{1}{4} & -1-\lambda \end{bmatrix},$$

e um autovalor λ resolve $(-1-\lambda)^2 - 1/4 = 0$, i.e., $\lambda^2 + 2\lambda + 3/4 = 0$. Como o produto dos autovalores é positivo $(= 3/4)$ e a soma negativa $(= -2)$, então ambos autovalores tem parte real negativa.

ANPEC 2002, Questão 14. Considere as afirmativas.

(0) A solução da equação diferencial $\dot{y} = y - y^3$ apresenta 3 equilíbrios estacionários quando $t \to \infty$, dependendo da condição inicial: $y = -1, y = 0$ e $y = 1$. O equilíbrio $y = 0$ é o único que é instável.

Verdadeiro. Os pontos de equilíbrio se determinam da seguinte equação $y - y^3 = 0$. Então as soluções da ultima equação são: $y = -1,\ y = 0$ e $y = 1$.
Agora analisamos as seguintes intervalos

i) $y \in (-\infty, -1) \Rightarrow \ y - y^3 > 0 \ \Rightarrow \ \dot{y} > 0 \ \Rightarrow \ y$ é crescente.
ii) $y \in (-1, 0) \ \Rightarrow \ y - y^3 < 0 \ \Rightarrow \ \dot{y} < 0 \ \Rightarrow \ y$ é decrescente.
iii) $y \in (0, 1) \ \Rightarrow \ y - y^3 > 0 \ \Rightarrow \ \dot{y} > 0 \ \Rightarrow \ y$ é crescente.
iv) $y \in (1, +\infty) \Rightarrow \ y - y^3 < 0 \ \Rightarrow \ \dot{y} < 0 \ \Rightarrow \ y$ é decrescente.

Dos itens ii) e iii) as soluções se afastam de $y = 0$. Portanto, o equilíbrio $y = 0$ é instável.

1 Considere a equação diferencial $\dot{y} = f(y)$, em que f é uma função continuamente diferenciável tal que $f(k) = 0$. Se $f' > 0$ então, para qualquer condição inicial, a solução diverge.

Falso. Em particular, para $y(0) = k$ temos que $y(t) = k$ é solução constante.

ANPEC 1998, Questão 7.

Sabendo que a função real $y(x)$ satisfaz à equação diferencial de segunda ordem

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 4y = 40 + e^{-3x}, \quad \text{calcule } \lim_{x\to\infty} y(x).$$

A equação característica é dada por $r^2 + 5r + 4 = 0$, com raízes $\{-4, -1\}$. Logo, a solução homogênea é dada por $y_h = c_1e^{-4x} + c_2e^{-t}$. Uma solução particular será da forma $y_p = 10 + c_3e^{-3x}$. Note que para qualquer valor de c_1, c_2, c_3, teremos

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} y_h(x) + y_p(x) = \lim_{x\to\infty} c_1e^{-4x} + c_2e^{-t} + 10 + c_3e^{-3x} = 10.$$

ANPEC 2006, Questão 15.

Seja $y(x)$ uma solução da equação diferencial $\frac{dy}{dx} + 2y = 4$. Calcule $\lim_{x\to\infty} y(x)$.

Note que a solução será do tipo $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, onde $y_h(x) = ce^{rt}$ e $y_p(x) = 2$ e r é raiz de $r + 2 = 0$. Isto é, $y(x) = ce^{rt} + 2$. Como $r < 0$, então $\lim_{x\to\infty} y(x) = 2$.

21.1.2. Equações de diferenças. Considere a equação homogênea

$$ay_{t+2} + by_{t+1} + cy_t = 0.$$

Tentamos soluções do tipo r^t, onde r é constante desconhecida. Substituindo na equação, obtemos $r = 0$ ou

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Esta é a chamada *equação auxiliar* ou *característica*. As seguintes possibilidades surgem:

- $r_1 \neq r_2$ raízes reais distintas: a solução geral é $y_t = c_1 r_1^t + c_2 r_2^t$
- Uma única raiz r, repetida. A solução geral do problema é $y_t = c_1 r^t + c_2 t r^t$
- Raízes complexas conjugadas $\rho e^{i\theta}$ e $\rho e^{-i\theta}$. A solução geral do problema é $y_t = \rho^t (c_1 \cos t\theta + c_2 \sin t\theta)$

Em todos os casos acima, c_1 e c_2 são constantes a serem determinadas pelas condições iniciais.

Quando o lado direito da equação não é mais nulo, i.e.,

$$ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = f_n,$$

buscamos soluções do tipo $x_n^h + x_n^p$, onde x_n^h resolve a equação homogênea

$$x_{n+2}^h + ax_{n+1}^h + bx_n^h = 0,$$

e x_n^p é uma solução *particular* qualquer.

No caso em que o lado direito é um polinômio em n, como em

$$ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = p(n),$$

e $p(n)$ é um polinômio, a ideia geral é tentar achar uma solução particular x_n^p que seja também polinômio em n, e da mesma ordem que $p(n)$. Se x_n^p for solução da equação homogênea, então deve-se multiplicar x_n^p por n.

Considere agora o caso

$$ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = c\lambda^n$$

onde c é uma constante. A forma de solução particular dependerá se λ é ou não raíz da equação auxiliar. A primeira tentativa seria buscar uma solução particular da seguinte forma:

(1) Se λ não for raíz da equação auxiliar tente $x_n^p = \alpha\lambda^n$
(2) Se λ for raíz *não repetida* da equação auxiliar tente $x_n^p = \alpha n\lambda^n$
(3) Se λ for raíz *repetida* da equação auxiliar tente $x_n^p = \alpha n^2\lambda^n$

ANPEC 2022, Questão 14.

> Considere o sistema de equações em diferenças dado por
>
> $$x_{t+1} = -4x_t + 5y_t,$$
>
> $$y_{t+1} = -2x_t + 3y_t,$$
>
> sendo $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Sabe-se que $x_0 = 4$ e $y_0 = 1$. Encontre $4L$, em que $L = \lim_{t\to\infty} \frac{x_t}{1+y_t}$.

Calculando os autovalores λ_1, λ_2 de $A = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, obtemos $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$. Os autovetores correspondentes são

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A solução é da forma

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \alpha\lambda_1^t\vec{v}_1 + \beta\lambda_2^t\vec{v}_2. = \alpha(-2)^t \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para calcular α e β, basta usar as condições iniciais:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Resulta que $\alpha = 1$ e $\beta = -1$. Logo,

$$4L = 4 \lim_{t\to\infty} \frac{x_t}{1+y_t} = 4 \lim_{t\to\infty} \frac{5(-2)^t - 1}{1 + 2(-2)^t - 1} = 4 \lim_{t\to\infty} \frac{5(-2)^t - 1}{2(-2)^t} = 10.$$

ANPEC 2015, Questão 10. Considere as seguintes informações.

> A demanda de mercado de um produto depende do preço corrente expresso na função $D_t = a - bp_t$, em que a e b são constantes positivas. Por motivos de estoque, a oferta de mercado do mesmo produto depende dos preços dos dois últimos períodos expressos em $S_t = c + dp_{t-1} + ep_{t-2}$, em que c, d e e são constantes positivas. Desta forma, ao igualarmos demanda e oferta teremos a dinâmica

dos preços seguindo uma equação em diferenças finitas de ordem 2.

Note que a equação de diferença é dada por

$$bp_t + dp_{t-1} + ep_{t-2} = a - c.$$

As seguintes afirmativas devem ser avaliadas segundo suas veracidades.

(0) Se $a > c$, existe um preço estacionário de equilíbrio;

Verdadeiro, pois tentando achar solução particular constante $p_t = \alpha$, temos que

$$\alpha = \frac{a-c}{b+d+e} > 0$$

é solução estacionária. Note que $b + d + e > 0$ pois estas constantes são positivas.

(1) Se $d < 2\sqrt{be}$, então a trajetória de preços de equilíbrio irá oscilar entorno (sic) do equilíbrio estacionário, quando este existir;

Verdadeiro. Buscando solução homogênea da forma $p_t = \lambda^t$, temos que λ é raiz da equação característica $b\lambda^2 + d\lambda + e = 0$, i.e.,

$$\lambda = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4be}}{2b}.$$

Como $d^2 < 4be$, então a raiz é complexa e a solução oscilatória. Sendo $\lambda = re^{i\theta}$, a solução será $r^n(A\cos\theta + B\sin\theta)$ para constantes A e B a serem determinadas.

(2) Se $d < 2\sqrt{be}$ e $e > b$, então a trajetória de equilíbrio oscila entorno (sic) do equilíbrio estacionário se aproximando dele, quando este existir;

Falso. Como contra-exemplo, tome $d = 1$ e $be = 1/2$. Neste caso,

$$\lambda = \frac{-1 \pm i}{2b}.$$

Tomando b pequeno o suficiente, teremos que $|\lambda| > 1$, e o módulo da solução tende a infinito.

(4) Se $d = 2\sqrt{be}$ e $d < 2b$, então a trajetória de equilíbrio se aproxima monotonicamente (crescente ou decrescente) ao equilíbrio estacionário, quando ele existir.

Falso. Neste caso, $\lambda = -d/(2b) \in (-1, 0)$ é raiz dupla. A solução geral é

$$p_t = A\lambda^t + Bt\lambda^t + \alpha.$$

Então, de fato, $\lim_{t\to\infty} p_t = 0$. Entretanto, a convergência não é monotônica para $B \neq 0$.

ANPEC 2002, Questão 14. Considere as seguintes afirmativas.

(3) Sejam $z_{n+1} = Az_n$ um sistema de 2 equações em diferenças finitas e r_1, r_2 os autovalores de A. Se $0 < r_1 < 1$ e $r_2 < 0$ então o sistema converge com oscilações para 0 quando $n \to \infty$.

Falso. Como os autovalores são distintos, a solução é da forma $Ar_1^n\vec{v}_1 + Br_2^n\vec{v}_2$, onde $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são autovetores linearmentes (eles existem pois os autovalores são distintos). Como ambos autovalores são reais, a solução não é oscilatória.

ANPEC 1997, Questão 09.

Considere a equação de diferenças finitas $x_{n+2} = px_{n+1} + (1-p)x_n$, onde $p \in]0, 1[$.

Classifique como verdadeira ou falsa as afirmativas abaixo.

(0) Se $x_1 = 0$ então não existe $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Falso. Note que a equação característica é dada por $r^2 - pr + (p-1) = 0$, com raízes 1 e $p - 1$. Então a solução geral é da forma $x_n = c_1 + c_2(p-1)^n$. Como $0 < p < 1$, então existe o limite $\lim_{n\to\infty} x_n = c_1$.

(1) Se $x_m = x_n$ para algum m diferente de n então $x_n =$ constante.

