Introdução à Análise em espaços métricos e normados [1]

Alexandre L. Madureira

Laboratório Nacional de Computação Científica—LNCC, Brasil
URL: `http://www.lncc.br/~alm`

Fundação Getúlio Vargas—FGV, Brasil

[1] 11 de maio de 2018

RESUMO. Estas notas de aula são relativas à primeira metade do curso de Análise II da Escola de Pós-Graduação em Economia da Fundação Getúlio Vargas (EPGE–FGV). Elas seguem [**7**] de perto, acrescidas de algumas demonstrações. O estilo é o mesmo de [**6**]. Há vários outros livros excelentes cobrindo o mesmo material, e alguns são listados na bibliografia.

Os tópicos a serem discutidos são

- Espaços Métricos
  - definição
  - conjuntos limitados, abertos e fechados
  - sequências; sequências de Cauchy
  - espaço completo, separável e compacto
- Espaços Vetoriais Normados
  - Euclidiano; Banach e Hilbert
  - exemplos
- Funções Contínuas
  - propriedades
  - homeomorfismos
  - continuidade uniforme; contração
- Teorema da Contração e Aplicações
  - existência de solução de EDO
  - método de Bellman

Sumário

CAPíTULO 1

Espaços Métricos

[1] Neste capítulo introduzimos a noção de espaços métricos e discutimos algumas de suas propriedades.

1.1. Definição e Exemplos

Um *espaço métrico* é um conjunto M munido de uma *métrica* (também chamada de *distância*), que nada mais é do que uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ tal que para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in M$,

(1) $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$
(2) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > 0$ se $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$
(3) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (simetria)
(4) $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ (desigualdade triangular)

Note que não há necessidade de M possuir "operações" entre seus elementos ou multiplicação por escalar. Seguem abaixo alguns exemplos de espaços métricos.

Exemplo 1.1. Dado um conjunto arbitrário M, o exemplo mais simples de distância é dada pela métrica *discreta* ou *zero-um*, onde

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathbf{x} = \mathbf{y}, \\ 1 & \text{se } \mathbf{x} \neq \mathbf{y}. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Exemplo 1.2. Se M é um espaço métrico com a métrica $d(\cdot, \cdot)$, então qualquer subconjunto $M' \subset M$ é um espaço métrico com a mesma métrica.

Exemplo 1.3. O conjunto dos reais $\mathbb{R}$ munido da distância $d(x, y) = |x - y|$ é um espaço métrico. Então $[0, 1)$ e $[0, 1) \cup \{3\}$ munidos da mesma medida também são espaços métricos

Exemplo 1.4. Se M é espaço métrico com a métrica $d(\cdot, \cdot)$, então para todo número $\alpha > 0$ temos que $\alpha d(\cdot, \cdot)$ também é um métrica.

Exemplo 1.5. Dados dois espaços métricos M e M', com métricas dadas por $d_M(\cdot, \cdot)$ e $d_{M'}(\cdot, \cdot)$, então $M \times M'$ é um espaço métrico com qualquer uma das distâncias abaixo:

$$\begin{gathered} d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d_M(x, y) + d_{M'}(x', y'), \qquad d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{[d_M(x, y)]^2 + [d_{M'}(x', y')]^2}, \\ d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{d_M(x, y), d_{M'}(x', y')\}, \end{gathered} \tag{1.1.2}$$

onde $\mathbf{x} = (x, x')$ e $\mathbf{y} = (y, y') \in M \times M'$. A generalização para um produto cartesiano finito de espaços métricos é imediata. Note que $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ é um caso particular deste exemplo.

[1] Última Atualização: 03/05/2018

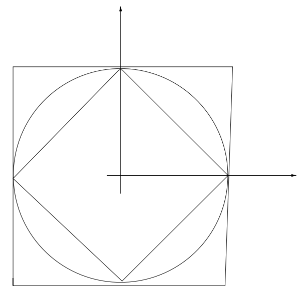

FIGURA 1. Bolas unitárias nas normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$.

1.1.1. Espaço vetoriais normados. Um espaço vetorial é um conjunto cujos elementos são denominados *vetores*, onde as operações de soma de vetores e multiplicação por um escalar são bem-definidas. Uma norma é um caso particular de métrica. O exemplo mais comum de espaço vetorial é o $\mathbb{R}^n$.

EXEMPLO 1.6. O $\mathbb{R}^n$ é um espaço métrico com a distância euclidiana $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_2$, onde

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Quando $p \geq 1$, podemos definir

$$\|\mathbf{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}, \tag{1.1.3}$$

e a norma euclidiana acima é um exemplo particular para $p = 2$.

Casos particulares importantes além de $p = 2$ são $p = 1$ e $p = \infty$ (OK, este não é um caso particular, mas pode ser obtido fazendo-se $p \to \infty$):

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \text{(norma de Manhattan ou do taxista)},$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_i| : \ i = 1, \dots, n\} \quad \text{(norma infinito, ou do sup, ou do máximo)}$$

Ver Figura 1.

O Exemplo 1.6 é um caso particular de espaço vetorial normado. Relembramos aqui as definições pertinentes [**6**, Seção 2.2].

DEFINIÇÃO 1.1.1. *Um espaço vetorial V sobre os reais é um conjunto cujos elementos chamamos de vetores, com duas operações binárias, soma vetorial e multiplicação por escalar tais que*

(1) $\mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{y}+\mathbf{x}$, *para todo* $\mathbf{x},\mathbf{y} \in V$
(2) $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} = \mathbf{y}+(\mathbf{x}+\mathbf{z})$, *para todo* $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in V$
(3) Existe um elemento $\mathbf{0} \in V$ *tal que* $\mathbf{0}+\mathbf{x} = \mathbf{x}$, *para todo* $\mathbf{x} \in V$
(4) Para todo $\mathbf{x} \in V$, *existe um elemento* $\mathbf{y} \in V$ *tal que* $\mathbf{y}+\mathbf{x} = \mathbf{0}$
(5) $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$, *para todo* $\mathbf{x} \in V$

(6) $(\alpha+\beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$, *para todo* α, $\beta \in \mathbb{R}$ *e para todo* $\mathbf{x} \in V$
(7) $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$, *para todo* α, $\beta \in \mathbb{R}$ *e para todo* $\mathbf{x} \in V$
(8) $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$, *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e para todo* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$

A definição de norma sobre V segue abaixo.

DEFINIÇÃO 1.1.2. *Dado um espaço vetorial* V*, uma* norma *é uma função de* V *em* $\mathbb{R}$*, denotada por* $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$*, e tal que*

(1) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ *para todo* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in V$ *(desigualdade triangular)*
(2) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$ *para todo* $\mathbf{x} \in V$*, e para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$
(3) $\|\mathbf{x}\| > 0$ *para todo* $\mathbf{x} \in V$ *tal que* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

Dizemos que V é *normado* se possui uma norma $\|\cdot\|_V$ a ele associada.

EXEMPLO 1.7. Seja V espaço vetorial normado com norma $\|\cdot\|_V$. Então V é espaço métrico com a distância $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_V$. A propriedade mais difícil a ser checada é a desigualdade triangular. No caso, dados $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in V$ temos

$$d(\mathbf{x},\mathbf{z}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{z}\| \le \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}-\mathbf{z}\| = d(\mathbf{x},\mathbf{y}) + d(\mathbf{y},\mathbf{z}).$$

Consideramos abaixo dois espaços de funções. Note a semelhança das normas $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_1$ com as respectivas normas do $\mathbb{R}^n$.

EXEMPLO 1.8. Seja X um conjunto não vazio, e $\mathcal{F}_\infty(X)$ o espaço das funções $f : X \to \mathbb{R}$ limitadas, isto é, se $f \in \mathcal{F}_\infty(X)$, então existe $c_f \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \le c_f$ para todo $x \in X$. Então $\mathcal{F}_\infty(X)$ é espaço vetorial e normado com

$$\|f\|_{\infty,X} = \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

De forma análoga, seja I um intervalo não vazio da reta, e $\mathcal{F}_1(I)$ o espaço das funções contínuas $f : I \to \mathbb{R}$ tal que $|f|$ seja integrável. Então

$$\|f\|_{1,I} = \int_I |f(x)|\,dx$$

define uma norma[2].

EXEMPLO 1.9. Considere o espaço l^∞ das sequências em $\mathbb{R}$ limitadas, e a norma

$$\|(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup\{|x_k| : k \in \mathbb{N}\}.$$

Sendo uma norma, $\|\cdot\|_\infty$ induz a distância

$$d\big((x_k)_{k\in\mathbb{N}}, (y_k)_{k\in\mathbb{N}}\big) = \sup\{|x_k - y_k| : k \in \mathbb{N}\}$$

para todas sequências $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^\infty$.

[2]Note que $\|\cdot\|_1$ não define uma norma num espaço que admita funções descontínuas. Uma função f que seja igual a zero em I a menos de finitos pontos tem integral zero sem ser identicamente nula, e portanto $\|f\|_1 = 0$ mas $f \neq 0$. Esta "dificuldade" é contornada identificando-se funções que sejam diferentes apenas em conjuntos de medida nula.

Exemplo 1.10. Dado $p \geq 1$ considere o espaço l^p das sequências $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tais que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty,$$

isto é, a série converge. Podemos então introduzir a norma $\|(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p}$.

Exemplo 1.11. Note que se $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^p$, para $p < \infty$, então $x_k \to 0$. Isto implica em particular que as sequências constantes não nulas não estão em l^p, em particular, $(1, 1, 1, \dots) \notin l^p$. Entretanto $(1, 1, 1, \dots) \in l^\infty$, e $l^p \subsetneq l^\infty$, isto é, toda sequência em l^p está em l^∞.

Exemplo 1.12. E quanto a $l^p \subset l^q$? Isto é verdade desde que $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Considere por exemplo, $p = 1$ e $q = 2$. Veja que a sequência $(1/j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^2$ pois

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \infty,$$

mas $\sum_{j=1}^{\infty} 1/j$ não converge e portanto $(1/j)_{j\in\mathbb{N}} \notin l^1$. Logo $l^2 \not\subset l^1$. Para ver que

$$1 \leq p \leq q \leq \infty \implies l^p \subset l^q$$

basta considerar $1 \leq p \leq q < \infty$, pois $l^p \subset l^\infty$ foi discutido no Exemplo 1.11. Seja então $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^p$. Então é limitada pois $x_j \to 0$; seja c tal que $|x_j|^{q-p} < c$ (isto só é possível porque $p \leq q$). Note que, para todo $J \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{J} |x_j|^q = \sum_{j=1}^{J} |x_j|^p |x_j|^{q-p} \leq c \sum_{j=1}^{J} |x_j|^p \leq c \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p = c\|(\mathbf{x}_j)_{j\in\mathbb{N}}\|_p^p.$$

Portanto a sequência das somas parciais é monótona crescente e limitada superiormente; então converge e $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^q$.

Uma importante noção matemática quando se trabalha em espaços vetoriais é a de produtos internos.

Definição 1.1.3. *Seja V espaço vetorial sobre os reais. Um* produto interno *é uma função de $V \times V \to \mathbb{R}$, denotado por $\mathbf{x}, \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ e tal que*

(1) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} > 0$ *para todo* $\mathbf{x} \in V$ *com* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
(2) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$ *para todo* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in V$
(3) $(\alpha\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e todo* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in V$
(4) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$ *para todo* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in V$

Note que da definição acima concluímos imediatamente que para todo $\mathbf{x} \in V$,

$$\mathbf{0} \cdot \mathbf{x} = (0\mathbf{0}) \cdot \mathbf{x} = 0(\mathbf{0} \cdot \mathbf{x}) = 0.$$

Exemplo 1.13. Considere o espaço vetorial das funções contínuas em $[0, 1]$. Então a operação dada pela integral de Riemann

$$f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

define um produto interno deste espaço.

O resultado abaixo é importante pois mostra que *todo* produto interno induz uma norma.

TEOREMA 1.1.4. *Seja V um espaço vetorial com produto interno. Então*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}$$

define uma norma em V. Além disto, vale a identidade do paralelogramo

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_V^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_V^2 = 2(\|\mathbf{x}\|_V^2 + \|\mathbf{y}\|_V^2) \quad \textit{para todo } \mathbf{x},\mathbf{y}\in V,$$

e vale a desigualdade de Cauchy–Schwartz

$$|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \le \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \qquad \textit{para todo } \mathbf{x},\mathbf{y}\in V. \tag{1.1.4}$$

DEMONSTRAÇÃO. Como o produto interno garante que sempre teremos $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}\ge 0$, então a operação acima está bem definida. Mostraremos primeiro (1.1.4). Seja $\mathbf{z} = \mathbf{x}-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})\mathbf{y}/\|\mathbf{y}\|^2$. Então

$$\mathbf{z}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} - \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^2}\mathbf{y}\cdot\mathbf{y} = 0,$$

e

$$0 \le \|\mathbf{z}\|^2 = \mathbf{z}\cdot\mathbf{z} = \mathbf{z}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} - \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^2}\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}.$$

Logo

$$(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2 \le \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2,$$

e (1.1.4) vale.

Para mostrar a propriedade (1) da definição de norma, note que

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}+2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{y}\cdot\mathbf{y} \le \|\mathbf{x}\|^2+2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|+\|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|)^2,$$

e assim temos (1). As propriedade (2) e (3) seguem-se imediatamente da definição e das propriedades do produto interno. A identidade do paralelogramo segue-se das propriedades de produto interno. □

OBSERVAÇÃO. Note pela demonstração acima que a igualdade $|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ vale se e somente se $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}$ para algum $\alpha\in\mathbb{R}$.

EXEMPLO 1.14. No $\mathbb{R}^n$, o produto interno canônico é dado por

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

De forma similar, em l^2 temos o produto interno

$$(x_j)_{j\in\mathbb{N}}\cdot(y_j)_{j\in\mathbb{N}} = \sum_{i=1}^\infty x_i y_i. \tag{1.1.5}$$

Enquanto o produto interno canônico em $\mathbb{R}^n$ está claramente bem-definido para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$, o mesmo não é claro em (1.1.5), i.e., temos que provar que a série à direita converge sempre que $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}\in l^2$.

