ANÁLISE II – FGV
SEGUNDA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **25 de abril de 2018**

Exercício 1. Seja M espaço métrico e $S \subset M$. Mostre que $\mathbf{x}$ é ponto de acumulação de S se e somente se existe sequência de pontos $(\mathbf{x}_j)$ em $S \backslash \{\mathbf{x}\}$ que converge para $\mathbf{x}$.

Exercício 2. Mostre que se M é espaço métrico completo, e $X \subset M$ é fechado, então X é completo.

Exercício 3. Seja M espaço métrico, $C \subseteq M$ não-vazio, $\mathbf{y} \in M$, e $A = \{d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) : \mathbf{x} \in C\}$. Mostre que existe o ínfimo de A, e que

$$\inf A = 0 \iff \text{existe sequência em } C \text{ convergente para } \mathbf{y}.$$

Exercício 4. Seja a sequência de funções (f_i), onde $f_i(x) = \sin(ix)/(1 + ix)$. Mostre que (f_i) converge pontualmente para todo $x \in [0, +\infty)$, uniformemente em $[a, +\infty)$ para $a > 0$, mas não converge uniformemente em $[0, +\infty)$.

Exercício 5. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ e $f_i : \Omega \to \mathbb{R}^n$ sejam funções uniformemente contínuas. Mostre que se (f_i) converge uniformemente para f, então f é uniformemente contínua.

Exercício 6. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ contínua, e (f_n) sequência de funções contínuas de $[0, 1]$ em $\mathbb{R}$. Prove ou apresente contra-exemplo para a seguinte afirmação:

Se (f_n) converge uniformemente para f em $(0, 1]$, então (f_n) converge uniformemente para f em $[0, 1]$.