Verdadeiro. Usando a resolução do item 0, $x_n = x_m$ implica que

$$c_2(p-1)^n = c_2(p-1)^m.$$

Como $p < 1$ e $n \neq m$, então $(p-1)^{n-m} \neq 0$. Logo, $c_2 = 0$ e portanto $x_n = c_1$ é constante.

2 Se a sequência $\{x_n\}$ é uma progressão geométrica, então a razão é necessariamente $1-p$.

Falso. A razão pode ser um.

3 Se x_n não é uma sequência constante, então a sequência cujo termo geral é $\{x_n - x_{n-1}\}$ é uma progressão geométrica de razão negativa.

Verdadeiro. Como x_n não é constante, então $c_2 \neq 0$, e segue-se que

$$x_n - x_{n-1} = c_2[(p-1)^n - (p-1)^{n-1}] = c_2(p-1)^{n-1}[(p-1)-1] = c_2(p-2)(p-1)^{n-1}.$$

21.2. Questões ANPEC Resolvidas

Exercício 250 (ANPEC 2022, Questão 5). *Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas:*

0 *As soluções da equação diferencial $y = 2y'$ são dadas por funções da forma $y(x) = ce^{2x}$, em que c é uma constante. Falso*

1 *Uma função $y : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é solução da equação diferencial $y' = y/x - 1$ se, e somente se, $y(x) = x(c - \ln(x))$, para alguma constante $c \in \mathbb{R}$. Verdadeiro.*

2 *Uma função $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é solução da equação diferencial $xy' - y = 0$ se, e somente se, y for uma função linear (ou seja, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $y(x) = kx$, para todo $x \in \mathbb{R}$). Verdadeiro.*

3. *Uma função $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é solução da equação diferencial $y'' = \alpha y' + \beta$, em que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ com $\alpha \neq 0$ se, e somente se, existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $y(x) = -\frac{\beta}{\alpha}x + c$. Verdadeiro.*
4. *Dada uma função real $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que possui derivadas de todas as ordens, denote por $y^{(n)}(x)$ a sua derivada de ordem $n \geq 3$. Fixado $n \geq 3$, o conjunto de todas as soluções $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para a equação diferencial $y^{(n)} = 0$ é dado pelo conjunto de todos os polinômios $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de grau menor ou igual a n. Falso.*

EXERCÍCIO 251 (ANPEC 2022, Questão 14). *Considere o sistema de equações em diferenças dado por*

$$x_{t+1} = -4x_t + 5y_t,$$
$$y_{t+1} = -2x_t + 3y_t,$$

sendo $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Sabe-se que $x_0 = 4$ e $y_0 = 1$. Encontre $4L$, em que $L = \lim_{t\to\infty} \frac{x_t}{1+y_t}$.

EXERCÍCIO 252 (ANPEC 2021, Questão 6). *Considere a seguinte equação diferencial: $y^{iv} - y'' = x + 1$.*
Julgue as seguintes afirmativas:

0. *A equação característica associada à equação diferencial ordinária tem 3 raízes. (Anulada: Falso)*
1. *A solução particular da equação diferencial ordinária é um polinômio de grau 3. (Verdadeiro)*
2. *A soma dos coeficientes da solução particular da equação diferencial ordinária é estritamente positiva. (Falso)*
3. *A solução particular da equação diferencial ordinária é $y_p = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2}$. (Falso)*
4. *A solução particular da equação diferencial ordinária restrita aos números reais não negativos atinge seu valor máximo em $x = 0$. (Verdadeiro)*

Exercício 253 (ANPEC 2020, Questão 10). *Classifique as afirmações abaixo segundo a sua veracidade:*

(0) *A função* $x(t) = e^t + 1$ *é uma solução para a equação diferencial* $x'(t) = x(t) + t$ *em* $\mathbb{R}$.

(1) *Sabendo que* $x_0 = 4$, *temos que* $x_t = \left(\frac{2}{3}\right)^t + 3$ *é solução da equação em diferenças* $3x_{t+1} = 2x_t + 3$.

(2) *Considere funções de demanda e oferta de um determinado bem dadas, respectivamente, por* $d(p) = a_0 - b_0 p$ *e* $s(p) = a_1 + b_1 p$, *em que* a_0, b_0, a_1, b_1 *são constantes positivas e* $a_0 > a_1$. *Supondo que o preço* $p = p(t)$ *varie com o tempo de modo que* $p'(t) = \lambda(d(p) - s(p))$, *com* $\lambda > 0$, *tem-se que existe uma constate real* C *tal que* $p(t) = Ce^{-\lambda(a_0 - a_1)t} + \frac{a_0 - a_1}{b_0 + b_1}$.
Em particular, quando $t \to \infty, p(t)$ *converge para o preço de equilíbrio* $p^e = \frac{a_0 - a_1}{b_0 + b_1}$

(3) *A funções* $x_1(t) = \sin(t)$ *e* $x_2(t) = \cos(t)$ *são as únicas soluções para a equação diferencial* $x''(t) + x(t) = 0$.

(4) *Se* $a, b \in \mathbb{R}$ *satisfazem* $a^2 = 4b$, *então a solução geral para a equação* $x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0$ *é* $x(t) = (A + Bt)e^{-\left(\frac{a}{2}\right)t}$, *em que* $A, B \in \mathbb{R}$ *são constantes.*

Solução

(0) **Falso.**
Suponha que $x(t) = e^t + 1$ *é solução de* $x'(t) = x(t) + t$. *Então*

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) + t, \\ e^t &= e^t + 1 + t. \end{aligned}$$

Assim, $t = 1$ *é uma constante, isto é contraditório já que* t *não é constante.*

(1) **Verdadeiro.**
Primeiro, no te que $x_0 = (\frac{2}{3})^0 + 3 = 4$ *é condição inicial de* x_t. *Agora,*

$x_{t+1} = (\frac{2}{3})^{t+1} + 3$, *então*

$$\begin{aligned} 3x_{t+1} &= 3\Big(\frac{2}{3}\Big)^{t+1} + 9, \\ &= 2\Big(\frac{2}{3}\Big)^{t} + 9, \\ &= 2(x_t - 3) + 9, \\ &= 2x_t + 3. \end{aligned}$$

2 **Falso.**

Suponha que

$$p(t) = C\ e^{-\lambda(a_0 - a_1)t} + \frac{a_0 - a_1}{b_0 + b_1}$$

é solução da equação diferencial. Então

$$\begin{aligned} p'(t) &= -\lambda(a_0 - a_1)C\ e^{-\lambda(a_0-a_1)t}, \\ &= -\lambda(a_0 - a_1)\Big(p - \frac{a_0 - a_1}{b_0 + b_1}\Big), \\ &= -\lambda\frac{(a_0 - a_1)^2}{b_0 + b_1} - \lambda(a_0 - a_1)p. \end{aligned}$$

Da igualdade $p'(t) = \lambda(d(p) - s(p))$ e da equação anterior, juntamos

$$\lambda(a_0 - a_1) - \lambda(b_0 + b_1)p = \lambda\frac{(a_0 - a_1)^2}{b_0 + b_1} - \lambda(a_0 - a_1)p,$$

isto é verdade quando $b_0 + b_1 = a_0 - a_1$, para outras casos é falso. O enunciado é falso já que a_0, b_0, a_1, b_1 são constante positivos e $a_0 > a_1$.

3 **Falso.**

A função $x_3(t) = 2\sin(t)$ também é solução da equação diferencial, já que $x_3''(t) + x_3(t) = 0$.

4 **Verdadeiro.**

A equação característica $r^2 - ar + b = 0$ tem-se uma única raiz, dado que $a^2 = 4b$. Então, a solução da equação diferencial é

$$x(t) = (A + Bt)e^{-(\frac{a}{2})t}.$$

Exercício 254 (ANPEC 2018, Questão 2). *Um economista fez um modelo sobre a evolução do PIB que desconsidera a incerteza. De modo mais preciso, ele considerou que o PIB anual segue uma equação em diferença que pode ser descrita como:*

$$Y_t = 2Y_{t-1} - \frac{99}{100}Y_{t-2} - \frac{2}{100},$$

em que Y_t representa o PIB do ano t medido em trilhões de Reais. A solução para o tempo t é

$$Y_t = A_1 b_1^t + A_2 b_2^t + k.$$

Encontre o valor de $b_1 + b_2 + k$.

Solução

Resposta 4

Exercício 255 (ANPEC 2018, Questão 9). *Suponha que o tempo é continuo e que os preços p_t se ajustam de maneira proporcional ao excesso de demanda z_t com constante de proporcionalidade k. Isto é, $\dot{p}_t = kz_t$. Assumindo que as ofertas e demandas são lineares: $q_t^s = c + dp_t, q_t^d = a - bp_t$, respectivamente, julgue as seguintes afirmativas, se as constantes k, a, b, c e d são estritamente positivas:*

- (0) *A equação diferencial para o preço é $\dot{p}_t = k(b+d)p_t - k(a-c)$;*
- (1) *O estado estacionário do preço depende da constante de proporcionalidade k;*
- (2) *O estado estacionário $\bar{p}$ é sempre positivo;*
- (3) *O estado estacionário é estável independentemente das constantes;*
- (4) *Se $p_t = Ae^{Bt} + \bar{p}$ é a solução particular de $\dot{p}_t = kz_t$, então $(p_0 - A)B = a - c$.*

Solução

- (0) **Falso.**
- (1) **Falso.**
- (2) **Falso.**

3 **Verdadeiro.**

4 **Falso.**

EXERCÍCIO 256 (ANPEC 2017, Questão 3). *Considere a seguinte equação em diferenças:* $y_{t+3} - y_{t+2} - y_{t+1} - 2y_t = 3t - 3$. *Se temos as seguintes condições iniciais:* $y_0 = 3$, $y_1 = 2$ *e* $y_2 = -5$, *classifique as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas:*

0 *A solução da equação homogênea associada é explosiva;*

1 *A solução particular é uma função quadrática em* t*;*

2 *Em* $t = 30$ *temos que* $y_{30} = -27$*;*

3 *A solução da equação homogênea associada é uma combinação linear de potências de números reais que têm valores absolutos maiores ou menores que* 1*;*

4 *A solução é oscilante entorno de uma função linear.*

Solução

0 **Verdadeiro.** *A equação homogênea é* $y_{t+3} - y_{t+2} - y_{t+1} - 2y_t = 0$. *Logo, a equação característica é*

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 2 = 0,$$

Por inspeção, vemos que uma das raízes é $\lambda = 2$, *e portanto, a solução homogênea é explosiva. Para calcular as outras razízes, vemos que*

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$$

As raízes são $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1/2 \pm \sqrt{3}/2i$. *As razízes complexas têm módulo um, e são da forma* $e^{\pm i\theta}$. *Como*

$$\tan(\theta) = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

então $\theta = 120° = 2\pi/3$. Portanto, a solução geral da equação homogênea é dada por

$$y_{t,c} = c_1 2^t + c_2 \sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right) + c_3 \cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right).$$

(1) **Falso.** *A solução particular tem a forma $y_{t,p} = At + B$. Da equação em diferença, temos*

$$A(t+3) + B - A(t+2) - B - A(t+1) - B - 2At - 2B = 3t - 3,$$

e portanto $-3At - 3B = 3t - 3$. Assim $A = -1$ e $B = 1$. Portanto, a equação particular é $y_{t,p} = -t + 1$.