EXEMPLO 1.15. Considere o conjunto as funções $\sin 2\pi kx$, para $k \in \mathbb{N}$. Então para $i \neq j$ temos que $\sin 2\pi ix$ e $\sin 2\pi jx$ são ortogonais em relação ao produto interno (vide Exemplo 1.13)

$$f \cdot g = 2 \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

pois

$$2 \int_0^1 \sin 2\pi ix \sin 2\pi jx\,dx = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Além disto, temos que estas funções têm norma unitária (na norma induzida pelo produto interno acima). Logo elas pertencem à esfera de raio um, a ser definida na Seção 1.2.

1.2. Conjuntos abertos, fechados em espaços métricos

Para definirmos o que é um conjunto aberto num espaço métrico, necessitamos das chamadas bolas. Dado um espaço métrico M munido da distância $d(\cdot,\cdot)$, e $\mathbf{x} \in M$, dizemos que a *bola aberta de raio* r *e centro* $\mathbf{x}$ é dada por

$$B_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in M : d(\mathbf{x},\mathbf{y}) < r\}.$$

De forma similar, chamamos de *bola fechada de raio* r *e centro* $\mathbf{x}$, e de *esfera de raio* r *e centro* $\mathbf{x}$ os conjuntos

$$\{\mathbf{y} \in M : d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq r\}, \qquad \{\mathbf{y} \in M : d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = r\}.$$

EXEMPLO 1.16. Considere os espaços métricos $M = \mathbb{R}$ e $M' = [0,1)$ munidos da métrica induzida pelo valor absoluto $|\cdot|$. Então, dado $\epsilon > 0$, temos $B_\epsilon(0) = (-\epsilon,\epsilon)$ em M, e $B_\epsilon(0) = [0,\epsilon)$ em M'. Portanto, *as bolas dependem do espaço* M *nos quais elas estão inseridas.*

EXEMPLO 1.17. Considere o espaço de funções $\mathcal{F}_\infty(\mathbb{R})$ definido no Exemplo 1.8, com a métrica induzida pela norma $\|f\|_{\infty,\mathbb{R}} = \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}$. Logo, dado $f \in \mathcal{F}_\infty(\mathbb{R})$ e $\epsilon > 0$ temos que se $g \in B_\epsilon(f)$ então a função g é tal que

$$\sup\{|f(x) - g(x)| : x \in \mathbb{R}\} < \epsilon.$$

Graficamente, g pertence à "vizinhança tubular" de tamanho $\epsilon > 0$ em torno de f, como indicado na Figura 2.

Podemos agora definir conjuntos abertos em M.

DEFINIÇÃO 1.2.1. *Um conjunto* $A \subseteq M$ *é* aberto em M *se para todo* $\mathbf{x} \in A$ *existe* $\epsilon > 0$ *tal que* $B_\epsilon(\mathbf{x}) \subseteq A$. *Em geral chamaremos conjuntos abertos simplesmente de* abertos *quando o espaço* M *ao qual nos referirmos for claro.*

EXEMPLO 1.18. $\emptyset \subset M$ é aberto por "vacuidade". Além disto, M é aberto em M (ver Exercício 1.8).

EXEMPLO 1.19. Seja $A = [0,1)$. Então A não é aberto em $\mathbb{R}$ mas é aberto em $[0,1)$.

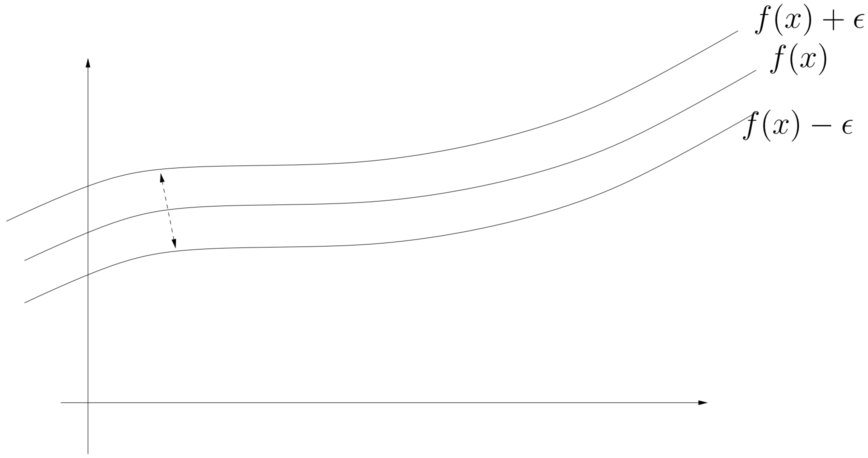

FIGURA 2. Vizinhança tubular de raio ϵ em torno da função f.

OBSERVAÇÃO. Note que a definição 1.2.1 de abertos coincide com a definição usada em $\mathbb{R}^n$, a distância sendo dada pela norma euclidiana [**6**]. É importante ressaltar que a escolha de norma não implica em nenhuma "escolha de topologia", pois em espaços de dimensão finita, todas as normas são *equivalentes*, i.e., se $|||\cdot|||$ define uma norma em $\mathbb{R}^n$, então existem contantes positivas c e C dependendo apenas de n (dimensão do espaço) tais que

$$c|||\mathbf{x}||| \leq \|\mathbf{x}\| \leq C|||\mathbf{x}||| \tag{1.2.1}$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Isto implica em que um aberto numa norma será aberto em outra (ver Exercício 1.7).

LEMA 1.2.2. Duas propriedades fundamentais de conjuntos abertos são

(1) A união arbitrária de abertos é aberta.
(2) A interseção finita de abertos é aberta.

DEMONSTRAÇÃO. Para mostrar (1), seja Λ um conjunto de índices, e $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ uma família arbitrária de abertos, e seja

$$G = \cup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$$

e $\mathbf{x} \in G$. Então $\mathbf{x} \in G_{\lambda_0}$ para algum $\lambda_0 \in \Lambda$. Como G_{λ_0} é aberto, então existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(\mathbf{x}) \subseteq G_{\lambda_0}$. Logo

$$B_\epsilon(\mathbf{x}) \subseteq \cup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda = G$$

e então G é aberto.

Para mostrar (2), sejam $G_1, \cdots, G_k$ abertos e $G = \cap_{i=1}^k G_i$. Seja $\mathbf{x} \in G$. Logo $\mathbf{x} \in G_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Como G_i é aberto, seja $\epsilon_i > 0$ tal que $B_{\epsilon_i}(\mathbf{x}) \subseteq G_i$. Definindo $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_k\}$, temos $\epsilon > 0$ e $B_\epsilon(\mathbf{x}) \subseteq G_1 \cap \cdots \cap G_k = G$. Logo G é aberto. □

OBSERVAÇÃO. O Lema 1.2.2 prova em particular que *todo espaço métrico é um espaço topológico* (ver Exercício 1.11). A definição de um expaço topológico é a seguinte. Seja X um conjunto. Uma topologia para X é uma coleção $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X tal que

(1) $\emptyset$, $X \in \mathcal{T}$
(2) Uniões arbitrárias de conjuntos de $\mathcal{T}$ pertencem a $\mathcal{T}$

(3) Interseções finitas de conjuntos de $\mathcal{T}$ pertencem a $\mathcal{T}$

Os elementos de $\mathcal{T}$ são chamados de *conjuntos abertos* de X, e chamamos $(X, \mathcal{T})$ de *espaço topológico*.

EXEMPLO 1.20. A interseção infinita de abertos pode não ser aberta. Por exemplo $\cap_{j\in\mathbb{N}}(-1/j, 1/j) = \{0\}$. Ver [**6**, Exemplo 2.24].

O resultado abaixo relaciona abertos relativos de subconjuntos.

LEMA 1.2.3. Seja (M, d) espaço métrico e $M' \subset M$ espaço métrico com a métrica induzida por d. Então $G' \subset M'$ é aberto em M' se e somente se existe aberto $G \subset M$ tal que $G' = G \cap M'$.

DEMONSTRAÇÃO. ($\Rightarrow$) Seja $G' \subseteq M'$ aberto em M'. Então para todo $\mathbf{x} \in G'$ existe $\epsilon_{\mathbf{x}} > 0$ tal que $B'_{\epsilon_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y}' \in M' : d(\mathbf{x}', \mathbf{y}') < \epsilon_{\mathbf{x}}\} \subseteq G'$. Seja

$$G = \cup_{\mathbf{x}\in G'} B_{\epsilon_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}) = \cup_{\mathbf{x}\in G'}\{\mathbf{y} \in M : d(\mathbf{x}', \mathbf{y}') < \epsilon_{\mathbf{x}}\}.$$

Então G é aberto em M pois é união de abertos, e $G' \subseteq M' \cap G$. Mas por construção, $B_{\epsilon_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}) \cap M' \subseteq G'$ para todo $\mathbf{x} \in G'$. Portanto, $G' = M' \cap G$.

($\Leftarrow$) Se $G' = G \cap M'$, onde G é aberto em M, então para todo $\mathbf{x} \in G'$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(\mathbf{x}) \subseteq G$. Mas $B'_\epsilon(\mathbf{x}) = B_\epsilon(\mathbf{x}) \cap M'$ e portanto

$$B'_\epsilon(\mathbf{x}) = B_\epsilon(\mathbf{x}) \cap M' \subseteq G \cap M' = G'.$$

□

Um outro importante conceito é o de conjuntos fechados, e temos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 1.2.4. *Um conjunto $F \subseteq M$ é fechado em M se seu complemento*

$$\mathcal{C}(F) = M \backslash F = \{\mathbf{x} \in M : \mathbf{x} \notin F\}$$

é aberto.

Para mostrar que um conjunto G é aberto em M, basta mostrar que para todo $\mathbf{x} \in G$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(\mathbf{x}) \subseteq G$. Para mostrar que F é fechado, basta mostrar que para todo $\mathbf{x} \notin F$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(\mathbf{x}) \cap F = \emptyset$. Note que para mostrar que um determinado conjunto é aberto (fechado), não basta mostrar que seu complemento não é fechado (aberto), pois há conjuntos que não são nem abertos nem fechados.

EXEMPLO 1.21. Os conjuntos M e $\emptyset$ são fechados em M, pois seus complementares $\mathcal{C}(\emptyset) = M$ e $\mathcal{C}(M) = \emptyset$ são abertos em M.

EXEMPLO 1.22. Para $M = (-2, -1) \cup (1, 2)$ com a métrica induzida pelo valor absoluto $|\cdot|$, temos que tanto $(-2, -1)$ como $(1, 2)$ são abertos. E cada um destes intervalos é também fechado, pois seus complementares são abertos.

EXEMPLO 1.23. Para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, as esferas e as bolas fechadas de centro $\mathbf{x}$ e raio r são conjuntos fechados em $\mathbb{R}^n$.

COROLÁRIO 1.2.5. Como consequência do Lema 1.2.2 temos:

(1) A interseção arbitrária de fechados é fechada.
(2) A união finita de fechados é fechada.

DEMONSTRAÇÃO. Utilizamos nas duas demonstrações a regra de *De Morgam* [**6**, Apêndice B].

(1) Seja $\{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ uma coleção de fechados em $\mathbb{R}^n$, e seja $F = \cap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$. Então $\mathcal{C}(F) = \cup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{C}(F_\lambda)$ é uma união de abertos. Logo $\mathcal{C}(F)$ é aberto e, por definição, F é fechado.
(2) Se $F_1,\dots,F_n$ são fechados em $\mathbb{R}^n$ e $F = F_1\cup\cdots\cup F_n$, então $\mathcal{C}(F) = \mathcal{C}(F_1)\cap\cdots\cap\mathcal{C}(F_n)$. Como a interseção finita de abertos é aberta, e $\mathcal{C}(F_i)$ são abertos, então $\mathcal{C}(F)$ é aberto. Logo F é fechado.

□

1.2.1. Outras caracterizações de conjuntos abertos e fechados. Outras noções que podem ser úteis quando precisamos caracterizar conjuntos abertos ou fechados vêm a seguir.

DEFINIÇÃO 1.2.6. *Seja M espaço métrico e $X \subset M$. Dado $\mathbf{x} \in M$, dizemos que*

(1) uma vizinhança aberta *de $\mathbf{x}$ é um conjunto aberto em M que contenha $\mathbf{x}$.*
(2) $\mathbf{x}$ é ponto interior de X *se existe uma vizinhança aberta de $\mathbf{x}$ contida em X. O conjunto de pontos interiores é chamado de* interior de X *e denotado por $\mathrm{int}(X)$ ou $\mathring{X}$.*
(3) $\mathbf{x}$ é ponto de fronteira de X *se toda vizinhança aberta de $\mathbf{x}$ contém ponto de X e do complementar $\mathcal{C}(X) = M - X$. O conjunto de pontos de fronteira é chamado de* fronteira de X *e denotado por ∂X.*
(4) $\mathbf{x}$ é ponto exterior de X *se existe uma vizinhança aberta de $\mathbf{x}$ contida em $\mathcal{C}(X)$.*
(5) $\mathbf{x}$ é ponto de aderência de X *se para todo $\epsilon > 0$ tem-se $B_\epsilon(\mathbf{x}) \cap X \neq \emptyset$. O conjunto de pontos de aderência é chamado de* fecho de X *e denotado por $\overline{X}$.*

Note que segue-se das definições acima que

$$\overline{X} = \mathrm{int}\,(X) \cup \partial X. \tag{1.2.2}$$

Seja X conjunto contido num espaço métrico M. Se o conjunto $\{d(\mathbf{x},\mathbf{y}) : \mathbf{x},\mathbf{y} \in X\}$ for limitado superiormente então dizemos que X é limitado e definimos

$$\operatorname{diam} X = \sup\{d(\mathbf{x},\mathbf{y}) : \mathbf{x},\mathbf{y} \in X\}.$$

Finalmente, dizemos que $X \subset M$ é *denso em M* se $\overline{X} = M$.

LEMA 1.2.7. Seja M espaço métrico e $G \subseteq M$. As afirmativas abaixo são equivalentes.

(1) G é aberto.
(2) Todo ponto de G é ponto interior.
(3) G não contém nenhum de seus pontos de fronteira.

DEMONSTRAÇÃO. $\big((1) \Rightarrow (2)\big)$ Supondo (1), seja $\mathbf{x} \in G$. Como por hipótese G é aberto, temos que G é vizinhança aberta de $\mathbf{x}$. Logo $\mathbf{x}$ é ponto interior de G. Como $\mathbf{x}$ é arbitrário, obtemos (2).

$\big((2) \Rightarrow (3)\big)$ Se todo ponto de G é interior, então nenhum de seus pontos é de fronteira.

