ANÁLISE II – FGV
PRIMEIRA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **12 de abril de 2018**

Exercício 1. Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ não vazio, $\mathcal{F}_\infty$ o espaço das funções $f : X \to \mathbb{R}$ limitadas, e a norma $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : \mathbf{x} \in X\}$. Sejam $\mathcal{F}_1$ o espaço das funções $f : X \to \mathbb{R}^m$ tal que $|f|$ seja integrável, e a norma $\|f\|_1 = \int_X |f(x)|\, dx$. Construa exemplo tal que dado $\epsilon > 0$ existe $f \in \mathcal{F}_\infty \cap \mathcal{F}_1$ com $\|f\|_\infty < \epsilon$ e $\|f\|_1 = 1$ e existe $g \in \mathcal{F}_\infty \cap \mathcal{F}_1$ tal que $\|g\|_\infty = 1$ e $\|g\|_1 < \epsilon$.

Exercício 2. Dados dois espaços métricos $\big(M, d_M(\cdot,\cdot)\big)$ e $\big(M', d_{M'}(\cdot,\cdot)\big)$, mostre que as funções d_1, d_2 e d_∞ abaixo definem métricas em $M \times M'$:

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d_M(x, y) + d_{M'}(x', y'), \qquad d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{[d_M(x, y)]^2 + [d_{M'}(x', y')]^2},$$
$$d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{d_M(x, y), d_{M'}(x', y')\},$$

onde $\mathbf{x} = (x, x')$ e $\mathbf{y} = (y, y') \in M \times M'$.

Exercício 3. Seja V um espaço vetorial e suponha que $|||\cdot|||$ e $\|\cdot\|$ sejam normas em V. Suponha que estas normas sejam equivalentes, i.e., que existam contantes c e C tais que

$$c|||\mathbf{x}||| \le \|\mathbf{x}\| \le C|||\mathbf{x}||| \tag{1}$$

para todo $\mathbf{x} \in V$. Mostre que se um conjunto é aberto em relação a uma das normas, ele é aberto em relação à outra também.

Exercício 4. Mostre que todo espaço métrico M é aberto nele mesmo e fechado nele mesmo.

Exercício 5. Mostre que a série

$$(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \cdot (y_j)_{j\in\mathbb{N}} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

converge sempre que $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $(y_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^2$.

Exercício 6. Seja (X, d) espaço métrico. Defina os conjuntos abertos como na Definição 1.2.1. Mostre que a coleção destes conjuntos abertos é uma topologia. Caracterize a topogia definida pela métrica zero-um: quais são os conjuntos abertos?