(2) **Verdadeiro.** *Do item (0) e (1) temos a solução geral*

$$y_t = y_{t,c} + y_{t,p} = c_1 2^t + c_2 \sin\left(\frac{2}{3}\pi t\right) + c_3 \, \cos\left(\frac{2}{3}\pi t\right) - t + 1.$$

Das condições iniciais

$$\begin{aligned} c_1 + c_3 &= 2 \\ 2c_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 - \frac{1}{2}c_3 &= 2 \\ 4c_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 - \frac{1}{2}c_3 &= -4, \end{aligned}$$

onde a solução é $c_1 = 0,\ c_2 = 2\sqrt{3}$ e $c_3 = 2$. Então

$$y_t = 2\sqrt{3}\, \sin\left(\frac{2}{3}\pi t\right) + 2\, \cos\left(\frac{2}{3}\pi t\right) - t + 1.$$

Para $t = 30,\ y_{30} = -27$.

(3) **Falso.** *Do item (0), a solução homogênea*

$$y_{t,c} = c_1 2^t + c_2\, \sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + c_3\, \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right),$$

esta equação é uma combinação linear de uma potência, um seno e um coseno.

(4) **Verdadeiro.**

A solução y_t é oscilante em torno de $-t+1$, dado que y_t apresenta o seno e coseno.

Exercício 257 (ANPEC 2017, Questão 10). *Uma bactéria está disseminando-se rapidamente, de maneira que a velocidade de propagação segue a equação $\dot{p} = Ap(1-p)$, em que $p = p(t) \in [0,1]$ é a percentagem da população contaminada após $t \geq 0$ dias, $\dot{p} = \frac{dp}{dp}$ e $A > 0$ é uma constante. Analisar a veracidade das seguintes afirmações*

(0) *A função p é uma função logarítmica;*

(1) *Se inicialmente havia 1% da população infectada e depois de 4 dias 10% da população mostrou-se contaminada, então $A = \frac{1}{4}\ln(11)$;*

(2) *O tempo necessário para a bactéria duplicar a população inicialmente infectada é $A^{-1}\ln 2$;*

(3) *Se inicialmente havia 10% de infectados, o instante da maior velocidade de propagação da bactéria é $2A^{-1}\ln 3$;*

(4) *Existe um valor de $A > 0$ para o qual a máxima percentagem da população que resulta infectada é 50%.*

Solução

(0) **Falso.**

Da hipótese

$$\frac{dp}{d\tau} = \dot{p}(\tau) = Ap(\tau)(1-p(\tau)),$$

$$\int_0^t \frac{dp(\tau)}{p(\tau)(1-p(\tau))} = \int_0^t A\,d\tau,$$

$$\ln\left(\frac{p(\tau)}{1-p(\tau)}\right)\Big|_0^t = A\tau\Big|_0^t,$$

$$\ln\left(\frac{p(t)}{1-p(t)}\right) - \ln\left(\frac{p(0)}{1-p(0)}\right) = At.$$

Denotemos $\alpha = p(0)/(1-p(0))$, *onde* $\alpha > 0$. *Então*

$$\ln\left(\frac{1}{\alpha}\frac{p(t)}{1-p(t)}\right) = At,$$
$$\frac{1}{\alpha}\frac{p(t)}{1-p(t)} = e^{At},$$
$$p(t) = \frac{\alpha\, e^{At}}{1+\alpha\, e^{At}}.$$

1 **Verdadeiro.**

Da hipótese, a velocidade de propagação no tempo $t = 0$ *é* $p(0) = 1\% = 0,01$ *e no tempo* $t = 4$ *é* $p(4) = 10\% = 0,1$. *Então* $p(0) = \alpha/(1+\alpha) = 0,01$, *logo* $\alpha = 1/99$. *Também sabemos que*

$$p(4) = \frac{1/99\ \exp(4A)}{1+1/99\ \exp(4A)} = \frac{\exp(4A)}{99+\exp(4A)} = 0,1.$$

Portanto $A = \frac{1}{4}\ln(11)$.

2 **Falso.**

Sabemos que $p(0) = \alpha/(1+\alpha)$. *Agora determinamos o tempo necessário para que duplique a população inicial, então*

$$2\frac{\alpha}{1+\alpha} = \frac{\alpha\, e^{At}}{1+\alpha\, e^{At}},$$
$$\frac{2}{1+\alpha} = e^{At},$$
$$t = A^{-1}\ln\left(\frac{2}{1+\alpha}\right).$$

logo do item 0 $\alpha \neq 0$, *então* $t \neq A^{-1}\ln(2)$.

3 **Verdadeiro.**

4 **Falso.**

EXERCÍCIO 258 (ANPEC 2016, Questão 15). *Considere a equação diferencial abaixo:*

$$y''(x) - 3y'(x) = 0, \text{ tal que } y(1) = 1 + 2e^3 \text{ e } y'(1) = 6e^3.$$

Encontre $y'(0)$.

Solução

Resposta 6

EXERCÍCIO 259 (ANPEC 2015, Questão 10). *A demanda de mercado de um produto depende do preço corrente expresso na função* $D_t = a - bp_t$, *em que* a *e* b *são constantes positivas. Por motivos de estoque, a oferta de mercado do mesmo produto depende dos preços dos dois últimos períodos expressos em* $S_t = c + dp_{t-1} + ep_{t-2}$, *em que* c, d *e* e *são constantes positivas. Desta forma, ao igualarmos demanda e oferta teremos a dinâmica dos preços seguindo uma equação em diferenças finitas de ordem* 2*. Analisar o valor de verdade das seguintes afirmações*

- (0) *Se* $a > c$, *existe um preço estacionário de equilíbrio;*
- (1) *Se* $d < 2\sqrt{be}$, *então a trajetória de preços de equilíbrio irá oscilar entorno do equilíbrio estacionário, quando este existir;*
- (2) *Se* $d < 2\sqrt{be}$ *e* $e > b$, *então a trajetória de equilíbrio oscila entorno do equilíbrio estacionário se aproximando dele, quando este existir;*
- (3) *Se* $d > 2\sqrt{be}$, *as raízes da equação característica são números reais de sinais opostos;*
- (4) *Se* $d = 2\sqrt{be}$ *e* $d < 2b$, *então a trajetória de equilíbrio se aproxima monotonicamente (crescente ou decrescente) ao equilíbrio estacionário, quando ele existir.*

Solução

- (0) **Verdadeiro.**
- (1) **Verdadeiro.**
- (2) **Falso.**
- (3) **Falso.**

(4) **Falso.**

EXERCÍCIO 260 (ANPEC 2014, Questão 10). *Considere a seguinte equação diferencial:* $y'' + ay' + y = 5, \;\; y(0) = 7, \;\; y'(0) = -3$, *em que* $a \in R$ *Avalie as seguintes afirmações*

(0) *Se* $a > 2$, *então a solução converge monotonicamente decrescente a* $\bar{y} = 5$.

(1) *Se* $-2 < a < 2$, *então a solução converge oscilando a* $\bar{y} = 5$.

(2) *Se* $a = 2$, *então a solução converge a* $\bar{y} = 5$.

(3) *Se* $a < -2$, *então a solução diverge de* $\bar{y} = 5$.

(4) *Se* $a = -2$, *então a solução particular é uma função linear de* x *com inclinação negativa.*

Solução

(0) **Verdadeiro.**

A equação característica da equação homogênea $y'' + ay' + y = 5$ *é dado por*

$$r^2 + ar + 1 = 0.$$

Logo, as raízes da equação anterior são

$$r_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \;\; r_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

Dado que $a > 2$, *então as raízes* r_1 *e* r_2 *são reais e* $r_1 < r_2 < 0$. *Assim, a solução geral da equação homogênea é*

$$y_c = c_1 \, e^{r_1 x} + c_2 \, e^{r_2 x}$$

Agora, a solução particular é da forma $y_p = m$, *então da equação diferencial* $y_p'' + ay_p' + y_p = 5$ *temos* $y_p = m = 5$.
Portanto, a solução geral

$$y = y_c + y_p = c_1 \, e^{r_1 x} + c_2 \, e^{r_2 x} + 5.$$

Derivando a função y, *temos*

$$y' = c_1 r_1 \, e^{r_1 x} + c_2 r_2 \, e^{r_2 x}$$

Das condições iniciais

$$c_1 + c_2 = 2$$
$$c_1 r_1 + c_2 r_2 = -3,$$

onde a solução deste sistema é

$$c_1 = \frac{2r_2 + 3}{r_2 - r_1} \qquad e \qquad c_2 = \frac{2r_2 + 3}{r_1 - r_2}.$$

Remplazando c_1 *e* c_2 *na equação da derivada*

$$y'(x) = \frac{2r_1 r_2 + 3r_1}{r_2 - r_1}\; e^{r_1 x} \; + \frac{2r_1 r_2 + 3r_2}{r_1 - r_2} e^{r_2 x}.$$

Notei que $r_1\, r_2 = 4$*, então*

$$y'(x) = \frac{4 + 3r_1}{r_2 - r_1}\; e^{r_1 x} \; - \frac{4 + 3r_2}{r_2 - r_1} e^{r_2 x}.$$

Dado que $r_1 < r_2$*, temos*

$$\frac{4 + 3r_1}{r_2 - r_1} < \frac{4 + 3r_2}{r_2 - r_1}$$
$$\frac{4 + 3r_1}{r_2 - r_1}\; e^{r_1 x} < \frac{4 + 3r_2}{r_2 - r_1}\; e^{r_1 x} < \frac{4 + 3r_2}{r_2 - r_1}\; e^{r_2 x},$$

assim

$$y'(x) = \frac{4 + 3r_1}{r_2 - r_1}\; e^{r_1 x} \; - \frac{4 + 3r_2}{r_2 - r_1}\; e^{r_2 x} < 0.$$

Já que $y'(x) < 0, \;\; \forall x \in (0, +\infty)$*, então a função* y *é decrescente. Por outro lado, dado que* $r_1 < r_2 < 0$*, tem-se*

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} c_1\, e^{r_1 x} + c_2\, e^{r_2 x} + 5 = 5.$$