$\big((3) \Rightarrow (1)\big)$ Suponha que G não contenha nenhum de seus pontos de fronteira. Se G é vazio, então é aberto. Suponha então que G seja não vazio. Seja $\mathbf{x} \in G$. Como G não contém pontos de fronteira, logo $\mathbf{x}$ é ponto interior e existe vizinhança aberta U de $\mathbf{x}$ tal que $U \subseteq G$. Logo G é aberto. $\square$

COROLÁRIO 1.2.8. Seja $F \subseteq M$. Então as afirmativas abaixo são equivalentes.

(1) F é fechado
(2) F contém todos os seus pontos de fronteira
(3) $X = \overline{X}$

Finalmente concluímos esta seção com o conceito de ponto de acumulação.

DEFINIÇÃO 1.2.9. *Seja M um espaço métrico. Um ponto $\mathbf{x} \in M$ é um ponto de* acumulação *de $X \subseteq M$ se toda vizinhança aberta de $\mathbf{x}$ contém pelo menos um ponto de X diferente de $\mathbf{x}$. Denotamos por X' o conjunto de pontos de acumulação.*

Uma caracterização útil de fechados utiliza o conceito de pontos de acumulação, como o resultado a seguir indica.

TEOREMA 1.2.10. *Seja M um espaço métrico. Um subconjunto de M é fechado se e somente se contém todos os seus pontos de acumulação (isto é, se $X' \subseteq X$).*

DEMONSTRAÇÃO. ($\Rightarrow$) (Por contradição) Seja F um fechado em M, e $\mathbf{x}$ ponto de acumulação de F. Temos que mostrar que $\mathbf{x} \in F$. De fato, se $\mathbf{x} \notin F$, então $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(F)$. Mas como $\mathcal{C}(F)$ é aberto, então existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(\mathbf{x}) \subseteq \mathcal{C}(F)$. Logo $B_\epsilon(\mathbf{x}) \cap F = \emptyset$ e $\mathbf{x}$ não é ponto de acumulação de F, uma contradição. Portanto $\mathbf{x} \in F$.

($\Leftarrow$) Supomos agora que F contém todos os seus pontos de acumulação. Considere então um ponto $\mathbf{y} \in \mathcal{C}(F)$. Então $\mathbf{y}$ não é ponto de acumulação de F, e portanto existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(\mathbf{y}) \subseteq \mathcal{C}(F)$. Logo $\mathcal{C}(F)$ é aberto, e concluímos que F é fechado. $\square$

1.3. Sequências

1.3.1. Definição e resultados preliminares. Uma sequência num espaço métrico M é uma função de $\mathbb{N}$ em M. Portanto $X : \mathbb{N} \to M$ indica uma sequência, que escrevemos também como $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$, ou ainda $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots)$. Para indicar o k-ésimo valor da sequência escrevemos simplesmente $\mathbf{x}_k$.

DEFINIÇÃO 1.3.1. *Dizemos que $\mathbf{x} \in M$ é* limite de uma sequência *$(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$, se para toda vizinhança aberta U de $\mathbf{x}$ existir $K^* \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{x}_k \in U$ para todo $k \geq K^*$. Escrevemos neste caso que $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$, ou que $\mathbf{x} = \lim \mathbf{x}_k$, ou ainda*

$$\mathbf{x} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k.$$

De forma equivalente, $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$ se para todo $\epsilon > 0$, existe $K^* \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{x}_k \in B_\epsilon(\mathbf{x})$ para todo $k \geq K^*$.

Se uma sequência tem limite em M, dizemos que ela converge ou que é convergente, e se não tem limite em M dizemos que ela não converge ou que é divergente.

EXEMPLO 1.24. Seja $M = \mathcal{F}_\infty([0, 1/2])$, e considere a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde $f_n(x) = x^n$. Então f_n converge para a função identicamente nula, que denotamos por 0, nas normas $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_1$. De fato,

$$\|f_n - 0\|_{\infty,[0,1/2]} = \sup\{x^n : x \in [0, 1/2]\} = 1/2^n,$$

e portanto, dado $\epsilon > 0$ temos que para $N^* \in \mathbb{N}$ tal que $2^{N^*} > 1/\epsilon$,

$$n > N^* \implies \|f_n - 0\|_{\infty,[0,1/2]} = 1/2^n < 1/2^{N^*} < \epsilon.$$

De forma análoga,

$$\|f_n - 0\|_{1,[0,1/2]} = \int_0^{1/2} x^n\,dx = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}},$$

e portanto, dado $\epsilon > 0$ temos que para $N^* \in \mathbb{N}$ tal que $(N^*+1)2^{N^*+1} > 1/\epsilon$,

$$n > N^* \implies \|f_n - 0\|_{1,[0,1/2]} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} < \frac{1}{(N^*+1)2^{N^*+1}} < \epsilon.$$

Exemplo 1.25. Considere agora M o espaço das funções contínuas, denotado por $\mathcal{C}^0([0,1])$ (note a semelhança com o espaço do Exemplo 1.24), e a sequência de funções $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^n$. Neste caso, $\|g_n - 0\|_{\infty,[0,1]} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (por quê?), e portanto $g_n \not\to 0$ na norma infinito. Mas $g_n \to 0$ na norma um. Isto pode ser mostrado usando-se que

$$\|g_n - 0\|_{1,[0,1]} = \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{(n+1)}.$$

Logo, é possível que uma sequência seja convergente em uma norma, e não o seja em outra.

Definição 1.3.2. *Seja X um conjunto qualquer não vazio, e considere a sequência de funções definida por $f_i : X \to \mathbb{R}^n$ para $i \in \mathbb{N}$. Dizemos então que $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$* converge uniformemente *para $f : X \to \mathbb{R}^n$ se a sequência de valores $\|f_i - f\|_{\infty,X} \to 0$. Note que para a convergência uniforme ocorrer, não é preciso que f_i ou f sejam limitadas, somente que $f_i - f$ o seja para todo i.*

Dizemos que f_i converge pontualmente para f se $\|f_i(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})\|_{\mathbb{R}^n} \to 0$ para todo $\mathbf{x} \in X$. Note que convergência uniforme implica na convergência pontual, mas a recíproca não vale, como no caso do Exemplo 1.25.

Talvez a segunda pergunta mais natural em relação aos limites de sequências é quanto a unicidade destes, quando existirem. A resposta é afirmativa, como mostra o resultado abaixo.

Teorema 1.3.3 (Unicidade de limite). *Uma sequência pode ter no máximo um limite.*

Demonstração. Considere que $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência tal que $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$ e $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}'$, com $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$. Sejam $\epsilon = d(\mathbf{x},\mathbf{x}')/2 > 0$, e sejam K^* e $K' \in \mathbb{N}$ tais que $d(\mathbf{x}_k,\mathbf{x}) < \epsilon$ para todo $k \geq K^*$ e $d\mathbf{x}_k,\mathbf{x}') < \epsilon$ para todo $k \geq K'$. Logo, se $k \geq \max\{K^*, K'\}$, então

$$d(\mathbf{x},\mathbf{x}') \leq d(\mathbf{x},\mathbf{x}_k) + d(\mathbf{x}_k,\mathbf{x}') < 2\epsilon = d(\mathbf{x},\mathbf{x}').$$

Como um número não pode ser estritamente menor que ele mesmo, temos uma contradição. Portanto $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ e o limite é único. □

Uma outra noção importante é o de limitação de uma sequência. Neste caso, mesmo quando a sequência não converge, podemos conseguir alguns resultados parciais, como veremos mais a seguir.

Definição 1.3.4. *Dizemos que uma sequência $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada quando o conjunto $S = \{\mathbf{x}_k : k \in \mathbb{N}\}$ é limitado.*

Um primeiro resultado intuitivo é que toda sequência convergente é limitada. De fato, é razoável pensar que se a sequência converge, ela não pode ter elementos arbitrariamente grandes em norma.

TEOREMA 1.3.5. *Toda sequência convergente é limitada.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sequência convergente e seja $\mathbf{x}$ seu limite. Seja $\epsilon = 1$. Como $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, existe K^* tal que $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) < 1$ para todo $k \geq K^*$.

Falta agora limitar os K^* primeiros termos da sequência. Seja

$$C = 2\max\{d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1), d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2), d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_3), \dots, d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{K^*-1}), 1\}.$$

e então $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \leq C/2$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Logo, usando a desigualdade triangular temos

$$d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k) \leq d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) + d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) \leq C \quad \text{para todo } i, k \in \mathbb{N}.$$

Portanto $S = \{\mathbf{x}_k : k \in \mathbb{N}\}$ é limitado. □

1.3.2. Subsequências. Seja $(\mathbf{x}_k)$ sequência em M, espaço métrico, e

$$k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_j < \dots$$

sequência de números naturais. Então dizemos que $(\mathbf{x}_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ é uma *subsequência* de $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Um primeiro resultado relacionado com subsequências nos diz que se uma sequência converge para um determinado limite, então todas as subsequências convergem e têm o mesmo limite.

LEMA 1.3.6. Se uma sequência $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para $\mathbf{x}$, então todas as subsequências de $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ são convergentes e têm o mesmo limite $\mathbf{x}$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sequência convergente, e seja $\mathbf{x} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k$. Dado $\epsilon > 0$, seja K^* tal que

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) < \epsilon \quad \text{para todo } k \geq K^*. \tag{1.3.1}$$

Seja $(\mathbf{x}_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ subsequência de $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Como $k_j \geq j$ para todo $j \in \mathbb{N}$, então $j \geq K^*$ implica em $k_j \geq K^*$ e portanto

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{k_j}) < \epsilon,$$

por (1.3.1). Logo $(\mathbf{x}_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ converge para $\mathbf{x}$. □

1.3.3. Sequências de Cauchy. Um conceito importante tratando-se de sequências é o de sequências de Cauchy. Formalmente, dizemos que uma sequência $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é *de Cauchy* se para todo $\epsilon > 0$ existe $K^* \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m) < \epsilon \quad \text{para todo } k, m \geq K^*.$$

O lema a seguir mostra que toda sequência convergente é de Cauchy.

LEMA 1.3.7. Toda sequência convergente é de Cauchy.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sequência convergente, e $\mathbf{x}$ o seu limite. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $K^* \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, \mathbf{x}_k) < \epsilon/2$ para todo $k \geq K^*$. Portanto,

$$d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m) \leq d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}) + d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_m) < \epsilon \quad \text{se } k, m \geq K^*.$$

Logo $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. □

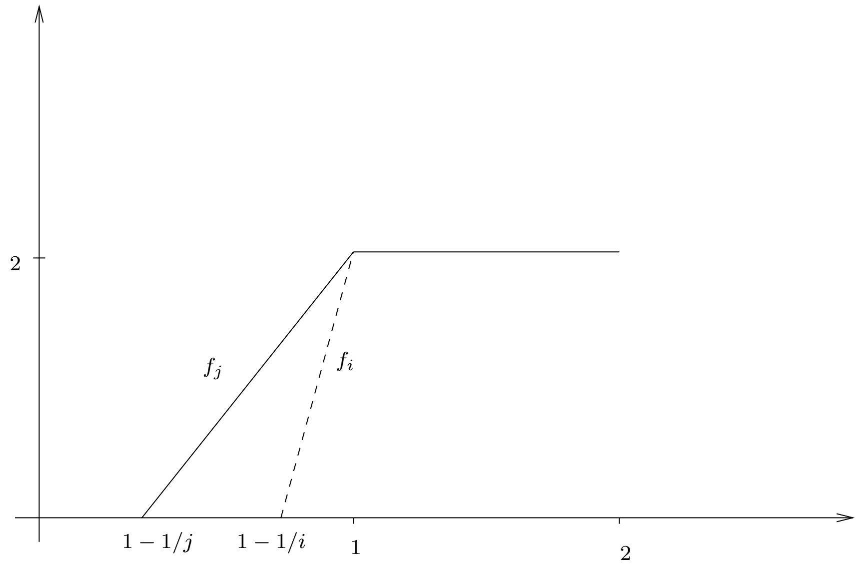

FIGURA 3. Sequência de funções definidas no Exemplo 1.26.

LEMA 1.3.8. Toda sequência de Cauchy é limitada.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sequência de Cauchy. Então, considerando $\epsilon = 1$, temos que existe $K^* \in \mathbb{N}$ tal que $d(\mathbf{x}_{K^*}, \mathbf{x}_k) < 1$ para todo $k > K^*$. Definindo $C = 2\max\{d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_{K^*}), \dots, d(\mathbf{x}_{K^*-1}, \mathbf{x}_{K^*}), 1\}$, temos imediatamente que $d(\mathbf{x}_{K^*}, \mathbf{x}_k) \leq C/2$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo,

$$d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \leq d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{K^*}) + d(\mathbf{x}_{K^*}, \mathbf{x}_j) \leq C.$$

Portanto, a sequência é limitada. □

Em espaços métricos, nem sempre sequências convergem. Chamamos de *espaços métricos completos* àqueles nos quais todas sequências de Cauchy são convergentes.

1.3.4. Completude de $\mathcal{C}^0_\infty(X)$ na norma do sup. Seja $X \subset \mathbb{R}^m$ não vazio, e considere o espaço $\mathcal{C}^0_\infty(X)$ das funções de X em $\mathbb{R}^n$ contínuas e limitadas[3]. O objetivo desta seção é mostrar que este espaço é completo quando a métrica é induzida pela norma do supremo.

EXEMPLO 1.26. Neste exemplo mostramos que $\mathcal{C}^0_\infty(X)$ não necessariamente é completo, se considerarmos outras normas. Considere a métrica induzida pela norma $\|\cdot\|_1$, e a sequência de funções dada por $f_i : [0,2] \to \mathbb{R}$ onde

$$f_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1-1/i), \\ i(x-1)+1 & \text{se } x \in [1-1/i, 1), \\ 1 & \text{se } x \in [1,2]. \end{cases}$$

Vide Figure 3. Veja que todas as f_i são contínuas, e que a sequência é de Cauchy pois, supondo $i > j$,

$$\|f_i - f_j\|_1 = \int_0^2 [f_j(x) - f_i(x)]\,dx \leq \int_{1-1/j}^1 f_j(x)\,dx \leq \frac{1}{j},$$

[3]quando X for compacto, $\mathcal{C}^0_\infty(X) = \mathcal{C}^0(X)$, mas em geral $\mathcal{C}^0_\infty(X) \subsetneq \mathcal{C}^0(X)$.

pois $i > j$ implica em $f_i(x) \le f_j(x)$ para todo $x \in [0,2]$. Note também que $f_j \to f$, onde

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1), \\ 1 & \text{se } x \in [1,2]. \end{cases}$$

Entretanto, $f \notin \mathcal{C}^0_\infty(X)$ pois não é contínua. Logo o espaço não é completo nesta métrica.

