ANÁLISE III – FGV
TERCEIRA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **02 de maio de 2018**

Exercício 1. Considere a coleção $\mathcal{F} = \{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de subconjuntos dum espaço métrico M, onde Λ é um conjunto de índices. Diz-se que $\mathcal{F}$ tem a *propriedade da interseção finita* se toda subcoleção finita de $\mathcal{F}$ tem interseção não nula. Mostre que as propriedades abaixo são equivalentes:

(1) Se $\mathcal{F}$ tem a propriedade da interseção finita então $\cap_{F\in\mathcal{F}} F \neq \emptyset$
(2) M é compacto.

Exercício 2. Seja $(\mathbf{x}_k)$ sequência num compacto K limitada, e tal que toda subsequência convergente converge para $\mathbf{x} \in K$. Mostre que $(\mathbf{x}_k)$ converge para $\mathbf{x}$. O que vale se muda se trocarmos "compacto" por "espaço métrico"?

Exercício 3. Seja M espaço métrico, $F \subset M$ um compacto não vazio, e seja $\mathbf{y} \notin F$. Mostre que existe $\mathbf{x}^* \in F$ tal que $\|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}\| = \inf\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{x} \in F\}$. E se F for apenas fechado em M?

Exercício 4. Sejam K_1 e K_2 dois conjuntos compactos, e $A = \{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| : \mathbf{x}_1 \in K_1, \mathbf{x}_2 \in K_2\}$. Mostre que A é compacto.

Exercício 5. Diga se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas, provando suas afirmações. Em todos os casos, K_1 e K_2 são subconjuntos de um espaço métrico M, e $A = \{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| : \mathbf{x}_1 \in K_1, \mathbf{x}_2 \in K_2\}$.

(1) K_1 e K_2 fechados implica em A compacto.
(2) K_1 e K_2 fechados implica em A fechado.
(3) K_1 compacto e K_2 fechado implica em A fechado.

Exercício 6. Suponha que $\{K_j\}$ seja uma coleção de conjuntos não vazios, compactos, com $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \dots$. Mostre que $\cap_{j=1}^{\infty} K_j$ é compacto e não vazio.