Portanto, a função y *converge a* 5 *quando* x *vai para o infinito.*

1. **Falso.**
2. **Verdadeiro.**
3. **Verdadeiro.**
4. **Falso.**

EXERCÍCIO 261 (ANPEC 2012, Questão 12). *Considere as equações diferenciais abaixo e julgue as afirmativas:*

$$\text{(I)} \qquad t^2y' + ty = 1 \quad (\textit{para}\ t > 0).$$
$$\text{(II)} \qquad y'' - 2y' - 3y = 9t^2.$$

(0) *(I) e (II) são equações diferenciais lineares.*
(1) *O fator integrante da equação (I) é* $I(t) = e^t$.
(2) $y = \frac{\ln t}{t}$ *é uma solução da equação (I), para o problema de valor inicial* $y(1) = 0$.
(3) *A solução da equação homogênea associada à equação (II) é* $y(t) = k_1e^{3t} + k_2e^{-t}$*, em que* k_1 *e* k_2 *são constantes.*
(4) $y_p(t) = At^2$ *é uma solução particular de (II) para algum A real.*

Solução

(0) **Verdadeiro.**
(1) **Falso.**
(2) **Verdadeiro.**
(3) **Verdadeiro.**
(4) **Falso.**

EXERCÍCIO 262 (ANPEC 2011, Questão 11). *Seja* $g : R \to R$ *uma função contínua e* $\Im$ *o conjunto de todas as soluções* $x : R \to R$ *da equação diferencial*

$$x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) = g(t). \tag{21.2.1}$$

Seja $\varphi \in \Im$ *uma solução de* (21.2.1) *com condições iniciais* $\varphi(0) = 3$ *e* $\varphi'(0) = 4$. *Julgue os itens abaixo:*

(0) *Se* $g(t) = e^{-t}$*, função* $x_p(t) = -\frac{1}{2}te^{-t}$ *é uma solução particular de* (21.2.1)
(1) *Se* $g(t) = e^{-t}$*, a solução* φ *é dada por* $16\varphi(t) = 19e^{-t} + 29e^{3t} - 4te^{-t}$.
(2) *Se* $g(t) = 3t$*, a função* $x_p(t) = \frac{2}{3} - t$ *é uma solução particular de* (21.2.1).
(3) *Se* $g(t) = 3$*, a função* $x_p = -2$ *é uma solução particular de* (21.2.1).
(4) *Se* $g(t) = 3$*, a solução* φ *é dada por* $\varphi(t) = 2e^{-t} + 2e^{3t} - 1$.

Solução

(0) **Falso.**
(1) **Verdadeiro.**
(2) **Verdadeiro.**
(3) **Falso.**
(4) **Verdadeiro.**

EXERCÍCIO 263 (ANPEC 2011, Questão 12). *Seja A a matriz $2\times$ à qual está associado o sistema de equações diferenciais com coeficientes constantes reais*

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

Avalie os seguintes itens:

(0) *Para $a = b = d = 1$ e $c = 4$, os autovalores de A são $\lambda = 1$ e $\mu = 3$.*
(1) *A origem $(0,0)$ é um ponto de sela se $a = b = d = 1$ e $c > 1$.*
(2) *Para $a = d = -b = -1$ e $0 < c < 1$, os autovalores de A são números reais negativos distintos.*
(3) *A origem $(0,0)$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para $a = d = -b = -1$ e $c = \frac{1}{4}$.*
(4) *A origem $(0,0)$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para $a = c = -d = -1$ e $b = 2$.*

Solução

(0) **Falso.**
(1) **Verdadeiro.**
(2) **Verdadeiro.**
(3) **Verdadeiro.**
(4) **Falso.**

Exercício 264 (ANPEC 2010, Questão 12). *Considere as equações diferenciais abaixo e julgue as afirmativas:*

$$(I)\ y'' - 4y = 0 \qquad (II)\ y'' - 3y' - 4y = 4x^2 \qquad (III)\ y'' - 2y' + y = 0$$

0. *(I), (II) e (III) são equações diferenciais lineares de segunda ordem;*
1. $y = e^{-2x} + 2e^{2x}$ *é solução de (I), para os valores de contorno* $y(0) = 3$ *e* $y(\ln 3) = \frac{163}{9}$*;*
2. *A solução da homogênea associada a (II) é* $y_h = Ae^{-3x} + Be^{-4x}$*, em que A e B são constantes arbitrárias;*
3. $y_p = -x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{13}{8}$ *é solução particular de (II);*
4. *A equação característica de (III) possui 2 raízes distintas.*

Solução

0. **Verdadeiro.**
1. **Verdadeiro.**
2. **Falso.**
3. **Verdadeiro.**
4. **Falso.**

Exercício 265 (ANPEC 2010, Questão 15). *Considere o sistema de equações diferenciais abaixo.*

$$\begin{cases} x' = 2x - 2y \\ y' = -3x + y \end{cases}$$

Se $x(0) = 5$ *e* $y(0) = 0$*, encontre* $\frac{x'''(0)}{2}$.

Solução

Resposta 95

Exercício 266 (ANPEC 2008, Questão 12). *Considere a equação diferencial* $y''(x) + y'(x) + 2y(x) = 0$ *com condições iniciais* $y(0) = 1$ *e* $y'(0) = 0$*. Calcule* $y'''(0)$*.*

Solução

Da hipótese $y''(x) = -y'(x) - 2y(x)$, *então* $y''(0) = -2$. *Logo* $y'''(x) = -y''(x) - 2y'(x)$, *substituindo para* $x = 0$ *temos* $y'''(0) = -y''(0) - 2y'(0)$. *Portanto* $y'''(0) = 2$.

EXERCÍCIO 267 (ANPEC 2006, Questão 3). *Avalie as opções*

- (0) *Seja* $x_t = 0,5x_{t-1} + 3, x_0 = 0$. *Então,* $\lim_{t\to\infty} x_t = 6$.
- (1) *Seja* $x_t = 0,5x_{t-1} + 3, x_0 = 2$. *Então,* $\lim_{t\to\infty} x_t = 8$.
- (2) *Se* $x_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2}$, *então* $\lim_{t\to\infty} x_t = K$, *em que* K *é finito, se e somente se* α_0 *e* α_1 *forem menores do que* 1 *em módulo.*
- (3) *Uma matriz* A $n \times n$ *é diagonalizável somente se seus autovalores forem todos distintos.*
- (4) *Considere duas séries de números positivos* $S_n = \sum_n a_n$ *e* $s_n^* = \sum_n b_n$ *com* $a_n \geq b_n$ *para todo* $n > 100$. *Então se* S_n *converge,* S_n^* *também converge.*

Solução

- (0) **Verdadeiro.**
- (1) **Falso.**
- (2) **Falso.**
- (3) **Falso.**
- (4) **Verdadeiro.**

EXERCÍCIO 268 (ANPEC 2006, Questão 15). *Seja* $y(x)$ *uma solução da equação diferencial* $\frac{dy}{dx} + 2y = 4$. *Calcule* $\lim_{x\to\infty} y(x)$.

Solução

Resposta 2

EXERCÍCIO 269 (ANPEC 2005, Questão 8). *Avalie as afirmativas:*

- (0) *Seja* $f : \Re \to \Re$ *uma função duas vezes continuamente diferenciável. Se* f *atinge um máximo local estrito em* x_0, *então* $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$.

1 *Se uma matriz simétrica $n \times n$ A é idempotente, então para todo $\nu \in \Re^n, \nu' A\nu \geq 0$.*

2 *Se uma matriz $n \times n$ A é idempotente, então $tr(A) \geq n$.*

3 *A equação diferencial $\ddot{x}+2\dot{x}+x=0$ tem solução geral $x(t)=(C_1+C_2t)\,e^{-t}$, em que C_1 e C_2 são constantes.*

4 *A equação diferencial $\ddot{x}+\dot{x}+x=0$ tem solução geral $x(t)=(C_1+C_2t)\,e^{-t/2}$, em que C_1 e C_2 são constantes.*

Solução

0 **Falso.**

1 **Verdadeiro.**

2 **Falso.**

3 **Verdadeiro.**

4 **Falso.**

Exercício 270 (ANPEC 2005, Questão 15). *Se a função $y(x)$ é uma solução da equação diferencial $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=0$ e $y(0)=1$, Calcule o valor de $\frac{d^3y}{dx^3}(0)$.*

Solução

Resposta 1

Exercício 271 (ANPEC 2004, Questão 11). *Considerando uma solução $x(t)$ qualquer da equação diferencial $3\cdot x''(t)+4\cdot x'(t)+x(t)=0$, assinale V (verdadeiro) ou F (falso)*

0 *se $x(t)$ é uma função não-nula então $\lim_{t\to+\infty} x(t)=0$;*

1 *se $x(t)$ é uma função não-nula então $\lim_{t\to-\infty} x(t)=+\infty$;*

2 *$x(t)$ tem um ponto de mínimo global na reta real $\Re$;*

3 *se $x(t)$ é tal que $x(0)=0$ e $x'(0)=1$ então $\lim_{t\to-\infty} x(t)=-\infty$;*

4 *se $x(t)$ é tal que $x(0)=0$ e $x'(0)=1$ então $x(t)$ tem um ponto de máximo global na reta real $\Re$.*

Solução

0 **Verdadeiro.**
1 **Falso.**
2 **Falso.**
3 **Verdadeiro.**
4 **Verdadeiro.**

Exercício 272 (ANPEC 2004, Questão 15). *Considere a equação diferencial* $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$ *com* $y(0) = 2$ *e* $\frac{dy(0)}{dx} = 2$. *Calcule* $y(\ln(2))$.

Solução

Resposta 4

Exercício 273 (ANPEC 2003, Questão 15). *Considerando que a função* $y : \Re^+ \to \Re$ *satisfaz à equação diferencial de primeira ordem* $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$, *e que* $y(x = 3) = 18$, *qual deve ser o valor de* x *para que* $y(x)$ *seja igual a* 4*?*

Solução

Resposta 1

Exercício 274 (ANPEC 2002, Questão 14). *Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):*

0 *A solução da equação diferencial* $\dot{y} = y - y^3$ *apresenta 3 equilíbrios estacionários quando* $t \to \infty$, *dependendo da condição inicial:* $y = -1, y = 0$ *e* $y = 1$. *O equilíbrio* $y = 0$ *é o único que é instável.*

1 *Considere a equação diferencial* $\dot{y} = f(y)$, *em que* f *é uma função continuamente diferenciável tal que* $f(k) = 0$. *Se* $f' > 0$ *então, para qualquer condição inicial, a solução diverge.*

2 *A solução da equação diferencial de* 2^a *a ordem* $\ddot{y} + \dot{y} + c = 0$ *apresenta ciclos se, e somente se,* $c > 1/4$.