O critério de Cauchy para convergência uniforme não se aplica somente a sequência de funções contínuas, e na verdade as funções não precisam nem ser limitadas. Apenas a diferença entre elas precisam ser limitadas.

Teorema 1.3.9 (Critério de Cauchy para convergência uniforme). *Seja o conjunto $X \neq \emptyset$ e, para $i \in \mathbb{N}$, seja $f_i : X \to \mathbb{R}^n$. Então a sequência (f_i) converge uniformemente para uma função $f : X \to \mathbb{R}$ se e somente se dado $\epsilon > 0$, existe K_0 tal que*

$$\|f_i - f_j\|_{\infty,X} < \epsilon. \tag{1.3.2}$$

para todo i, $j \ge K_0$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Basta usar que

$$\|f_j(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{x})\| \le \|f_j(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})\| + \|f(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{x})\|$$

para todo $\mathbf{x} \in X$.

($\Leftarrow$) Por hipótese, dado $\epsilon > 0$, existe K_0 tal que

$$i, j \ge K_0 \implies \|f_i(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{x})\| < \frac{\epsilon}{2},$$

para todo $\mathbf{x} \in X$. Mas então $(f_i(\mathbf{x}))$ é sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$, e podemos definir $f(\mathbf{x}) = \lim_{i\to+\infty} f_i(\mathbf{x})$. Falta agora mostrar a convergência uniforme de f_i para f. Dado $\mathbf{x} \in X$, seja $\overline{K} \in \mathbb{N}$ tal que

$$i \ge \overline{K} \implies \|f_i(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Note que K_0 depende somente de ϵ, mas $\overline{K}$ depende também de $\mathbf{x}$. Então, seja $i \ge K_0$, e para cada $\mathbf{x} \in X$, seja $j = \sup\{K_0, \overline{K}\}$. Logo

$$\|f(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{x})\| \le \|f(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{x})\| + \|f_j(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{x})\| < \epsilon,$$

e (f_i) converge uniformemente para f. □

Mostramos a seguir que limite uniforme de sequência de funções contínuas é também uma função contínua. Lembre-se que em geral esta propriedade não vale se a convergência for somente pontual. Em particular, dados $\mathbf{x}^0 \in X$ e uma sequência de funções contínuas (f_i) convergindo pontualmente para f temos em geral que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} \lim_{i\to\infty} f_i(\mathbf{x}) \neq \lim_{i\to\infty} \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f_i(\mathbf{x}),$$

a menos que f seja contínua. De fato, considere o Exemplo 1.25. Temos que $g_n(x)$ converge pontualmente para a função

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1), \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Portanto
$$\lim_{x\to 1}\lim_{i\to\infty} g_i(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = 0, \qquad \lim_{i\to\infty}\lim_{x\to 1} g_i(x) = \lim_{i\to\infty} 1 = 1.$$
Uma outra observação à respeito do resultado abaixo é que não é necessário que as funções sejam limitadas mas apenas que a convergência uniforme ocorra.

TEOREMA 1.3.10 (Troca de Limites e Continuidade). *Seja* $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *sequência de funções* $f_i : X \to \mathbb{R}^n$ *contínuas em* $X \subset \mathbb{R}^m$*, convergindo uniformemente para* $f : X \to \mathbb{R}^n$*. Então* f *é contínua em* X*.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\mathbf{x}_0 \in X$. Dado $\epsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f(\mathbf{x}) - f_{N_0}(\mathbf{x})\| < \epsilon/3$ para todo $\mathbf{x} \in X$. Como f_{N_0} é contínua em X, existe $\delta > 0$ tal que
$$\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}_0) \cap X \implies \|f_{N_0}(\mathbf{x}) - f_{N_0}(\mathbf{x}_0)\| < \frac{\epsilon}{3}.$$
Logo se $\mathbf{x} \in X$ e $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$, então
$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| \le \|f(\mathbf{x}) - f_{N_0}(\mathbf{x})\| + \|f_{N_0}(\mathbf{x}) - f_{N_0}(\mathbf{x}_0)\| + \|f_{N_0}(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0)\| < \epsilon.$$
Logo f é contínua. □

O resultado abaixo garante que funções contínuas e limitadas formam um espaço vetorial completo na norma do supremo.

TEOREMA 1.3.11. *Seja* $\mathcal{C}_{lim}(X)$ *o espaço das funções de* $X \subset \mathbb{R}^m$ *em* $\mathbb{R}^n$*, contínuas e limitadas. Então* $\mathcal{C}_{lim}(X)$ *é completo na norma do supremo* $\|\cdot\|_{\infty,X}$*.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sequência em $\mathcal{C}_{\lim}(X)$. Então o Teorema 1.3.9 garante que existe : $X \to \mathbb{R}$ tal que $f_i \to f$ uniformemente. O Teorema 1.3.10 garante que f é contínua. Para que $f \in \mathcal{C}_{\lim}(X)$ falta mostrar que f é limitada. Mas seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f - f_N\|_{\infty,X} < 1$. Então
$$\|f(\mathbf{x})\|_{\mathbb{R}^n} \le \|f(\mathbf{x}) - f_N(\mathbf{x})\|_{\mathbb{R}^n} + \|f_N(\mathbf{x})\|_{\mathbb{R}^n} < 1 + \|f_N\|_{\infty,X}$$
para todo $\mathbf{x} \in X$, e portanto f é limitada. □

1.3.5. Resultados Topológicos. O conceito de sequência é importante também para caracterizar conjuntos quanto à sua topologia. Apresentamos abaixo alguns resultados nesta direção.

Podemos por exemplo usar sequências para caracterizar conjuntos fechados, como o resultado abaixo mostra.

LEMA 1.3.12 (Conjuntos fechados). Seja M espaço métrico e $F \subset M$. As afirmativas abaixo são equivalentes.

(1) F é fechado em M.
(2) Se $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é sequência convergente em M, com $\mathbf{x}_k \in F$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k \in F$.

DEMONSTRAÇÃO. (1)⇒(2) (*por contradição*) Suponha F fechado em M, e seja $(\mathbf{x}_k)$ sequência em F com $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$. Suponha $\mathbf{x} \notin F$. Como $\mathcal{C}(F)$ é aberto, existe aberto V contendo $\mathbf{x}$ tal que $V \cap F = \emptyset$. Logo, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos $\mathbf{x}_k \notin V$, uma contradição com $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$. Portanto $\mathbf{x} \in F$.

(1)$\Leftarrow$(2) (*por contradição*) Suponha que $\mathcal{C}(F)$ não seja aberto. Então existe $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(F)$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe um ponto em $\mathbf{x}_k \in B_{1/k}(\mathbf{x}) \cap F$. Logo $(\mathbf{x}_k)$ é uma sequência em F que converge para $\mathbf{x}$. Por hipótese, temos que $\mathbf{x} \in F$, uma contradição com $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(F)$. Portanto $\mathcal{C}(F)$ é aberto, e F é fechado. $\square$

Também os conceito de fronteira de um conjunto e o de conjunto aberto pode ser dado através de sequências.

LEMA 1.3.13 (Pontos de fronteira). Um ponto $\mathbf{x}$ é de fronteira de $X \subset M$ se e somente se existe sequência em X e sequência em $C(X)$, ambas convergentes para $\mathbf{x}$.

LEMA 1.3.14 (Conjuntos abertos). Seja $X \subset M$. As afirmativas abaixo são equivalentes.

(1) X é aberto em M.
(2) Seja $\mathbf{x} \in X$ e $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ contida em M com $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$. Então existe K^* tal que

$$k \geq K^* \implies \mathbf{x}_k \in X.$$

1.3.6. Um resultado de melhor aproximação. Uma pergunta fundamental em matemática aplicada é sobre *melhor aproximação*. Ou seja, dado um subconjunto não vazio de um espaço métrico, e um ponto fora deste conjunto, a pergunta é se existe algum ponto do subconjunto que minimize as distâncias até o ponto, e se há unicidade. No caso do espaço métrico ser um espaço vetorial, a caracterização de fechados dada pelo Lema 1.3.12, é útil, como descrevemos abaixo.

Seja V um *espaço vetorial com produto interno*. Isto quer dizer que V é normado com norma $\|\cdot\|_V$ induzida pelo produto interno: $\|\mathbf{v}\|_V^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$, onde $\cdot$ indica o produto interno, e $\mathbf{v} \in V$.

Consideraremos conjuntos convexos. Um subconjunto M de um espaço vetorial V é dito *convexo* se dados $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in M$ então

$$S = \{t\mathbf{y} + (1-t)\mathbf{x} : \ t \in [0,1]\} \subset M.$$

O conjunto S acima definido é denominado o segmento unindo $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

Seja $M \subset V$ um conjunto não vazio, convexo, e completo na norma $\|\cdot\|_V$. Então, dado um ponto $\mathbf{x} \in V$, pode-se perguntar se existe algum ponto em M que minimize a distância entre $\mathbf{x}$ e M, i.e, se existe $\mathbf{x}_* \in M$ tal que

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|_V = \inf\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_V : \ \mathbf{y} \in M\}. \tag{1.3.3}$$

Outra pergunta natural é se $\mathbf{x}_*$ é único. A resposta é afirmativa para ambas perguntas, existência e unicidade, como nos mostra o resultado abaixo.

LEMA 1.3.15. Seja $M \subset V$ conjunto não vazio, convexo, e completo na norma $\|\cdot\|_V$, e $\mathbf{x} \in V$. Então existe um único $\mathbf{x}_* \in M$ satisfazendo (1.3.3).

DEMONSTRAÇÃO. Vamos primeiro mostrar a existência. Como M é não vazio,

$$d = \inf\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_V : \ \mathbf{y} \in M\}$$

está bem definido. Para $k \in \mathbb{N}$, seja $\mathbf{x}_k \in M$ tal que $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|_V < d + 1/k$. Usando a lei do paralelograma, temos que

$$\|2\mathbf{x} - \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_V^2 + \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_V^2 = 2\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_V^2 + 2\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|_V^2,$$

para todo i, $j \in \mathbb{N}$. Mas M é convexo, logo $(\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j)/2 \in M$, e portanto,

$$2d \leq 2\|\mathbf{x} - (\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j)/2\|_V = \|2\mathbf{x} - \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_V.$$

Temos então que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_V^2 &= 2\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_V^2 + 2\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|_V^2 - \|2\mathbf{x} - \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_V^2 \\ &\leq 2\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_V^2 + 2\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|_V^2 - 4d^2. \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Mas então, $(\mathbf{x}_k)$ é de Cauchy, pois $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_V \to d$. De fato, dado $\epsilon > 0$, existe K^* tal que para todo $k \geq K^*$ tem-se $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|_V^2 - d^2 < \epsilon/2$. Logo, por (1.3.4), $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_V^2 < \epsilon$ se i, $j \geq K^*$.

Como M é completo, seja $M \ni \mathbf{x}_* = \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k$. Finalmente, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$d \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|_V \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|_V + \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_*\|_V.$$

Tomando o limite $k \to \infty$, temos $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|_V = d$, como queríamos.

Para mostrar a unicidade, seja $\mathbf{y} \in M$, com $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_V = d$. Então $(\mathbf{y} + \mathbf{x}_*)/2 \in M$, e

$$d^2 \leq \|\mathbf{x} - (\mathbf{y} + \mathbf{x}_*)/2\|_V^2.$$

Portanto, usando novamente a lei do paralelograma, temos

$$4d^2 + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_*\|_V^2 \leq \|2\mathbf{x} - \mathbf{y} - \mathbf{x}_*\|_V^2 + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_*\|_V^2 = 2\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_V^2 + 2\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|_V^2 = 4d^2.$$

Logo $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_*\|_V = 0$ e $\mathbf{y} = \mathbf{x}_*$. □

Observação. No caso de M ser um sub-espaço vetorial de V, pode-se mostrar que $\mathbf{x}_*$ é o único vetor de M tal que $\mathbf{x} - \mathbf{x}_*$ é ortogonal a M, i.e.,

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \cdot \mathbf{y} = 0$$

para todo $\mathbf{y} \in M$.

1.3.7. Sequências contráteis e o método das aproximações sucessivas. Dizemos que uma sequência $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ num espaço métrico M é *contrátil* se existem número real $\lambda < 1$ e um natural K^* tais que

$$d(\mathbf{x}_{k+2}, \mathbf{x}_{k+1}) \leq \lambda d(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k)$$

para todo $k > K^*$.

Teorema 1.3.16. *Toda sequência contrátil num espaço completo é convergente*

Demonstração. Seja $(\mathbf{x}_k)$ sequência contrátil com constante $\lambda < 1$. Sem perda de generalidade, supomos nesta demonstração que $K^* = 1$, isto é

$$d(\mathbf{x}_{k+2}, \mathbf{x}_{k+1}) \leq \lambda d(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Então,

$$d(\mathbf{x}_{k+2}, \mathbf{x}_{k+1}) \leq \lambda d(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k) \leq \lambda^2 d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}) \leq \dots \leq \lambda^k d(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1).$$

Logo, para $m \in \mathbb{N}$ e $k \geq m$ temos

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m) &\leq d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}) + d(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k-2}) + \dots + d(\mathbf{x}_{m+1}, \mathbf{x}_m) \\ &\leq \big(\lambda^{k-2} + \lambda^{k-3} + \dots + \lambda^{m-1}\big) d(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) = \lambda^{m-1}\big(\lambda^{k-m-1} + \lambda^{k-m-2} + \dots + 1\big) d(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \\ &= \lambda^{m-1}\frac{1 - \lambda^{k-m}}{1 - \lambda} d(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \leq \frac{\lambda^{m-1}}{1 - \lambda} d(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1). \end{aligned}$$

Logo, dado $\epsilon > 0$ se $K^* \in \mathbb{N}$ é tal que

$$\frac{\lambda^{K^*-1}}{1-\lambda} d(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) < \epsilon,$$

então $d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m) < \epsilon$ para todo $m \geq K^*$, $k \geq K^*$. Portanto a sequência é de Cauchy e, como o espaço é completo, é convergente □

Em várias apliações importantes é necessário achar um *ponto fixos*, i.e., uma solução do tipo $\mathbf{x} = T(\mathbf{x})$, onde $T : M \to M$ é dada. É natural perguntar-se se dado algum ponto inicial $\mathbf{x}_0 \in M$, a sequência gerada por

$$\mathbf{x}_k = T(\mathbf{x}_{k-1}), \qquad k \in \mathbb{N},$$

converge para um ponto fixo. Esta forma de determinar pontos fixos é denominada *método das aproximações sucessivas.*

No caso de T ser uma "contração", $(\mathbf{x}_k)$ será contrátil, e portanto convergente. É exatamente isto que mostraremos a seguir.