(3) *Sejam* $z_{n+1} = Az_n$ *um sistema de 2 equações em diferenças finitas e* r_1, r_2 *os autovalores de* A. *Se* $0 < r_1 < 1$ *e* $r_2 < 0$ *então o sistema converge com oscilações para* 0 *quando* $n \to \infty$.

(4) *No modelo de funcionamento dinâmico de um mercado descrito pelo Cobweb cycle a demanda na data* $t(D_t)$ *é função do preço corrente* p_t, *enquanto que a oferta* (S_t) *é função do preço praticado no período precedente* p_{t-1}. *A demanda e oferta são especificadas como* $D_t = \alpha + \beta p_t$ *e* $S_t = \gamma + \delta p_{t-1}$, *em que* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *são constantes. Então, com o passar do tempo, o mercado converge para um equilíbrio estável se, e somente se,* $|\delta| < |\beta|$ *e* $(\gamma - \alpha)/\beta < 0$.

Solução

(0) **Falso (gabarito é Verdadeiro).**

Os pontos de equilíbrio se determinam da seguinte equação $y - y^3 = 0$. *Então as soluções da ultima equação são:* $y = -1$, $y = 0$ *e* $y = 1$.

Agora analisamos as seguintes intervalos

i) $y \in (-\infty, -1) \Rightarrow \; y - y^3 > 0 \;\Rightarrow\; \dot{y} > 0 \;\Rightarrow\; y$ *é crescente.*

ii) $y \in (-1, 0) \Rightarrow \; y - y^3 < 0 \;\Rightarrow\; \dot{y} < 0 \;\Rightarrow\; y$ *é decrescente.*

iii) $y \in (0, 1) \Rightarrow \; y - y^3 > 0 \;\Rightarrow\; \dot{y} > 0 \;\Rightarrow\; y$ *é crescente.*

iv) $y \in (1, +\infty) \Rightarrow \; y - y^3 < 0 \;\Rightarrow\; \dot{y} < 0 \;\Rightarrow\; y$ *é decrescente.*

Dos itens ii) e iii) as soluções convergem para $y = 0$.

Portanto, o equilíbrio $y = 0$ *é estável.*

(1) **Falso.**

(2) **Falso.**

(3) **Falso.**

(4) **Falso.**

EXERCÍCIO 275 (ANPEC 2002, Questão 15). *Sabendo que a função* $y : \Re \to \Re$ *satisfaz à equação diferencial de primeira ordem,* $\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{2} = 5x$, *e que no ponto* $x = 0$ *tem-se* $y(0) = e + 10$, *calcule* $y(2)$.

Solução

Resposta 11

EXERCÍCIO 276 (ANPEC 2001, Questão 13). *Dada a equação de diferenças finitas do segundo grau* $2y_{t+2} + 2y_{t+1} + y_t = 10$ *com valores* $y_0 = 3$ *e* $y_1 = 4$, *assinale V (verdadeiro) ou F (falso):*

- (0) *A solução particular da equação é uma função decrescente;*
- (1) *A solução homogênea da equação é uma função monótona;*
- (2) *Para* $t = 2$, *o valor da solução geral é* $y_2 = -1/2$*;*
- (3) *O valor da solução geral no infinito é* $\lim_{t\to\infty} y_t = 2$*;*
- (4) *O valor da solução geral no infinito independe de* y_0 *e* y_1.

Solução

- (0) **Falso.**
- (1) **Falso.**
- (2) **Verdadeiro.**
- (3) **Verdadeiro.**
- (4) **Verdadeiro.**

EXERCÍCIO 277 (ANPEC 2001, Questão 14). *Sabendo que a função* $y : R \to R$ *satisfaz à equação diferencial* $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 10 + x$, *e que* $\frac{dy(1)}{dx} = 1 + 3e$, *e que* $y(1) = 13 + 2e$, *calcule* $y(0)$.

Solução

Resposta 13

EXERCÍCIO 278 (ANPEC 2001, Questão 15). *Sabendo que a função* $y : (-1, +\infty) \to R$ *satisfaz à equação diferencial* $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{1+x}y = 30x$, *e que* $y(0) = 25$, *calcule* $y(1)$.

Solução

Resposta 25

EXERCÍCIO 279 (ANPEC 2000, Questão 13). *Sabendo que a função* $y : R \to R$ *satisfaz à equação diferencial ordinária de* 2^a *ordem,* $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{2x}$ *e sendo dados* $y(1) = 3e$ *e* $\frac{dy}{dx}(1) = e^2 + 3e$*, assinale V (verdadeiro) ou F (falso):*

(0) *A solução homogênea é* $y^h(x) = c_1e^x + c_2e^{2x}$*, em que* c_1, c_2 *são constantes a determinar;*

(1) *A solução particular é* $y^p(x) = (1/2)e^{2x}$*;*

(2) *As constantes são* $c_1 = 3; c_2 = -1$*;*

(3) $y(0) = 2$.

Solução

(0) **Verdadeiro.**

(1) **Falso.**

(2) **Verdadeiro.**

(3) **Verdadeiro.**

EXERCÍCIO 280 (ANPEC 2000, Questão 14). *Considere a equação em diferenças* $y_{t+2} - y_{t+1} + \frac{1}{4}y_t = t - 1$ *tal que* $y_0 = 1$ *e* $y_1 = -5$*. Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):*

(0) *A solução homogênea é:* $y_t^h = c_1(1/2)^t + c_2$*;*

(1) *A solução particular é:* $y_t^p = -20 + 4t$*;*

(2) *As constantes são:* $c_1 = 21; \quad c_2 = 1$*;*

(3) $y_2 = 25/4$*;*

(4) $\lim_{t\to+\infty} y_t \neq 1$.

Solução

(0) **Falso.**

(1) **Verdadeiro.**

(2) **Verdadeiro.**

(3) **Falso.**

4 **Verdadeiro.**

Exercício 281 (ANPEC 1998, Questão 7). *Sabendo que a função real $y(x)$ satisfaz à equação diferencial de segunda ordem*

$$\frac{d^2y}{dx^y} + 5\frac{dy}{dx} + 4y = 40 + e^{-3x}, \text{ calcule } \lim_{x\to\infty} y(x).$$

Solução

Resposta 10

Exercício 282 (ANPEC 1998, Questão 10). *Considere a equação de diferenças finitas $y_{t-2} - 3y_{t-1} + 2y_t = 10$.*

0 *Sua equação característica é $b^2 - 3b + 2 = 10$.*
1 *Uma solução particular é $y^* = 10$.*
2 *Sua solução complementar não pode ser obtida.*
3 *Representa um processo oscilatório.*

Solução

0 **Falso.**
1 **Falso.**
2 **Falso.**
3 **Falso.**

Exercício 283 (ANPEC 1997, Questão 9). *Considere a equação de diferenças finitas $x_{n+2} = px_{n+1} + (1-p)x_n$, onde $p \in]0,1[$. Classifique como verdadeira ou falsa cada uma das afirmativas abaixo:*

0 *Se $x_1 = 0$ então não existe $\lim_{n\to\infty} x_n$.*
1 *Se $x_m = x_n$ para algum m diferente de n então $x_n =$ constante.*
2 *Se a sequência $\{x_n\}$ é uma progressão geométrica, então a razão é necessariamente $1-p$.*

(3) *Se x_n não é uma sequência constante, então a sequência cujo termo geral é $\{x_n - x_{n-1}\}$ é uma progressão geométrica de razão negativa.*

Solução

(0) **Falso.**
(1) **Verdadeiro.**
(2) **Falso.**
(3) **Verdadeiro.**

Exercício 284 (ANPEC 1997, Questão 10). *Considere a seguinte equação diferencial: $10-(5-y)\dot{y}=2y$ e a condição inicial $y(0)=10$. Suponha que $y(t)\neq 5, \forall t$. Julgue as afirmativas abaixo:*

(0) *Quando $t=23, y$ será 56.*
(1) $\lim_{t\to\infty} y(t)=\infty$.
(2) $\lim_{t\to 5} y(t)=20$.
(3) *Fora do ponto $t=5$, a solução é não-linear.*

Solução

(0) **Verdadeiro.**
(1) **Verdadeiro.**
(2) **Verdadeiro.**
(3) **Falso.**

Exercício 285 (ANPEC 1997, Questão 11). *Seja $x:\Re\to\Re$ duas vezes diferenciável e considere a equação diferencial $\ddot{x}+2\dot{x}+x=0$ com as condições $x(0)=1$ e $x\left(\frac{\pi}{2}\right)=exp\{-\frac{\pi}{2}\}$ (onde exp é a exponencial). Se a solução é $x(t)$, julgue as afirmativas abaixo:*

(0) $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=0$ *e* $x(t)\geq 0$*, para todo* $t\geq 0$.
(1) $\frac{x(2\pi)}{x(\pi)}=-exp\{-\pi\}$
(2) $|x(t)|\leq 1$*, para todo* $t\geq 0$.

③ *$x(t)$ é periódica porque a equação característica associada à equação diferencial acima possui uma raiz positiva e outra negativa.*

Solução

⓪ **Verdadeiro.**
① **Falso.**
② **Verdadeiro.**
③ **Falso.**

Exercício 286 (ANPEC 1996, Questão 9). *Considere a seguinte equação de diferenças não homogênea:*

$$y_t = \frac{9}{10} y_{t-1} + 2, \ com\, y_1 = 11.$$

Sua solução geral é dada por:

$$y_t = a(m)^t + b.$$

⓪ *A variável y_t converge para que valor?*
① *Calcule o valor de $(10m + a)$?*
② *Calcule o valor de b.*
③ *Partindo-se de $t = 0$, qual o valor inicial de y_t?*

Solução

⓪
①
②
③

Exercício 287 (ANPEC 1996, Questão 10). *Dada a equação diferencial $y'' + 2y' + 2y = 1$, indique se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas:*

⓪ *Toda solução desta equação converge de forma oscilante para $1/2$.*
① *$y(t) = 1/2$ é a única solução estacionária (i.e., constante) da equação .*
② *O polinômio característico associado à equação possui raízes reais.*

(3) *A solução geral desta equação é dada por:* $y(t)e^{-t}(k_1 \cos\ t + k_2 \sin\ t) + 1/2; k_1, k_2$ *constantes reais.*

Solução

(0) **Verdadeiro.**
(1) **Verdadeiro.**
(2) **Falso.**
(3) **Verdadeiro.**

Exercício 288 (ANPEC 1995, Questão 15). *Dada a equação em diferenças finitas* $y_{t+1} = -\frac{1}{3}y_t - 2$ *e sabendo que* $y_0 = \frac{1}{2}$*, indique se as afirmativas a seguir são verdadeiras ou falsas:*

(0) *A variável* y_t *converge para* $1/2$ *sem oscilações.*
(1) *A variável* y_t *converge para* $-3/2$ *com oscilações.*
(2) $y_1 = 2\left(-\frac{1}{3}\right)^t - \frac{3}{2}$.
(3) $y_1 = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^t$.
(4) $y_1 = 2e^{\frac{t}{3}} - 6$.