DEFINIÇÃO 1.3.17. *Seja (M, d) um espaço métrico. Dizemos que uma função $T : M \to M$ é uma* contração *se existir $\lambda < 1$ tal que*

$$d(T(\mathbf{y}), T(\mathbf{x})) \leq \lambda d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in M$.

Temos então o seguinte resultado.

TEOREMA 1.3.18. *Seja (M, d) um espaço métrico completo, e $T : M \to M$ uma contração. Então T possui um e somente um ponto fixo em M. Além disto, para qualquer $\mathbf{x}_0 \in X$, a sequência definida por*

$$\mathbf{x}_k = T(\mathbf{x}_{k-1}), \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{1.3.5}$$

converge para o ponto fixo de T em M.

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que exista $\lambda < 1$ tal que

$$d(T(\mathbf{y}), T(\mathbf{x})) \leq \lambda d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in M$.

Mostraremos primeiro a unicidade. Dados dois pontos fixos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de T em M, temos que

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(T(\mathbf{x}), T(\mathbf{y})) \leq \lambda d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \implies (1-\lambda) d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0,$$

o que só é possível se $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, e portanto o ponto fixo, se existir, é único.

Note que $(\mathbf{x}_k)$ é contrátil pois

$$d(\mathbf{x}_{k+2}, \mathbf{x}_{k+1}) = d(T(\mathbf{x}_{k+1}), T(\mathbf{x}_k)) \leq \lambda d(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k).$$

Logo $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge, e seja $\mathbf{x}^* \in M$ seu limite. Para mostrar que $\mathbf{x}^*$ é ponto fixo de T, note que para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}^*, T(\mathbf{x}^*)) \leq d(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}_k) + d(\mathbf{x}_k, T(\mathbf{x}^*)) = d(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}_k) + d(T(\mathbf{x}_{k-1}), T(\mathbf{x}^*)) \\ \leq d(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}_k) + \lambda d(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}^*). \end{aligned}$$

Tomando o limite $k \to \infty$ dos dois lados da desigualdade obtemos que $d(\mathbf{x}^*, T(\mathbf{x}^*)) = 0$, e portanto $\mathbf{x}^* = T(\mathbf{x}^*)$. $\square$

1.4. Conjuntos Compactos

Um importante conceito em análise é o de *conjuntos compactos*. Em espaços de dimensão finita, estes conjuntos são na verdade conjuntos fechados limitados [**6**]. Entretanto, em dimensão infinita, nem todo fechado limitado é compacto, e algumas propriedades que continuam valendo para compactos, deixam de valer para fechados limitados.

Antes de definirmos compactos, precisamos introduzir a noção de cobertura aberta. Abaixo, e no restante do texto, iremos denotar por Λ um conjunto de índices, que pode ser ou não enumerável.

DEFINIÇÃO 1.4.1. *Seja M espaço métrico, $X \subseteq M$, e Λ um conjunto de índices. Chamamos $\mathcal{G} = \{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de* cobertura aberta *de X se para todo $\lambda \in \Lambda$ temos G_λ conjunto aberto, e $X \subseteq \cup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$. Dizemos que a cobertura é finita se Λ é finito.*

DEFINIÇÃO 1.4.2. *Dizemos que um subconjunto K de um espaço métrico M é compacto se toda cobertura aberta de K possuir uma subcobertura finita de K, i.e., se $\mathcal{G} = \{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é cobertura aberta de K, então existem $G_{\lambda_1}, G_{\lambda_2}, \dots, G_{\lambda_J} \in \mathcal{G}$ tais que $K \subseteq \cup_{j=1}^J G_{\lambda_j}$.*

Enquanto as noções de abertos e fechados são relativas a outros conjuntos, a compacidade é uma propriedade *intrínseca* ao conjunto em questão. Por isto é possível se referir a conjuntos compactos ou espaços métricos compactos sem se referir a nenhum espaço que o contenha. Esta propriedade resulta do resultado a seguir [**9**].

LEMA 1.4.3. Seja $K \subset M' \subset M$, onde M' e M são espaços métricos. Então K é compacto em relação a M se e somente se é compacto em relação a M'.

DEMONSTRAÇÃO. ($\Rightarrow$) Suponha K compacto em relação a M. Seja $\mathcal{G}' = \{G'_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ cobertura aberta de K onde G'_λ são abertos em M'. Então existem G_λ abertos em M tais que $G'_\lambda = G_\lambda \cap M'$. Mas então

$$K \subseteq \cup_{\lambda\in\Lambda}(G_\lambda \cap M') \subseteq \cup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$$

e portanto $K \subset G_{\lambda_1} \cup \cdots \cup G_{\lambda_J}$ para finitos $\lambda_1, \dots, \lambda_J \in \Lambda$, pois K é compacto. Como $K \subseteq M'$,

$$K \subset (G_{\lambda_1} \cup \cdots \cup G_{\lambda_J}) \cap M' = (G_{\lambda_1} \cap M') \cup \cdots \cup (G_{\lambda_J} \cap M') = G'_{\lambda_1} \cup \cdots \cup G'_{\lambda_J}.$$

($\Leftarrow$) Suponha K compacto em relação a M', e $\mathcal{G} = \{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ cobertura aberta de K onde G_λ são abertos em M. Então $G'_\lambda = G_\lambda \cap M'$ são abertos em M' e

$$K \subseteq \cup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda \implies K \subseteq \cup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda \cap M' \subseteq \cup_{\lambda\in\Lambda} G'_\lambda.$$

Mas por então, por hipótese, existem $\lambda_1, \dots, \lambda_J \in \Lambda$ tais que

$$K \subseteq G'_{\lambda_1} \cup \cdots \cup G'_{\lambda_J} \subseteq G_{\lambda_1} \cup \cdots \cup G_{\lambda_J}.$$

$\square$

Note que para mostrar que um determinado conjunto é compacto precisamos provar que para *toda* cobertura aberta existe subcobertura finita. Para mostrar que não é compacto basta achar uma cobertura que não possui subcobertura finita.

Exemplo 1.27. Seja $K = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_J\}$ conjunto finito em M e seja $\mathcal{G} = \{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ coleção de conjuntos abertos em M tais que $K \subseteq \cup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$, i.e., $\mathcal{G}$ é uma cobertura aberta de K. Para $j = 1, \dots, J$, seja $G_j \in \mathcal{G}$ tal que $\mathbf{x}_j \in G_j$ (tal conjunto sempre existe pois $\mathcal{G}$ é cobertura de K). Então $G_1, \dots, G_J$ geram uma subcobertura finita de K. Logo K é compacto, e concluímos que todo conjunto finito é compacto.

Teorema 1.4.4. *Seja M um espaço métrico e $K \subseteq M$ compacto. Então K é fechado e limitado.*

Demonstração. Suponha $K \subseteq M$ conjunto compacto, e seja $\mathbf{x} \in K$. Então $K \subseteq \cup_{m=1}^\infty B_m(\mathbf{x})$. Como K é compacto, a cobertura acima possui subcobertura finita e portanto existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq B_M(\mathbf{x})$. Logo K é limitado, pois dados $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in K$ segue-se que $d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \le d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) < 2M$.

Para mostrar que é também fechado, seja $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(K)$ e $G_i = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) > 1/i\}$ para $i \in \mathbb{N}$. Logo G_i é aberto e $M\backslash\{\mathbf{x}\} = \cup_{i=1}^\infty G_i$. Mas como $\mathbf{x} \notin K$, então $K \subseteq \cup_{i=1}^\infty G_i$. Usando agora que K é compacto, extraimos uma subcobertura finita e temos $K \subseteq \cup_{i=1}^{N^*} G_i = G_{N^*}$ para algum $N^* \in \mathbb{N}$. Portanto $K \cap B_{1/N^*}(\mathbf{x}) = \emptyset$ e concluímos que $B_{1/N^*}(\mathbf{x}) \subseteq \mathcal{C}(K)$. Logo $\mathcal{C}(K)$ é aberto e K é fechado. □

Lema 1.4.5. Se K é compacto e $F \subseteq K$ é fechado, então F é compacto. Além disto, a interseção arbitrária de compactos é compacta e a união finita de compactos é compacta.

Definição 1.4.6. *Dizemos que um conjunto A é* totalmente limitado *se dado $r \in \mathbb{R}$, existirem índice $J \in \mathbb{N}$ e pontos $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_J \in A$ tais que $A \subset \cup_{j=1\dots J} B_r(\mathbf{x}_j)$. Em particular, um conjunto no $\mathbb{R}^n$ é limitado se e somente se é totalmente limitado.*

O resultado é de grande importância, e as demonstrações são tiradas de [**7**].

Teorema 1.4.7. *Seja K subconjunto dum espaço métrico M. Então as afirmativas abaixo são equivalentes:*

(1) K é compacto
(2) K é compacto acumulativo*, i.e., todo subconjunto infinito de K tem ponto de acumulação*
(3) K é sequencialmente compacto*, i.e., toda sequência tem subsequência convergente*
(4) K é completo e totalmente limitado

Demonstração. (1) ⇒ (2). Seja $X \subset K$ infinito e tal que $X' = \emptyset$. Logo, $X = X$, isto é, X é fechado de K, logo compacto pelo Lema 1.4.5. Como X é discreto e compacto, ele deve ser finito. Caso contrário, encontraríamos uma cobertura aberta de X que não possui subcobertura finita.

(2) ⇒ (3). Seja $(\mathbf{x}_n)$ uma sequência em K. Se $\{\mathbf{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$ é finito, existe uma subsequência constante de $(\mathbf{x}_n)$ e, portanto, convergente. Caso contrário, este conjunto possui um ponto de acumulação $\mathbf{x} \in K$. Logo, $(\mathbf{x}_n)$ possui uma subsequência convergente.

(3) ⇒ (4). Dado uma sequência de Cauchy em K, ela possui, por hipótese, subsequência convergente, e portanto converge. Logo K é completo.

Para mostrar que K é totalmente limitado, seja $\epsilon > 0$. Tome $\mathbf{x}_1 \in K$. Se $K = B_\epsilon(\mathbf{x}_1)$, o resultado está provado. Caso contrário, existe $x_2 \in M\backslash B_\epsilon(\mathbf{x}_1)$. Se $K = B_\epsilon(\mathbf{x}_1) \cup B_\epsilon(\mathbf{x}_2)$, então o resultado está provado. Prosseguindo assim, ou chegamos a um $n \in \mathbb{N}$ tal que $M = B_\epsilon(\mathbf{x}_1) \cup B_\epsilon(\mathbf{x}_2) \dots B_\epsilon(\mathbf{x}_n)$ ou então obtemos uma sequência $(\mathbf{x}_n)$ tal que $d(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_n) \ge \epsilon$, para todo $n \neq m$. Neste último caso, nenhuma subsequência de $(\mathbf{x}_n)$ seria de Cauchy, e muito menos convergente, contrariando (3). Portanto, M é totalmente limitado.

(4) $\Rightarrow$ (1). Suponha, por absurdo, que exista uma cobertura aberta $\mathcal{G} = \{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de K que não possua subcobertura finita. Por hipótese, é possível escrever K como a união finita de subconjuntos fechados de diâmetro menor que 1. Pelo menos um deles, chamado de X_1 , está contido em $\cup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ e não admite subcobertura finita. Como X_1 é totalmente limitado, ele pode ser expresso como a união finita de subconjuntos fechados de diâmetro menor que $1/2$. Ao menos um desses conjuntos, chamado X_2, não pode ser coberto por um número finito de elementos de $\mathcal{G}$. Prosseguindo dessa maneira, obtemos uma sequência $X_1 \supseteq X_2 \cdots \supseteq X_n \ldots$ de subconjuntos fechados de M, tais que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{diam}(X_n) < 1/n$ e $X_n \neq \emptyset$ não está contido numa reunião finita de abertos de $\mathcal{G}$. Logo, existe $\mathbf{a} \in K$ tal que $\{\mathbf{a}\} = \cap_{n\in\mathbb{N}} X_n$. De fato, escolha $\mathbf{x}_n \in X_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. É fácil ver que $(\mathbf{x}_n)$ é de Cauchy que deve convergir para algum ponto $\mathbf{a} \in K$. Mais ainda, $\mathbf{a}$ é o único ponto de $\cap_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Para algum $\lambda \in \Lambda$, tem-se que $\mathbf{a} \in G_\lambda$. Sendo G_λ aberto, deve-se ter $B_{1/n}(\mathbf{a}) \subseteq G_\lambda$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathbf{a} \in X_n$, e $\operatorname{diam}(X_n) < 1/n$, concluímos que $X_n \subset B_{1/n}(\mathbf{a})$, donde $X_n \subset G_\lambda$, o que é uma contradição. $\square$

Terminamos esta seção apresentando um resultado clássico em análise. Antes, uma definição. Dizemos que um espaço métrico é *separável* se ele contém um subconjunto enumerável denso. Exemplos de espaço separáveis são os reais $\mathbb{R}$, e o $\mathbb{R}^n$, pois os racionais $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}^n$ são enumeráveis e densos. É fácil ver também que qualquer subconjunto de um espaço separável é por si só separável. O resultado abaixo apresenta uma classe enorme de conjuntos separáveis.