Solução

(0) **Falso.**
(1) **Verdadeiro.**
(2) **Verdadeiro.**
(3) **Falso.**
(4) **Falso.**

Exercício 289 (ANPEC 1993, Questão 13). *Assinale as afirmações verdadeiras e as falsas:*

(0) *A função* $-4\sin\ x + 3\cos\ x$ *é solução da equação diferencial* $y'' + y = 0$.
(1) *A função* $x + \sin\ x$ *é solução de* $y'' + y = 1$.
(2) *Há apenas uma solução de* $y'' + y = 1$ *satisfazendo* $y(0) = 1$.

3. *A equação $y'' + y = 0$ possui no máximo duas soluções linearmente independentes.*
4. *Se a função $h(x), x \in \Re$ é solução de $y'' + y = 0$, então a função $1 + h(x), x \in \Re$ é solução de $y'' + y = 1$.*

Solução

0. **Falso.**
1. **Verdadeiro.**
2. **Falso.**
3. **Verdadeiro.**
4. **Falso.**

EXERCÍCIO 290 (ANPEC 1993, Questão 14). *Sabendo que a função $y = y(x),\ x > 0$ satisfaz $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = x,\ x > 0,$ e que $y(1) = 1,$ calcule $y(2)$.*

Solução

Resposta 4

EXERCÍCIO 291 (ANPEC 1991, Questão 13). *Dada a equação $\frac{d_y}{d_t} = ay$, determine o valor de $y(2)$ sabendo-se que $y(0) = 10e^{-2e}$.*

Solução

Resposta

EXERCÍCIO 292 (ANPEC 1991, Questão 14). *Dada a equação $\frac{d_y}{d_t} = -0,5y + 10$,indique se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas.*

0. *A equação é convergente.*
1. *A solução de equilíbrio tem valor 20.*
2. *Sabemos que o valor $y(0)$ é maior que o valor de equilíbrio.*
3. *A trajetória de $y(t)$ não é cíclica.*
4. *A solução pode ter raízes complexas.*

Solução

(0)
(1)
(2)
(3)
(4)

Exercício 293 (ANPEC 1991, Questão 15). *Determine o valor da solução da equação* $x(t+1) = 0,5x(t) + 5, t = 0, 1, 2, ...,$ *para* $t = 50$, *sabendo-se que* $x(0) = 10$.

Solução

Resposta

Exercício 294 (ANPEC 1990, Questão 15). *Dada a equação em diferenças finitas* $y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = 2$ *diga quais afirmações são verdadeiras ou falsas:*

(0) *A equação não possui soluções constantes.*
(1) *As soluções convergem para* 0 *quando* $t \to \infty$.
(2) *Toda solução é combinação linear de funções trigonométricas.*
(3) *Se* $y_t^{(1)}$ *e* $y_t^{(2)}$ *são soluções, então* $y_t^{(3)} \equiv y_t^{(1)} + y_t(2)$ *também é solução .*
(4) *Se* $y_t^{(1)}, y_t^{(2)}$ *e* $y_t^{(3)}$ *são soluções, então* $y_t^{(4)} \equiv y_t^{(1)} - y_t^{(2)} + y_t^{(3)}$ *também é solução .*

Solução

(0)
(1)
(2)
(3)
(4)

CAPíTULO 22

Matemática Financeira

[1]

22.1. Questões ANPEC Trabalhadas

ANPEC 2013, Questão 11. Considere as seguintes informações:

> Suponha que as medidas adotadas pelo governo geraram uma dinâmica para a inflação π_t e taxa de juros r_t mensal que obedece à seguinte equação:
>
> $$\begin{bmatrix} \pi_{t+1} \\ r_{t+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \pi_t \\ r_t \end{bmatrix} + b \text{ em que } A = \begin{bmatrix} 0,9 & -0,1 \\ 0,8 & 0,2 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 0,005 \\ -0,008 \end{bmatrix}.$$

Julgue as seguintes afirmações.

> 0 O estado estacionário para a inflação é 3% ao mês, mas ele é instável.

Falso. Note que a solução geral é dada por $\vec{s}_t = \alpha_1 \lambda_1^t \vec{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2^t \vec{v}_2 + \vec{s}_p$, onde s_p é uma solução particular, $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são autovetores LI (supondo que existam) e λ_1, λ_2 os respectivos autovalores. Finalmente, α_1 e α_2 são constantes a serem determinadas pelas condições iniciais. Supondo que a solução particular $\vec{s}_p$ seja constante, temos $\vec{s}_p = A\vec{s}_p + \vec{b}$, i.e.,

$$(I - A)\vec{s}_p = \begin{bmatrix} 1-0,9 & 0,1 \\ -0,8 & 1-0,2 \end{bmatrix} \vec{s}_p = \begin{bmatrix} 0,005 \\ -0,008 \end{bmatrix} \implies \vec{s}_p = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

[1] Última Atualização: 09/08/2022

Calculando os autovalores de A, temos que a equação característica é dada por $\lambda^2 - 1,1\lambda + 0,24 = 0$, e portanto os autovalores são reais, distintos e menores que um em módulo. Temos finalmente que a solução é dada por

$$\begin{bmatrix} \pi_t \\ r_t \end{bmatrix} = \alpha_1 \lambda_1^t \vec{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2^t \vec{v}_2 + \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

com λ_1 e λ_2 com módulo menor que um. Logo, quando $\lim_{t\to\infty} \pi_t = 3\%$ é estável.

1 O estado estacionário para a taxa de juros é 2% ao mês e ele é estável.

Verdadeiro. Ver solução de 0.

2 Dependendo das condições iniciais, este processo pode gerar hiperinflação (inflação acima de 50% ao mês) e taxas de juros acima de 30% ao mês, no longo prazo.

Falso. Ver solução de 0.

3 Existe um estado estacionário estável com inflação e taxa de juros zero.

Falso. Ver solução de 0.

4 A equação em diferenças de segunda ordem que resulta do sistema acima para a inflação é $\pi_{t+2} - 1,1\pi_{t+1} + 0,26\pi_t - 0,0048 = 0$.

Verdadeiro. Usando a equação, vemos que

$$\begin{aligned} \pi_{t+2} = 0,9\pi_{t+1} - 0,1r_{t+1} + 0,005 &= 0,9\pi_{t+1} - 0,1(0,8\pi_t + 0,2r_t - 0,008) + 0,005 \\ &= 0,9\pi_{t+1} - 0,08\pi_t - 0,02r_t + 0,0008 + 0,005 \end{aligned}$$

Como

$$r_t = 10(-\pi_{t+1} + 0,9\pi_t + 0,005)$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\pi_{t+2} &= 0,9\pi_{t+1} - 0,08\pi_t - 0,2(-\pi_{t+1} + 0,9\pi_t + 0,005) + 0,0058 \\
&= 0,9\pi_{t+1} - 0,08\pi_t + 0,2\pi_{t+1} - 0,18\pi_t - 0,001 + 0,0058 \\
&= 1,1\pi_{t+1} - 0,26\pi_t + 0,0048.
\end{aligned}$$

22.2. Questões ANPEC Resolvidas

Exercício 1 (ANPEC 2022, Questão 9)

Julgue como verdadeiras ou falsas as seguintes afirmativas:

0. A taxa bimestral de juros simples que faz com que um capital quadruplique de valor após 2 anos é igual a 25% ao bimestre.
1. Considerando o regime de juros simples, a taxa de $3,6\%$ ao ano é equivalente à taxa de $1,2\%$ ao trimestre.
2. Considerando o regime de juros compostos, a taxa de 5% ao semestre é equivalente à taxa de $10,25\%$ ao ano.
3. Se uma aplicação de R\$120.000,00, realizada em certa data à taxa de juros composta de $2,4\%$ ao mês, produz um montante de R\$145.071,24 em uma data futura, então o prazo $n \geq 1$ (em meses) pode ser determinado como solução da equação:

$$(1,024)^n = 1,208927.$$

4. Um bem no valor de R\$500.000,00 é vendido nas seguintes condições: (i) entrada de R\$150.000,00; (ii) três parcelas mensais, iguais e sucessivas de R\$100.000,00 nos meses seguintes; (iii) uma última parcela ao final do sexto mês também no valor de R\$100.000,00. Logo, a taxa de juros embutida no financiamento do bem, denotada por i (i.e., a taxa interna de retorno do fluxo de caixa), é solução da equação:

$$3,5 = \sum_{t=1}^{3} \frac{1}{(1+i)^t} + \frac{1}{(1+i)^6}.$$

Exercício 2 (ANPEC 2021, Questão 12)

Um investimento inicial de valor $A > 0$ tem um retorno de 200% em cada período $t = 1, 2, ..., n, ...$, podendo ser totalmente reinvestido em cada período com aquele mesmo retorno. Porém, antes de o retorno incidir sobre o saldo em cada período $t \geq 1$, o investidor retira somente o valor de $2t$. Por exemplo, ao final do período inicial $t = 1$, o retorno incide sobre $A - 2$. Sabe-se que para $g > 1$ vale a fórmula $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{g^k} = \frac{n-(n+1)g+g^{n+1}}{g^n(g-1)^2}$. Denotando por S_t o saldo ao final do período t após a incidência do retorno, encontre $4L$, em que L é o menor valor de A que faz com que $S_t \geq 0$ para todo período t.

Exercício 3 (ANPEC 2019, Questão 4)

Considere que $\log_{\mathbf{10}}(\mathbf{1,1}) \approx \mathbf{0,04}$. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas?

(0) Um indivíduo comprou uma casa no valor de R$ 100.000,00, em 100 parcelas mensais, pelo sistema SAC (Sistema de Amortização Constante). Desconsiderando a inflação, o saldo devedor depois do 60° pagamento será de R$ 43.333,34.

(1) Se um indivíduo depositar R$ 1.000,00 hoje em um investimento que paga 10% de juros ao ano e não fizer nenhum depósito adicional, ele terá de esperar $2/\log_{10}(1,1) \approx 50$ anos para juntar um milhão de reais.

(2) Um instrumento financeiro pagará R$ 1.100,00 daqui a um ano ao ser contratado hoje por R$ 1.000,00. Mantendo fixo o pagamento daqui a um ano, se a taxa de juros diminuir, o valor contratado hoje deve aumentar.

(3) Considere uma taxa de juros composta constante e igual a 2% ao ano e um instrumento financeiro que pague R$ 100,00 por ano, durante um número infinito de anos (ou seja, uma perpetuidade). O preço deste instrumento hoje é de R$ 5.000,00.