TEOREMA 1.4.8. *Todo espaço métrico compacto é separável.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja K compacto. Logo K é totalmente limitado. Portanto, dado $n \in \mathbb{N}$, existe $X_n = \{\mathbf{x}_{n,1}, \ldots, \mathbf{x}_{n,J_n}\} \subset K$ tal que $K \subset \cup_{j=1}^{J_n} B_{1/n}(\mathbf{x}_{n,j})$. Logo X_n é enumerável, pois é finito, e $X = \cup_{n=1}^{+\infty} X_n$ também o é. Logo X é denso em K, pois dado $\epsilon > 0$ e $\mathbf{x} \in K$, basta tomar $N > 1/\epsilon$ e $\mathbf{x}_j \in X_N$ tal que $\mathbf{x} \in B_{1/N}(\mathbf{x}_j)$. $\square$

1.5. Conjuntos conexos

Seção tirada de [**7**, **10**]

Uma cisão de um espaço métrico M é uma decomposição $M = A \cup B$, onde A e B são abertos distintos de M. Logo, $A = M \backslash B$ e $B = M \backslash A$ são fechados.

EXEMPLO 1.28. Considere os seguintes exemplos:

(1) Os conjuntos $A = (-\infty, 0)$ e $B = (0, +\infty)$ formam uma cisão de $M = \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Note que A e B são abertos em M, e portanto também são fechados em M.
(2) Todo conjunto e seu complementar formam uma cisão de um espaço discreto.
(3) Dado α um número irracional, $A = \{x \in \mathbb{Q} : x < \alpha\}$ e $B = x \in \mathbb{Q} : x > \alpha$ formam uma cisão de $M = \mathbb{Q}$.

DEFINIÇÃO 1.5.1. *Dizemos que uma cisão é trivial se $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$. Assim, um espaço métrico M é* conexo *se toda cisão de M é trivial. Caso contrário, dizemos que M é desconexo. Um subconjunto $X \subset M$ é conexo se o subespaço X é conexo.*

TEOREMA 1.5.2. *Seja M um espaço métrico. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) M é conexo
b) Os únicos subconjuntos de M que são ao mesmo tempo abertos e fechados em M são M e $\emptyset$
c) Se $X \subset M$ tem fronteira vazia, então $X = M$ ou $X = \emptyset$

DEMONSTRAÇÃO. Para ver que $(b) \implies (a)$, note que se $M = A \cup B$ é uma cisão, então A e B são abertos e fechados. Logo, por hipótese, A e B são iguais a M e/ou $\emptyset$, e a cisão é trivial.

Reciprocamente, se $A \subset M$ é aberto e fechado, então $M = A \cup (M \backslash A)$ é uma cisão de M. Logo, $(a) \iff (b)$.

Para mostrar que $(b) \implies (c)$, considere $X \subset M$ com fronteira vazia. Mas $X \cap \partial X = \emptyset$ significa que X é aberto, enquanto $\partial X \subset X$ implica em X é fechado. Usando (b), temos que (c) vale.

A recíproca também vale pois se X é aberto e fechado, então $X \cap \partial X = \emptyset$ (por ser aberto), e como $\partial X \subset X$ (por ser fechado) tem-se que $\partial X = \emptyset$. Logo, por hipótese, $X = M$ ou $X = \emptyset$, e portanto (c) segue. $\square$

EXEMPLO 1.29. A reta $\mathbb{R}$ é conexa. De fato, suponhamos, por absurdo, que exista uma cisão não-trivial $\mathbb{R} = A \cup B$. Tomemos $a \in A$ e $b \in B$, digamos que $a < b$. Seja $X = \{x \in A : x < b\}$. Temos que X é não vazio e limitado superiormente. Logo, existe $c = \sup X$. É claro que $c \leq b$ e, pela definição de sup, para todo $\epsilon > 0$ existe $x \in X \subset A$ tal que $c - \epsilon < x \leq c$. Logo $c \in \overline{A} = A$. Como $b \in B$, concluímos que $c \neq b$, donde $c < b$. Sendo A aberto existe $\epsilon > 0$ tal que $c + \epsilon < b$ e $(c - \epsilon, c + \epsilon) \subset A$. Então, todos os pontos do intervalo $(c, c + \epsilon)$ pertecem a X, o que contradiz $c = \sup X$.

1.6. Exercícios

EXERCÍCIO 1.1. Mostre que a métrica zero-um define uma distância.

EXERCÍCIO 1.2. Mostre que (1.1.3) de fato define uma norma se $p \geq 1$ e que *não* define uma norma para $p < 1$.

EXERCÍCIO 1.3. Mostre que $\lim_{p \to \infty} \|\mathbf{x}\|_p = \|\mathbf{x}\|_\infty$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

EXERCÍCIO 1.4. Considere o Exemplo 1.8, e as normas lá definidas. Construa exemplo tal que dado $\epsilon > 0$ existe $f \in \mathcal{F}_\infty \cap \mathcal{F}_1$ com $\|f\|_\infty < \epsilon$ e $\|f\|_1 = 1$ e existe $g \in \mathcal{F}_\infty \cap \mathcal{F}_1$ tal que $\|g\|_\infty = 1$ e $\|g\|_1 < \epsilon$.

EXERCÍCIO 1.5. Mostre que (1.1.2) define métricas em $M \times M'$.

EXERCÍCIO 1.6. Mostre que l^p é um espaço normado.

EXERCÍCIO 1.7. Seja V um espaço vetorial normado munido de duas normas equivalentes, como em (1.2.1). Mostre que se um conjunto é aberto em relação a uma das normas, ele é aberto em relação à outra também.

EXERCÍCIO 1.8. Mostre que todo espaço métrico M é aberto nele mesmo e fechado nele mesmo.

EXERCÍCIO 1.9. Mostre que se V é um espaço vetorial, a métrica discreta dada por (1.1.1) não define uma norma em V.

Exercício 1.10. Mostre que a série em (1.1.5) converge sempre que $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $(y_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^2$.

Exercício 1.11. Seja (X, d) espaço métrico. Definina os conjuntos abertos como na definição 1.2.1. Mostre que a coleção destes conjuntos abertos é uma topologia. Caracterize a topogia definida pela métrica (1.1.1): quais são os conjuntos abertos?

Exercício 1.12. Dizemos que um espaço X é de *Hausdorff* se dados dois pontos x, $y \in X$, existem abertos disjuntos A_x, A_y tal que $x \in A_x$, $y \in A_y$. Um espaço de Hausdorff é um espaço que "separa pontos". Mostre que todo espaço métrico é de Hausdorff.

Exercício 1.13. Mostre (1.2.2).

Exercício 1.14. Construa um exemplo de um espaço métrico (M, d) onde, dado $r > 0$,

$$\overline{B_r(\mathbf{x})} \neq \{\mathbf{y} \in M : d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq r\},$$

i.e., o fecho da bola aberta de raios r difere da bola fechada de raio r.

Exercício 1.15. Considere o exemplo 1.5, e uma sequência definida por $\mathbf{z}_j = (x_j, x'_j) \in M \times M'$. Mostre que $\mathbf{z}_j \to \mathbf{z} = (x, x')$ em $M \times M'$ se e somente se $x_j \to x$ em M e $x'_j \to x'$ em M'.

Exercício 1.16 ([**1**]). Decida se as propriedades abaixo são equivalentes à definição de sequências de Cauchy:

i) $\lim_{k\to\infty} \sup\{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k) : i \geq k\} = 0$.
ii) para todo $\epsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$i \geq k \implies d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k) < \epsilon.$$

Exercício 1.17. Seja $(\mathbf{x}_k)$ sequência de Cauchy contendo uma subsequência convergente para $\mathbf{x}$. Mostre que $(\mathbf{x}_k)$ converge para $\mathbf{x}$.

Exercício 1.18. Dizemos que uma sequência $(\mathbf{x}_j)$ tem *variação limitada* se a sequência (v_k) de reais definida por

$$v_k = \sum_{i=1}^{k} d(\mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{x}_i)$$

converge. Mostre que toda sequência num espaço métrico completo, e de variação limitada, é convergente.

Exercício 1.19. Demonstrar o Lema 1.3.13.

Exercício 1.20. Demonstrar o Lema 1.3.14.

Exercício 1.21. Seja M espaço métrico e $S \subset M$. Mostre que $\mathbf{x}$ é ponto de acumulação de S se e somente se existe sequência de pontos $(\mathbf{x}_j)$ em $S\backslash\{\mathbf{x}\}$ que converge para $\mathbf{x}$.

Exercício 1.22. Seja M espaço métrico e $A \subset M$. Mostre que um ponto $\mathbf{x}^*$ é aderente a A se e somente se existe sequência convergente e contida em A, e que tenha $\mathbf{x}^*$ como seu limite. Mostre que o conjunto de pontos aderentes a A é fechado.

Exercício 1.23. Mostre que um ponto $\mathbf{x}^*$ é aderente a um conjunto $X \subset M$ se e somente se existe sequência convergente e contida em X, e que tenha o ponto $\mathbf{x}^*$ como seu limite. Seja $\bar{X}$ o conjunto de pontos aderentes a X. Usando este conceito de aderência, mostre que $\bar{X}$ é fechado.

Exercício 1.24. Mostre que se M é espaço métrico completo, e $X \subset M$ é fechado, então X é completo.

Exercício 1.25. Mostre que um espaço métrico é completo se e somente se a interseção de uma sequência encaixante de subconjuntos fechados não vazios com diâmetros tendendo a zero é não vazia. Além disto, se o espaço for de fato completo, a interseção se reduz a somente um ponto.

Exercício 1.26. Mostre que um espaço métrico é completo se e somente se a interseção de uma sequência de bolas fechadas encaixantes com raios tendendo a zero é não vazia. Além disto, se o espaço for de fato completo, a interseção se reduz a somente um ponto.

Exercício 1.27. Seja M espaço métrico, $C \subseteq M$ não-vazio, $\mathbf{y} \in M$, e $A = \{d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) : \mathbf{x} \in C\}$. Mostre que existe o ínfimo de A, e que

$$\inf A = 0 \iff \text{existe sequência em } C \text{ convergente para } \mathbf{y}.$$

Exercício 1.28. Mostre que $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ é completo.

Exercício 1.29. Mostre que $(l^2, \|\cdot\|_2)$ é completo.

Exercício 1.30. Mostre que $\|\cdot\|_\infty$, ver Exemplo 1.8 no espaço $\mathcal{F}_\infty(X)$, satisfaz as propriedades de norma.

Exercício 1.31. Seja a sequência de funções (f_i), onde $f_i(x) = \sin(ix)/(1+ix)$. Mostre que (f_i) converge pontualmente para todo $x \in [0, +\infty)$, uniformemente em $[a, +\infty)$ para $a > 0$, mas não converge uniformemente em $[0, +\infty)$.

Exercício 1.32. Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ e $f_i : X \to \mathbb{R}^n$ sejam funções uniformemente contínuas. Mostre que se (f_i) converge uniformemente para f, então f é uniformemente contínua.

Exercício 1.33. Ache exemplo de sequência (f_i) de funções que convirja uniformemente em $(0, 1]$, mas não em $[0, 1]$.

Exercício 1.34. Mostre que convergência uniforme implica em convergência pontual, mas que a volta não vale.

Exercício 1.35. Suponha que $K \subset \mathbb{R}^m$ seja compacto, e defina as sequências de funções contínuas dadas por $f_j : K \to \mathbb{R}^n$ e $g_j : K \to \mathbb{R}^n$. Suponha que (f_j) convirja uniformemente para $f : K \to \mathbb{R}^n$ e (g_j) convirja uniformemente para $g : K \to \mathbb{R}^n$. Mostre que $(f_j g_j)$ converge uniformemente para fg. O que acontece se trocarmos K por um conjunto aberto qualquer? Mostre que o resultado continua válido ou apresente um contra-exemplo.

Exercício 1.36. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ contínua, e (f_n) sequência de funções contínuas de $[0, 1]$ em $\mathbb{R}$. Prove ou apresente contra-exemplo para a seguinte afirmação:

Se (f_n) converge uniformemente para f em $(0, 1]$, então (f_n) converge uniformemente para f em $[0, 1]$.

Exercício 1.37. Seja K conjunto compacto, $f : K \to \mathbb{R}$ contínua, e (f_n) sequência de funções contínuas de K em $\mathbb{R}$. Prove ou apresente contra-exemplo para a seguinte afirmação:

Se (f_n) converge pontualmente para f em K, então (f_n) converge uniformemente para f em K.

Exercício 1.38. Seja $(\mathbf{x}_k)$ sequência num espaço métrico, convergente para $\mathbf{x}$. Mostre que $\{\mathbf{x}_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbf{x}\}$ é compacto.

Exercício 1.39. Demonstre o Lema 1.4.5.

Exercício 1.40. Seja $(\mathbf{x}_k)$ sequência num compacto K, e tal que toda subsequência convergente converge para $\mathbf{x} \in K$. Mostre que $(\mathbf{x}_k)$ converge para $\mathbf{x}$. O que vale se muda se trocarmos "compacto" por "espaço métrico"?

Exercício 1.41. Seja M espaço métrico, $F \subset M$ um compacto não vazio, e seja $\mathbf{y} \notin F$. Mostre que existe $\mathbf{x}^* \in F$ tal que $d(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = \inf\{d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x} \in F\}$. E se F for apenas fechado em M?

Exercício 1.42. Sejam K_1 e K_2 dois conjuntos compactos, e $A = \{d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) : \mathbf{x}_1 \in K_1,\ \mathbf{x}_2 \in K_2\}$. Mostre que A é compacto.

Exercício 1.43. Diga se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas, provando suas afirmações. Em todos os casos, K_1 e K_2 são subconjuntos de um espaço métrico M, e $A = \{d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) : \mathbf{x}_1 \in K_1,\ \mathbf{x}_2 \in K_2\}$.

(1) K_1 e K_2 fechados implica em A compacto.
(2) K_1 e K_2 fechados implica em A fechado.
(3) K_1 compacto e K_2 fechado implica em A fechado.

Exercício 1.44. Considere a coleção $\mathcal{F} = \{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de subconjuntos dum espaço métrico M, onde Λ é um conjunto de índices. Diz-se que $\mathcal{F}$ tem a *propriedade da interseção finita* se toda subcoleção finita de $\mathcal{F}$ tem interseção não nula. Mostre que as propriedades abaixo são equivalentes:

(1) Se $\mathcal{F}$ tem a propriedade da interseção finita então $\cap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$
(2) M é compacto.

Exercício 1.45 (Teorema da interseção de Cantor). Suponha que $\{K_j\}$ seja uma coleção de conjuntos não vazios, compactos, com $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \dots$. Mostre (sem usar o Exercício 1.46) que $\cap_{j=1}^{\infty} K_j$ é compacto e não vazio.