(4) Uma empresa tomou emprestado R$ 10.000,00. Para quitar seu empréstimo, pagou R$ 1.000,00 depois de vencido o primeiro ano e R$

11.000,00 depois de vencido o segundo ano. A taxa de juros compostos implícita nesta operação é de 11%.

Exercício 4 (ANPEC 2018, Questão 14)

Identifique abaixo quais são as afirmativas verdadeiras:

0. Considere a sequência $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$, com $x_k \in \mathbb{R}$ para todo k. Dizemos que esta sequência converge para $x^* \in \mathbb{R}$, se, para todo $\varepsilon > 0$, existir um inteiro $\mathbb{N}$ positivo tal que se $n > \mathbb{N}$, então $|x_n - x^*| < \varepsilon$;
1. Assuma que a sequência nos Reais $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge para $x^* \in \mathbb{R}$ e que $x_n \leq b$ para todo n. Então, temos que necessariamente $x^* < b$;
2. A sequência $x_n = \frac{n}{n+1}$ e a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ convergem;
3. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n}$ diverge;
4. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge;

Exercício 5 (ANPEC 2017, Questão 9)

Um contrato financeiro especifica a seguinte aplicação de taxas de juros. Durante os t_1 primeiros meses (primeiro período) deve se pagar uma taxa de juros simples de r_1 ao mês (ou seja, $100r_1\%$ ao mês). Durante os t_2 meses seguintes (segundo período) deve se pagar uma taxa de juros composta de r_2 ao mês (com capitalização mensal). Finalmente, durante os últimos t_3 meses (terceiro período) deve se pagar uma taxa de juros de capitalização contínua de r_3 ao mês. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas?

0. A taxa de juros nos dois primeiros períodos é $(1 + t_1r_1)(1 + r_2)^{t_2} - 1$;
1. Se no primeiro período colocarmos uma taxa de juros mensal de capitalização contínua equivalente, o seu valor será $(1 + t_1r_1)^{\frac{1}{t_1}} - 1$;
2. Se no terceiro período colocarmos uma taxa de juros simples mensal equivalente, o seu valor será $t_3^{-1}e^{t_3r_3}$;
3. A taxa de juros desse contrato para os três períodos é $t_1r_1 + r_2^{t_2} + e^{t_3r_3}$;
4. A taxa de juros mensal com capitalização contínua equivalente para todos os três períodos é $(t_1 + t_2 + t_3)^{-1}[t_3r_3 + t_2 \ln(1 + r_2) + \ln(1 + t_1r_1)]$.

Exercício 6 (ANPEC 2016, Questão 1)

Em uma festa com 50 participantes, somente 6 não ingerem bebida alcoólica.

Sabe-se que 20 bebem vodka, 21 bebem martini e 22 bebem cerveja. Sabe-se também que 9 bebem vodka e martini, 8 bebem vodka e cerveja e 7 bebem martini e cerveja. Indique quais das seguintes alternativas são verdadeiras e quais são falsas:

(0) 5 participantes bebem os três tipos de bebida;
(1) 4 participantes bebem vodka e martini, mas não bebem cerveja;
(2) 10 participantes bebem somente cerveja;
(3) 23 participantes não bebem Martini;
(4) Daqueles participantes que ingerem bebidas alcoólicas, 22 não bebem cerveja.

Exercício 7 (ANPEC 2016, Questão 11)

A curva de demanda de mercado de um produto no instante t é $D_t = 10 - \frac{1}{2}p_t$ e, por causa de lucros auferidos no período anterior e a expectativa de preços futuros, a curva de oferta desse produto no instante t é $S_t = 18 + \frac{1}{2}p_1 - 6p^e_{t+1} + p_{t-1}$, em que p^e_{t+1} é a expectativa de preços futuros. Diremos que as expectativas são racionais se $p^e_{t+1} = p_{t+1}$.

Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas:

(0) Sob expectativas racionais, um preço estacionário é $\bar{p} = 2$;
(1) Sob expectativas racionais, a dinâmica de preços fica oscilando sem convergir ao preço estacionário;
(2) Sob expectativas racionais, se $p_0 = 19$ e $p_1 = 3$, então $p_3 = 8/3$;
(3) Se as expectativas são adaptativas, no sentido de $p^e_{t+1} = p_{t-1}$, então o novo preço estacionário é $\bar{p} = 4$;
(4) Se as expectativas são adaptativas, no sentido de $p^e_{t+1} = p_{t-1}$, então a dinâmica de preços é explosiva.

Exercício 8 (ANPEC 2015, Questão 13)

Um fabricante de um produto lança anualmente 60.000 unidades dele. Todo ano, cada unidade em uso tem uma probabilidade de 15% de parar de funcionar, ou seja, no final de cada ano espera-se que de cada 100 unidades funcionando no início, apenas 85 continuem funcionando. Calcular o número de unidades que se espera que estejam em funcionamento no longo prazo, isto é, quando o número de anos tende a infinito. Dar como resposta a soma dos algarismos desse número .

Exercício 9 (ANPEC 2014, Questão 4)

Avalie a veracidade das seguintes afirmações:

(0) A taxa de juros simples equivalente a uma taxa de juros composta de 10% aplicada durante 3 períodos é 12%.

(1) A taxa de juros composta equivalente a uma taxa de juros simples de 22% aplicada durante 2 períodos é 20%.

(2) A taxa de juros real é definida como a taxa de juros em termos de um numerário (cesta de referência). Assim, se o preço do numerário é p_t em t , então uma unidade monetária equivale a $1/p_t$ unidades do numerário, e se a taxa de juros nominal para o período $[t, t+1]$ é r_{t+1}, então o rendimento real nesse período será $(1 + r_{t+1})/p_{t+1}$ unidades do numerário. Portanto, a taxa de juros real é definida como a taxa de retorno de aplicar $1/p_t$ unidades do numerário e que resulta em $(1 + r_{t+1})/p_{t+1}$ unidades do numerário no fim do período.
Afirmamos que a taxa de juros real no período $[t, t+1]$ é $\frac{1+r_{t+1}}{1+\pi_{t+1}} - 1$, em que π_{t+1} é a inflação no período $[t, t+1]$.

(3) Se a inflação é igual à metade da taxa de juros nominal, então a taxa de juros real é a metade da taxa de juros nominal.

(4) Se a taxa de juros real é 10% e a inflação é 5%, então a taxa de juros nominal é $15,5\%$.

Exercício 10 (ANPEC 2013, Questão 6)

Na fórmula $M_t = M_0\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$ temos que M_0 é o montante de dinheiro inicial, r é a taxa de juros (em %) em cada período de tempo, t é o número de períodos de tempo da aplicação e M_t é o montante de dinheiro final. Analise as seguintes afirmações:

(0) Se $r = 10\%$ ao mês, t é um trimestre e $M_0 = 1000$, então $M_t = 1331$.

(1) Se após meio ano o montante duplicou, com juros de capitalização trimestral, então a taxa de juros trimestral é $41,42\%$.

(2) Após um ano de aplicação, com uma taxa de juros trimestral de 20%, o investidor retirou 10368. Então o montante inicial foi 4000.

(3) Se no primeiro mês a taxa de juros foi r_1 e no segundo mês foi r_2, então a taxa de juros nos dois meses foi $r_1 + r_2$.

(4) Se a taxa de juros mensal é r , ela é equivalente a uma taxa de juros anual de $\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{12} - 1$.

Exercício 11 (ANPEC 2013, Questão 11)

Suponha que as medidas adotadas pelo governo geraram uma dinâmica para a inflação π_t e taxa de juros r_t mensal que obedece à seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} \pi_{t+1} \\ r_{t+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \pi_t \\ r_t \end{bmatrix} + b \text{ em que } A = \begin{bmatrix} 0,9 & -0,1 \\ 0,8 & 0,2 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 0,005 \\ -0,008 \end{bmatrix}.$$

Julgue as seguintes afirmações:

(0) O estado estacionário para a inflação é 3% ao mês, mas ele é instável.

(1) O estado estacionário para a taxa de juros é 2% ao mês e ele é estável.

(2) Dependendo das condições iniciais, este processo pode gerar hiperinflação (inflação acima de 50% ao mês) e taxas de juros acima de 30% ao mês, no longo prazo.

(3) Existe um estado estacionário estável com inflação e taxa de juros zero.

(4) A equação em diferenças de segunda ordem que resulta do sistema acima para a inflação é $\pi_{t+2} - 1,1\pi_{t+1} + 0,26\pi_t - 0,0048 = 0$.

Exercício 12 (ANPEC 2003, Questão 11)

Um investidor aplica $\$1.000,00$ em um fundo de investimento. Assinale V (Verdadeiro) ou (F) Falso:

(0) Num regime de capitalização simples, à taxa de 1% a.m. essa quantia vai triplicar depois de 300 meses.

(1) Num regime de capitalização composta, à taxa de 10% a.m., essa quantia vai dobrar depois de apenas 10 meses.

(2) Num regime de capitalização contínua, à taxa de 2% a.m., essa quantia vai triplicar em cerca de 55 meses (dado que $\ln 3 \cong 1,1$).

Exercício 13 (ANPEC 2002, Questão 10)

Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

0. Um investidor aplica mensalmente 1000 unidades monetárias em um fundo de investimento que remunera as aplicações à taxa de juros (compostos) de 2% a.m.. Se o investidor fizer 3 aplicações, o montante no instante do último depósito será 3120 unidades monetárias.

1. O valor presente, em $t = 0$, de um fluxo de pagamentos iguais a 50 nos períodos $t = 1, 3, 5, ...$ e -60 nos períodos $t = 2, 4, 6, ...$ é sempre positivo se a taxa de juros (compostos), supostamente constante, for superior a 20%.

2. Se $0 < a < b < 1$, então a série $a+b+a^2+b^2+a^3+b^3+...$ é convergente.

3. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{a^n}$ é convergente para todo $a > 1$.

4. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\log n}{n}\right)^n$ é divergente.

Exercício 14 (ANPEC 2001, Questão 09)

Uma loja vende um produto cujo preço, para pagamento à vista, é R\$90. No caso de pagamento em duas parcelas, o preço torna-se R\$100, divididos em R\$50 no momento da compra mais outros R\$50 após um mês. Calcule a taxa mensal R de juros implícita no financiamento em duas parcelas, e assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

0. A taxa implícita de financiamento é de 10% ao mês;

1. Se o pagamento fosse em uma única parcela de valor X efetuada um mês após a compra, então para se manter a mesma taxa R de financiamento, esse pagamento único teria um valor $X >$R\$110 ;

2. Se o pagamento fosse em três parcelas, sendo a primeira de R\$18 efetuada no momento da compra, e as outras duas com o mesmo valor Y, com vencimentos após um mês e após dois meses, então para se manter a mesma taxa R de financiamento, ter-se-ia $Y >$R\$52;

3. Se o pagamento fosse em três parcelas iguais de valor Z, sendo a primeira no momento da compra, e as outras duas com vencimentos após

um mês e após dois meses, então para se manter a mesma taxa R de financiamento, ter-se-ia $Z <$R\$38;

(4) Se o pagamento fosse em uma série infinita de parcelas iguais com valor W, sendo a primeira no momento da compra, e as outras em cada mês futuro, então para se manter a mesma taxa R de financiamento, ter-se-ia $W =$R\$18.

Exercício 15 (ANPEC 2000, Questão 6)

Sendo $\hat{r}$ a taxa de juros periódica (*p.p.*) que quintuplica o capital inicial $C_\circ$, assinale V (verdadeiro) ou F (falso).

(0) Se o prazo de aplicação é de 10 períodos e os juros são simples, então $\hat{r} = 40\%$;

(1) Se o prazo de aplicação é de 10 períodos e os juros são compostos, então $\hat{r} = (5)^{(1/10)} - 1$;

(2) Se o prazo de aplicação é de 10 períodos e a capitalização é contínua, com taxa instantânea de juros constante, então $\hat{r} = \ln 5$;

(3) Se o prazo de aplicação é de 10 anos, os juros são compostos e a capitalização é semestral então, $\hat{r}$ pode ser determinado mediante resolução da equação $5 = \ln(1 + \hat{r})20$.

Exercício 16 (ANPEC 1999, Questão 8)

Tem-se uma curva de demanda de elasticidade constante,

$$qp^x = 800$$

onde q e p são variáveis não-negativas e têm os significados usuais. Se a oferta é fixa em 100 unidades e a elasticidade da demanda é $-1,5$, qual é o preço de equilíbrio de mercado?

Exercício 17 (ANPEC 1999, Questão 9)

Tem-se a seguinte função de produção

$$z = f(x, y, w) = x^2 + x(w - y) + wy.$$

Em um ponto em que as Produtividades Marginais de x e de y são 3 e 1 respectivamente, qual deve ser a quantidade de w para que a produção total seja 4?

Exercício 18 (ANPEC 1999, Questão 12)

Verdadeiro ou falso

(0) Em relação a modelos matemáticos: parâmetros são constantes genéricas e variáveis exógenas não são determinadas pelo modelo.

(1) O logaritmo de a na base b é o recíproco do logaritmo de b na base a.

(2) O regime de capitalização contínua é um caso limite do regime de capitalização simples quando o período de capitalização tende para zero.

(3) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável em $x = x_0$ então $|f(x)|$ é derivável em $x = x_0$ desde que $f(x_0)$ exista.

Exercício 19 (ANPEC 1998, Questão 11)

A quantidade demandada de certo produto, por unidade de tempo, segue padrão linear (em termos do preço), reduz-se a zero quando o preço é maior ou igual a 10 e decresce duas unidades para cada unidade monetária de aumento de preço. A quantidade ofertada por unidade de tempo reduz-se a zero quando o preço é menor ou igual a 2 e é proporcional ao quadrado do preço quando este assume valores maiores que 2. Determine o valor das compras do produto na situação de equilíbrio.

Exercício 20 (ANPEC 1997, Questão 1)

Seja $\Re$ o conjunto dos números reais. Classifique como verdadeira ou falsa as afirmações a seguir:

(0) A união de dois intervalos abertos de $\Re$ é sempre um intervalo aberto de $\Re$.

(1) O conjunto dos números irracionais entre 0 e 1 constitui um intervalo aberto de $\Re$.

(2) $f : \Re \to \Re$ é uma função contínua em $x = x_0$ desde que $f(x_0)$ exista.

(3) O logaritmo de a na base b é o recíproco do logaritmo de b na base a, para a, b número reais positivos.

Solução

(0) **Verdadeiro.**
(1) **Falso.**
(2) **Falso.**
(3) **Verdadeiro.**

Exercício 21 (ANPEC 1994, Questão 15)

Ache a raiz característica de maior valor positivo da matriz simétrica proveniente da forma quadrática, $-x_1^2 - 6x_2x_3 + x_2^2 + 9x_3^2$.

Exercício 22 (ANPEC 1993, Questão 01)

Seja A um conjunto qualquer. Indique as afirmativas verdadeiras e as falsas:

(0) Um ponto de acumulação de A é sempre um ponto de A.
(1) Um ponto aderente de A é sempre um ponto interior de A.
(2) Um ponto aderente é necessariamente um ponto de fronteira.
(3) O conjunto A é aberto se contém todos os seus pontos aderentes.
(4) O conjunto A é fechado se contém todos os seus pontos de acumulação.

Exercício 23 (ANPEC 1992, Questão 1)

Indique as afirmativas verdadeira ou falsas:

(0) O conjunto do número irracionais entre 0 e 1 constitui um intervalo aberto de R.
(1) A união de dois intervalos abertos é sempre um intervalo aberto.
(2) A diferença entre dois conjuntos A e B, sendo A um intervalo aberto e B um intervalo fechado, pode ser um intervalo aberto.
(3) A interseção não vazia de intervalos abertos é sempre um intervalo aberto.
(4) A união de dois intervalos fechados disjuntos nunca constitui um intervalo fechado.

Exercício 24 (ANPEC 1991, Questão 1)

Indique se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas:

(0) O conjunto de pontos num segmento é numerável.
(1) O conjunto de números reais num intervalo fechado é finito.

(2) Entre dois números racionais sempre existem números irracionais.

(3) Os conjuntos infinitos não são enumeráveis.

(4) A hipotenusa de um triângulo com catetos iguais a 1 (um) é um número irracional.

Referências Bibliográficas

[1] Stephen Abbott, *Understanding analysis*, 2nd ed., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2015. MR3331079

[2] G. Ávila, *Cálculo,* Livros Técnicos e Científicos S.A., Rio de Janeiro, 1987. Vols. I, II e III.

[3] Robert G. Bartle, *The elements of real analysis*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1976. MR0393369 (52 #14179)

[4] Robert G. Bartle and Donald R. Sherbert, *Introduction to real analysis*, 2nd ed., John Wiley & Sons Inc., New York, 1992. MR1135107 (92i:26002)

[5] José Boldrini, Sueli Costa, Vera Ribeiro, and Henry Wetzler, *Álgebra Linear*, Editora Harper & Row di Brasil LTDA, São Paulo, 1978.

[6] William E. Boyce and Richard C. DiPrima, *Elementary differential equations and boundary value problems*, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1965. MR0179403

[7] A.C. Chiang, *Matemática para Economistas*, McGraw-Hill, São Paulo.

[8] Djairo G. de Figueiredo, *Funções Reais*, The PanAmerican Union, Washington D.C., 1970 (Portuguese).

[9] R. Fletcher, *Practical methods of optimization*, 2nd ed., A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1987. MR955799 (89j:65050)

[10] W.A. Granville, P.F. Smith, and W.R. Longley, *Elementos de cálculo diferencial e integral*, Editora Científica, Rio de Janeiro.

[11] H.L. Guidorizzi, *Um Curso de Cálculo*, Vol. Vols. 1 a 4, Forense-Universitária, Rio de Janeiro. 2ª ed.

[12] G. Hadley, *Álgebra Linear*, Forense-Universitária, Rio de Janeiro.

[13] Roger A. Horn and Charles R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985. MR832183 (87e:15001)

[14] Alexey Izmailov and Mikhail Solodov, *Otimização. Vol. 1*, 3rd ed., Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2014 (Portuguese). Condições de otimalidade, elementos de análise convexa e de dualidade. [Conditions of optimality, elements of convex analysis and of duality]. MR3793156

[15] Tamara J. Lakins, *The tools of mathematical reasoning*, Pure and Applied Undergraduate Texts, vol. 26, American Mathematical Society, Providence, RI, 2016. MR3525355

[16] Elon Lages Lima, *Análise Real, Volume I*, Coleção Matemática Universitária, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2009 (Portuguese).

[17] ______, *Álgebra Linear*, Coleção Matemática Universitária, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1996 (Portuguese).

[18] ______, *Curso de análise. Vol. 1*, Projeto Euclides [Euclid Project], vol. 1, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1976 (Portuguese). MR654861 (83h:26002a)

[19] ______, *Curso de análise. Vol. 2*, Projeto Euclides [Euclid Project], vol. 13, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1981 (Portuguese). MR654862 (83h:26002b)

[20] ______, *Espaços métricos*, Projeto Euclides [Euclid Project], vol. 4, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1977 (Portuguese). MR654506 (83d:54001)

[21] Paul R. Halmos, *Naive set theory*, Springer-Verlag, New York, 1974. Reprint of the 1960 edition; Undergraduate Texts in Mathematics. MR0453532 (56 #11794)

[22] S. Kesavan, *Nonlinear functional analysis*, Texts and Readings in Mathematics, vol. 28, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2004.

[23] David G. Luenberger, *Introduction to linear and nonlinear programming*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1973.Zbl 0297.90044

[24] Efe A. Ok, *Real analysis with economic applications*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2007. MR2275400

[25] W. Keith Nicholson, *Elementary Linear Algebra with applications*, 2nd ed., PWS-Kent Publishing Company, Boston, 1990.

[26] Walter Rudin, *Principles of mathematical analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1976. International Series in Pure and Applied Mathematics. MR0385023 (52 #5893)

[27] James Stewart, *Cálculo*, Vol. 1, Cengage Learning, 2014.

[28] ______, *Cálculo*, Vol. 2, Cengage Learning, 2014.

[29] *Monkey saddle — Wikipedia, The Free Encyclopedia*, Wikipedia (2009).

[30] Carl Simon and L. Blume, *Mathematics for Economists*, Norton, New York, 1994.

[31] William F. Trench, *Introduction to real analysis*, Free Edition, 2009.

[32] G.L. Reis and V.V. da Silva, *Geometria Analitica*, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 1984 (Portuguese).

[33] I. M. Singer and J. A. Thorpe, *Lecture notes on elementary topology and geometry*, Springer-Verlag, New York, 1976. Reprint of the 1967 edition; Undergraduate Texts in Mathematics. MR0413152 (54 #1273)

[34] Terence Tao, *Analysis. I*, Texts and Readings in Mathematics, vol. 37, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2006. MR2195040 (2006g:26002a)

[35] ———, *Analysis. II*, Texts and Readings in Mathematics, vol. 38, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2006. MR2195041 (2006g:26002b)

[36] S. Viera, *Matemática Financeira*, Atlas, São Paulo.

[37] Andrew Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem*, Ann. of Math. (2) **141** (1995), no. 3, 443–551, DOI 10.2307/2118559. MR1333035 (96d:11071)