Exercício 1.46. Seja $\mathcal{G} = \{K_i : i \in \mathbb{N}\}$ uma coleção de conjuntos compactos. Suponha que $\mathcal{G}$ tenha a propriedade da interseção finita, i.e.,

$$K_{i_1} \cap K_{i_2} \cap \dots \cap K_{i_l} \neq \emptyset \quad \text{para quaisquer } i_1, i_2, \dots i_l \in \mathbb{N}.$$

Mostre que $\cap_{i=1}^{\infty} K_i \neq \emptyset$.

Exercício 1.47. Seja X espaço topológico completo e $F \subset X$ fechado em X. Mostre que F é completo.

Exercício 1.48 ([**1**]). Um espaço vetorial normado é de *Banach* se for completo. Seja c_0 o espaço das sequências em $\mathbb{R}$ que convergem para 0, e $\|(x_k)_{k \in \mathbb{N}}\|_{c_0} = \sup\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$. Mostre que c_0 é de Banach.

CAPíTULO 2

Continuidade e Funções Contínuas

[1] Sejam (M, d) e (M', d') dois espaços métricos. Uma função $f : M \to M'$ é contínua em $\mathbf{x} \in M$, se para toda vizinhança aberta V de $f(\mathbf{x})$ existir vizinhança aberta U de $\mathbf{x}$ tal que

$$\mathbf{y} \in U \implies f(\mathbf{y}) \in V.$$

Ver Figura 1. Finalmente, dizemos que f é contínua em $\hat{M} \subseteq M$ se f for contínua em todos os pontos de $\hat{M}$.

Dividimos o estudo de funções contínuas analisando primeiro propriedades locais, seguido das propriedades globais. A menos que seja explicitamente indicado, neste capítulo utilizaremos a notação acima.

2.1. Propriedades locais

Começamos observando que a *função f é contínua em todo ponto $\mathbf{x} \in M$ que não seja ponto de acumulação.* De fato, se $\mathbf{x}$ não é ponto de acumulação, existe vizinhança aberta U de $\mathbf{x}$ tal que $U = \{\mathbf{x}\}$. Logo para todo vizinhança aberta V de $f(\mathbf{x})$, temos que

$$\mathbf{y} \in U \implies \mathbf{y} = \mathbf{x} \implies f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) \in V$$

Logo f é necessariamente contínua em $\mathbf{x}$.

Abaixo descrevemos outras formas de checar a continuidade de uma função num ponto.

Lema 2.1.1. Seja $f : M \to M'$, e $\mathbf{x} \in M$. Então as afirmativas abaixo são equivalentes.

[1] Última Atualização: 11/05/2018

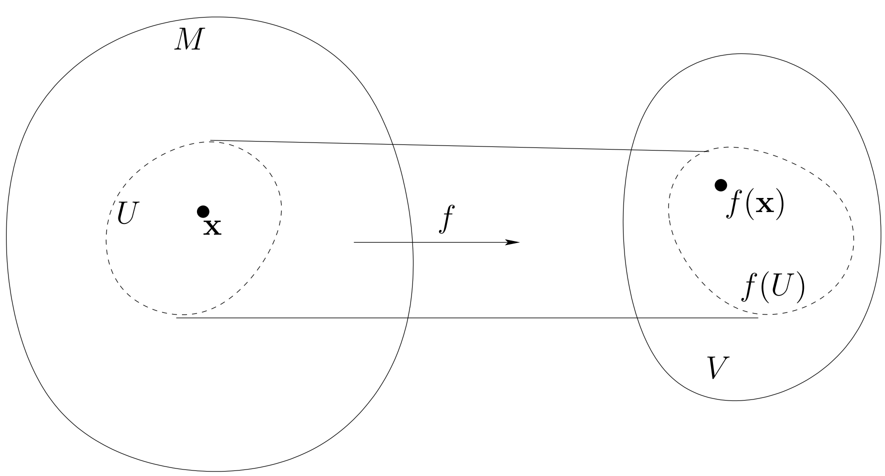

Figura 1. Continuidade de $f(\mathbf{x})$.

(1) f é contínua em $\mathbf{x}$.
(2) Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x}) \implies f(\mathbf{y}) \in B_\epsilon(f(\mathbf{x})).$$

(3) Se $(\mathbf{x}_k)$ é sequência em M e $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$, então $\lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}_k) = f(\mathbf{x})$.

Outro resultado importante é o seguinte *critério de descontinuidade:* f não é contínua em $\mathbf{x}$ se e somente se existe sequência $(\mathbf{x}_k)$ em M convergindo para $\mathbf{x}$ mas $\big(f(\mathbf{x}_k)\big)$ não convergindo para $f(\mathbf{x})$.

Uma noção que pode ser útil em algumas ocasiões é a de *limites de funções*. Se $\mathbf{x}$ for ponto de acumulação de M, dizemos que $\mathbf{p}$ é o limite de f em $\mathbf{x}$ se para toda vizinhança aberta V de $\mathbf{p}$ existir vizinhança aberta U de $\mathbf{x}$ tal que

$$\mathbf{y} \in U, \quad \mathbf{y} \neq \mathbf{x} \implies f(\mathbf{y}) \in V.$$

Neste caso, escrevemos $\mathbf{p} = \lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{x}} f(\mathbf{y})$, e dizemos que f converge para $\mathbf{p}$ no ponto $\mathbf{x}$. Uma observação a respeito da definição acima é que só a utilizamos para pontos de acumulação do domínio. Note também que a noção de limite em $\mathbf{x}$ independe do valor de f em $\mathbf{x}$. Na verdade, f não precisa nem estar definida neste ponto.

As seguintes afirmativas são equivalentes:

(1) $\mathbf{p} = \lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{x}} f(\mathbf{y})$
(2) Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x})\backslash\{\mathbf{x}\} \implies f(\mathbf{y}) \in B_\epsilon(\mathbf{p}).$$

(3) Para toda sequência $(\mathbf{x}_k)$ em $M\backslash\{\mathbf{x}\}$, tem-se

$$\mathbf{x}_k \to \mathbf{x} \implies f(\mathbf{x}_k) \to \mathbf{p}.$$

Observação. Note algumas diferenças na definição de limite de função e continuidade num ponto $\mathbf{x}$:

(1) Para definir limite, a função não precisa estar definida em $\mathbf{x}$, e mesmo que esteja, o valor não tem importância. Mas faz parte da definição que $\mathbf{x}$ seja ponto de acumulação do domínio da função.
(2) Na definição de continuidade, a função tem que estar definida em $\mathbf{x}$, mas este ponto não necessariamente é de acumulação.

Se $\mathbf{x} \in M$ for ponto de acumulação de M, então

$$f \text{ é contínua em } \mathbf{x} \iff f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{x}} f(\mathbf{y}).$$

Exemplo 2.1. Seja M espaço métrico completo, e $f : M \to M'$ contínua em M, e seja $(\mathbf{x}_k)$ sequência de Cauchy em M. Então $\big(f(\mathbf{x}_k)\big)$ é sequência de Cauchy em M'.

Realmente, como $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy e M é completo, então converge para algum $\mathbf{x} \in M$. Posto que f é contínua em M, e portanto em $\mathbf{x}$, então $f(\mathbf{x}_k)$ converge para $f(\mathbf{x})$. Logo, $f(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente. Como toda sequência convergente é de Cauchy, temos que $(f(\mathbf{x}_k))_{k\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy.

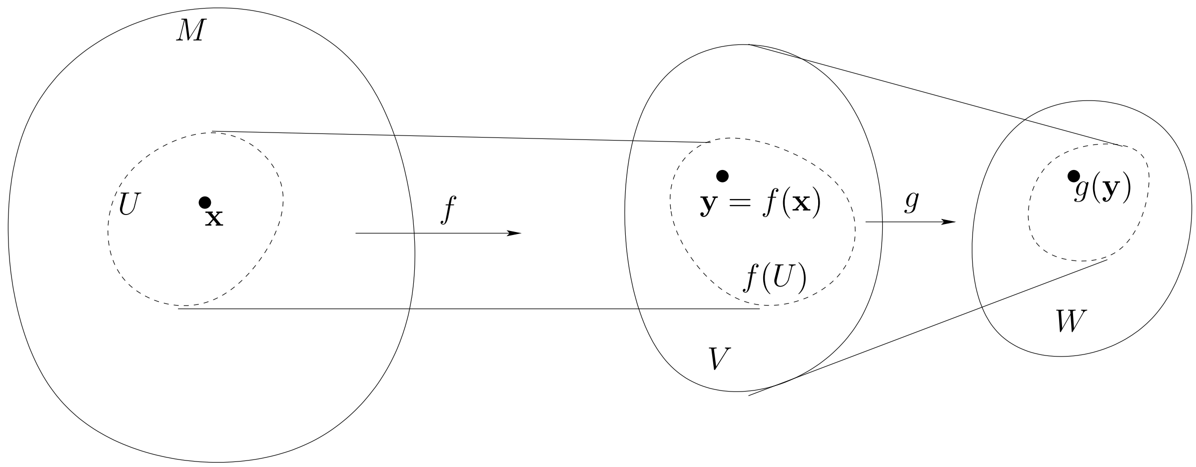

FIGURA 2. Continuidade em $x = 0$.

2.1.1. Composição de funções. O próximo resultado garante que a *composição* de funções contínuas também é contínua. Denotamos a composição de uma função f com g por $g \circ f$, i.e., $g \circ f(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x}))$.

TEOREMA 2.1.2. *Sejam M, M' e M'' espaços métricos, e $f : M \to M'$ e $g : M' \to M''$. Suponha f contínua em $\mathbf{x} \in M$ e g contínua em $f(\mathbf{x}) \in M'$. Então a composição $g \circ f : M \to M''$ é contínua em $\mathbf{x}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ e W vizinhança aberta de $g(\mathbf{y})$. Como g é contínua em $\mathbf{y}$, então existe vizinhança aberta V de $\mathbf{y}$ tal que

$$\mathbf{y}' \in V \implies g(\mathbf{y}') \in W. \tag{2.1.1}$$

Como f é contínua em $\mathbf{x}$, então existe vizinhança aberta U de $\mathbf{x}$ tal que

$$\mathbf{x}' \in U \implies f(\mathbf{x}') \in V.$$

Logo

$$\mathbf{x}' \in U \implies f(\mathbf{x}') \in V \implies f(\mathbf{x}') \in V \implies g(f(\mathbf{x}')) \in W.$$

Na última implicação usamos (2.1.1). Logo $g \circ f$ é contínua em $\mathbf{x}$. □

EXEMPLO 2.2. Seja V espaço vetorial normado com norma $\|\cdot\|_V$. Então a função $g : V \to \mathbb{R}$ dada por $g(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ é contínua em V. Realmente, como

$$|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})| = \big|\, \|\mathbf{x}\|_V - \|\mathbf{y}\|_V \,\big| \le \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_V,$$

se $(\mathbf{x}_n)$ converge para $\mathbf{x}$ então

$$|g(\mathbf{x}_n) - g(\mathbf{x})| \le \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| \implies \lim_{n\to\infty} \big(g(\mathbf{x}_n)\big) = g(\mathbf{x}).$$

Portanto, se f é contínua em $\mathbf{x}$, entao $h(\mathbf{x}) = \|f(\mathbf{x})\|$ também o é, pois $h = g \circ f$ é composição de funções contínuas.

2.2. Propriedades globais

Algumas propriedades de funções contínuas não estão restritas a apenas um ponto, mas sim a todo o domínio. Como exemplos citamos preservação de conexidade e compacidade, e a continuidade uniforme.

Antes de prosseguirmos com as propriedades e suas aplicações, temos o seguinte resultado que caracteriza funções contínuas em todo domínio.

Teorema 2.2.1 (Continuidade Global). *Seja $f : M \to M'$. Então as afirmativas abaixo são equivalentes:*

(1) f é contínua em M
(2) Se V é aberto em M, então $f^{-1}(V)$ é aberto em M'
(3) Se H é fechado em M, então $f^{-1}(H)$ é fechado em M'

Demonstração. (1) ⇒ (2): Seja f contínua em M e V aberto em M'. Seja $\mathbf{x} \in f^{-1}(V)$. Como f é contínua, existe $U_{\mathbf{x}}$ aberto em M contendo $\mathbf{x}$ tal que

$$\mathbf{y} \in U_{\mathbf{x}} \implies f(\mathbf{y}) \in V.$$

Logo $U_{\mathbf{x}} \subseteq f^{-1}(V)$. Seja

$$U = \cup_{\mathbf{x} \in f^{-1}(V)} U_{\mathbf{x}}.$$

Então U é aberto pois é união de abertos, e $U = f^{-1}(V)$.

(2) ⇒ (1): Seja $\mathbf{x} \in M$ e $V \subseteq M'$ vizinhança aberta de $f(\mathbf{x})$. Por hipótese existe um aberto $U \subseteq M$ tal que $U = f^{-1}(V)$. Mas como $f(\mathbf{x}) \in V$, então $\mathbf{x} \in U$ e portanto U é vizinhança aberta de $\mathbf{x}$. Além disto, para todo $\mathbf{y} \in U$ tem-se $f(\mathbf{y}) \in V$.

(2) ⇒ (3): Seja $H \subseteq M'$ fechado. Então como $M' \backslash H$ é aberto, temos por hipótese que existe aberto U tal que $U \cap = f^{-1}(\mathcal{C}(H))$. Seja $F = \mathcal{C}(U)$. Então

$$\mathbf{x} \in F \implies x \notin U \implies f(\mathbf{x}) \notin \mathcal{C}(H) \implies f(\mathbf{x}) \in H \implies F \subseteq f^{-1}(H).$$

Por outro lado,

$$\mathbf{x} \in f^{-1}(H) \implies x \notin f^{-1}(\mathcal{C}(H)) \implies \mathbf{x} \notin U \implies \mathbf{x} \in F \implies f^{-1}(H) \subseteq F.$$

Logo $f^{-1}(H) = F$.

(3) ⇒ (2): semelhante ao caso anterior. □

Observação. O Teorema da Continuidade Global (Teorema 2.2.1) nos diz que uma função entre espaços métricos é contínua se e somente se *imagens inversas de abertos são abertos* e se e somente se *imagens inversas de fechados são fechados*.

Teorema 2.2.2. *Seja M e M' espaços métricos, M conexo, e $f : M \to M'$ contínua. Então $f(M)$ é conexo.*

Demonstração. Seja $f(M) = A \cup B$ uma cisão de $f(M)$. Então $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ é uma cisão de M. Mas então $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$. □

2.2.1. Funções Contínuas em Conjuntos Compactos. Um resultado com várias aplicações vem a seguir e garante que a compacidade é uma propriedade preservada por funções contínuas.

TEOREMA 2.2.3 (Preservação de compacidade). *Se K é compacto, e $f : K \to M'$ é contínua, onde M' é espaço métrico, então $f(K)$ é compacto.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\mathcal{G} = \{G_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ cobertura aberta para $f(K)$, i.e., $f(K) \subseteq \cup_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$. Logo $K \subseteq \cup_{\alpha\in\Lambda} f^{-1}(G_\alpha)$. Por f ser contínua, pelo Teorema 2.2.1, $H_\alpha = f^{-1}(G_\alpha)$ é aberto para todo $\alpha \in \Lambda$. Portanto $\{H_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ é uma cobertura aberta de K. Como K é compacto, então existe $\{H_{\alpha_1}, \dots, H_{\alpha_J}\}$ subcobertura finita. Logo,

$$K \subseteq \cup_{j=1}^J H_{\alpha_j} = \cup_{j=1}^J f^{-1}(G_{\alpha_j}),$$

e então $f(K) \subseteq \cup_{j=1}^J G_{\alpha_j}$. Portanto, achamos uma subcobertura aberta finita para $f(K)$, e concluímos que $f(K)$ é compacto. $\square$

Uma aplicação imediata do resultado acima é a existência de máximos e mínimos de funções contínuas definidas em compactos. Em particular, estas funções são limitadas. O Teorema 2.2.3 garante que imagens de compactos são conjuntos compactos, portanto pelo Teorema 1.4.4, fechados e limitados. O resultado abaixo é consequência imediata deste fato.

TEOREMA 2.2.4. *Seja K compacto, e $f : K \to \mathbb{R}^n$ contínua em K. Então f é limitada em K.*

Outra noção importante é o de máximos e mínimos. Dizemos que $f : M \to \mathbb{R}$ tem valor máximo em M se existe $x^* \in M$ tal que $f(x^*)$ é cota superior de $f(M)$. De forma análoga dizemos que f tem valor mínimo em M se existe $x_* \in M$ tal que $f(x_*)$ é cota inferior de $f(M)$. Chamamos x^* de ponto de valor máximo e x_* de ponto de valor mínimo.

O resultado a seguir mais uma vez é consequência do Teorema 2.2.3.

TEOREMA 2.2.5 (Pontos Extremos). *Seja K compacto e $f : K \to \mathbb{R}$ contínua em K. Então f tem pelo menos um ponto de máximo e um de mínimo em K.*

DEMONSTRAÇÃO. Como K é compacto, então o Teorema 2.2.3 garante que $f(K)$ também é compacto. Logo $f(K)$ é limitado e portanto tem supremo, e $f(K)$ é fechado, e portanto o supremo pertence a $f(K)$. Logo existe $x^* \in K$ tal que $f(x^*) = \sup f(K)$.

Mesmo tipo de argumento assegura que existe ponto de mínimo em K. $\square$

2.3. Funções Uniformemente Contínuas

DEFINIÇÃO 2.3.1. *Sejam M M' espaço métrico com métricas d, d', e $f : M \to M'$. Dizemos que f é* uniformemente contínua em M *se para todo $\epsilon > 0$, existir δ tal que para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in M$ tem-se*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta \implies d'(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) < \epsilon.$$

De forma equivalente, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo $\mathbf{x} \in M$, tem-se

$$\mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x}) \implies f(\mathbf{y}) \in B_\epsilon\big(f(\mathbf{x})\big).$$

Uma interessante propriedade da continuidade uniforme é dada abaixo, e tem aplicação na extensão de funções, ver exercício 2.15. Suponha $f : M \to M'$ uniformemente contínua. Então f preserva sequências de Cauchy.

De fato, seja $\epsilon > 0$. Como f é uniformemente contínua, então existe δ tal que

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) < \delta \Longrightarrow d'(f(\mathbf{x}),f(\mathbf{y})) < \epsilon, \tag{2.3.1}$$

para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in M$. Como $(\mathbf{x}_i)$ é sequência de Cauchy, então existe N_0 tal que se

$$i,j > N_0 \Longrightarrow d(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j) < \delta. \tag{2.3.2}$$

Combinando (2.3.1) e (2.3.2), temos então que

$$i,j > N_0 \Longrightarrow d'(f(\mathbf{x}_i),f(\mathbf{x}_j)) < \epsilon.$$

O resultado abaixo garante que *todas* as funções contínuas em conjuntos compactos são uniformemente contínuas.

Teorema 2.3.2 (Continuidade Uniforme em compactos). *Seja K conjunto compacto, e $f : K \to M'$ contínua em K. Então f é uniformemente contínua em K.*

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. Entao, para todo $\mathbf{x} \in K$, existe $\delta(\mathbf{x}) > 0$ tal que

$$\mathbf{y} \in B_{\delta(\mathbf{x})}(\mathbf{x}) \implies d'(f(\mathbf{y}),f(\mathbf{x})) < \epsilon/2. \tag{2.3.3}$$

Seja a cobertura aberta de K gerada por $\{B_{\frac{1}{2}\delta(\mathbf{x})}(\mathbf{x}) : x \in K\}$. Como K é compacto, então existe $\{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_J\} \subseteq K$ tal que $\{B_{\frac{1}{2}\delta(\mathbf{x}_i)}(\mathbf{x}_i) : i = 1,\dots,J\}$ é uma subcobertura de K. Seja

$$\delta = \frac{1}{2}\min\{\delta(\mathbf{x}_1),\dots,\delta(\mathbf{x}_J)\}.$$

Sejam $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in K$ tais que $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) < \delta$. Então existe índice $j \in \{1,\dots,J\}$ tal que $\mathbf{x} \in B_{\frac{1}{2}\delta(\mathbf{x}_j)}(\mathbf{x}_j)$, i.e., $d(\mathbf{x},\mathbf{x}_j) < \delta(\mathbf{x}_j)/2$. Portanto, usando (2.3.3) temos que $d'(f(\mathbf{x}),f(\mathbf{x}_j)) < \epsilon/2$. Da mesma forma,

$$d(\mathbf{y},\mathbf{x}_j) \le d(\mathbf{y},\mathbf{x}) + d(\mathbf{x},\mathbf{x}_j) < \delta + \frac{1}{2}\delta(\mathbf{x}_j) \le \delta(\mathbf{x}_j),$$

e então $d'(f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_j)) < \epsilon/2$. Concluímos que

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) < \delta \implies d'(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})) \le d'(f(\mathbf{x}),f(\mathbf{x}_j)) + d'(f(\mathbf{x}_j),f(\mathbf{y})) < \epsilon,$$

e portanto f é uniformemente contínua. $\square$

Outra importante situação em que temos continuidade uniforme, mesmo com domínios não compactos, é quando a função é de Lipschitz. Dizemos que f é *de Lipschitz* se existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$d'(f(\mathbf{x}),f(\mathbf{y})) \le Cd(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in M$.

Teorema 2.3.3. *Sejam M, M' espaços métricos, e $f : M \to M'$. Se f é de Lipschitz, então f é uniformemente contínua em Ω.*

Demonstração. Seja $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$d(f(\mathbf{x}),f(\mathbf{y})) \le Cd(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in M$. Dado $\epsilon > 0$, seja $\delta = \epsilon/C$. Então, se $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in M$ e $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) < \delta$, temos que

$$d(f(\mathbf{x}),f(\mathbf{y})) \le Cd(\mathbf{x},\mathbf{y}) \le C\delta = \epsilon.$$

o que mostra que f é uniformemente contínua em M. $\square$

Pode ser que a função seja de Lipschitz apenas numa vizinhança de um ponto. Dizemos então que $f : M \to M'$ é *localmente de Lipschitz* quando para todo $\mathbf{x} \in M$ existe $r > 0$ tal que a restrição $f|_{B_r(\mathbf{x})}$ seja de Lipschitz.

2.4. Homeomorfismo

Sejam M, M' dois espaços métricos, e $f : M \to M'$ uma bijeção. Dizemos que f é um *homeomorfismo* se f e f^{-1} são contínuas. Neste caso dizemos que M e M' são *homeomorfos*.

Note que homeomorfismos "preservam abertos" (e portanto a topologia), e daí sua importância. De fato, $X \subset M$ é aberto se e somente se $f(X) \subset M'$ for aberto pois um conjunto é imagem inversa do outro por f ou por f^{-1}.

Espaços homeomorfos têm então as mesmas características topológicas. Por exemplo temos que se M e M' são homeomorfos, então M é compacto se e somente se M' o for. Mesma afirmativa vale para conexidade.

EXEMPLO 2.3. Não são homeomorfismo, apesar de serem bijeções [**5**, **7**]:

(1) Seja $S^1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\|_2 = 1\}$, e $\phi : [0, 2\pi) \to S^1$ dada por $\phi(t) = (\sin t, \cos t)$.
(2) $f : [-1.0] \cup (1, +\infty) \to [0, +\infty)$ tal que $f(x) = x^2$.

EXEMPLO 2.4. São homeomorfismos (e portanto os espaços correspondentes são homeomorfos) [**7**, **8**]:

(1) A reta $\mathbb{R}$ e $S^1\backslash\{(0, 1)\}$, ou seja o círculo unitário menos o "polo norte". O homeomorfismo é dado pelo "projeção estereográfica": $f : S^1\backslash\{(0, 1)\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x/(1 - y)$.
(2) Bijeções entre espaços discretos.
(3) Se V é espaço vetorial normado então $\phi : V \to B_1(\mathbf{0})$ dada por $\phi(\mathbf{v}) = \mathbf{v}/(1 + \|\mathbf{v}\|)$. A inversa é dada por $\phi^{-1}(\mathbf{w}) = \mathbf{w}/(1 - \|\mathbf{w}\|)$.
(4) O gráfico de uma função contínua entre espaços métricos é homeomorfo ao domínio. Se $f : M \to M'$ é uma função contínua entre espaços métricos, então a aplicação $\phi : M \to G$ dada por $\phi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ é um homeomorfismo, onde $G = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in M\} \subseteq M \times M'$ é o gráfico de f.
(5) Pelo ítem 4, o gráfico da função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sin(1/x)$ é conexo.

2.5. Aplicações

Nesta seção consideramos duas aplicações da teoria previamente vista. A primeira envolve a questão de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais. A segunda aplicação envolve condições de Blackwell para contração.

2.5.1. Existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias. Uma primeira aplicação de resultados previamente vistos é o *Teorema de Picard*, que dá condições de existência e unicidade de soluções para Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Dado $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ considere o problema de achar $\mathbf{x} : [0, T) \to \mathbb{R}^n$ diferenciável e tal que

$$\mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x}(t)), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \tag{2.5.1}$$

onde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é dada. A pergunta natural é se existe um solução para este problema, se é única, e para quais valores de T é possível achar solução.

O resultado abaixo [**7**, **11**] responde a tais perguntas no caso de f ser de Lipschitz e resulta do Teorema do Ponto Fixo 1.3.18.

TEOREMA 2.5.1 (Teorema de Picard). *Considere a EDO* (2.5.1)*, para* $T > 0$ *e* f : $[0, T) \times \mathbb{R}^n$ *função de Lipschitz em relação à segunda variável, i.e.,*

$$\|f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{y})\| \leq C\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R} \textit{ e todo } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Então (2.5.1) *possui uma e somente uma solução* $\mathbf{x} : [0, T) \to \mathbb{R}^n$ *para* $T = 1/C$.

DEMONSTRAÇÃO. Para $T > 0$ fixo, considere o espaço $\mathcal{C}^0_\infty[0, T)$ das funções contínuas e limitadas de $[0, T)$ em $\mathbb{R}^n$, e a aplicação $\Phi : \mathcal{C}^0_\infty[0, T) \to \mathcal{C}^0_\infty[0, T)$ dada por

$$(\Phi\mathbf{x})(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t f(s, \mathbf{x}(s))\, ds.$$

Note que $\mathbf{x}$ resolve (2.5.1) se e somente se é ponto fixo de Φ. Queremos mostrar que Φ é uma contração na norma

$$\|\mathbf{x}\|_{\infty,[0,T)} = \sup\{\|\mathbf{x}(t)\| : t \in [0, T)\}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}\|\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y})\|_{\infty,[0,T)} &\leq \sup_{t\in[0,T)} \left\| \int_0^t f(s, \mathbf{y}(s)) - f(s, \mathbf{y}(s))\, ds \right\| \\ &\leq \int_0^T \|f(s, \mathbf{y}(s)) - f(s, \mathbf{y}(s))\|\, ds \leq C \int_0^T \|\mathbf{y}(s) - \mathbf{y}(s)\|\, ds \leq CT\|\mathbf{y} - \mathbf{y}\|_{\infty,[0,T)}.\end{aligned}$$

Logo, Φ é contração se $T < 1/C$. Logo existe um ponto fixo em $[0, T)$, e ele é único. Concluímos então existência e unicidade de (2.5.1) neste intervalo. □

OBSERVAÇÃO. Note que, sob as condições acima, é sempre possível estender a solução por mais um intervalo de tempo $1/C$. Isto não se aplica entretanto sob hipóteses mais gerais. Por exemplo, para a EDO unidimensional $x' = x$ com $x(0) = x_0 > 0$ tem como solução $x(t) = 1/(x_0^{-1} - t)$, que "explode" em tempo finito. Ou seja, extensões além de $T = x_0^{-1}$ não são possíveis. Ver [**2**, página 12], onde um exemplo de não unicidade também é apresentado.

2.5.2. Condições de Blackwell para contração. Seja $X \subset \mathbb{R}^m$ não vazio, e $\mathcal{F}_\infty(X)$ o espaço das funções reais limitadas. O resultado abaixo fornece condições suficientes para um operador nesse espaço ser contração [**7**]. Usaremos abaixo a seguinte notação: $f \leq g$ quando $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in X$.

TEOREMA 2.5.2. *Seja* $T : \mathcal{F}_\infty(X) \to \mathcal{F}_\infty(X)$ *tal que*

(1) $f \leq g$ *implica em* $T(f) \leq T(g)$ *(monotonicidade)*
(2) existe $\beta \in [0, 1)$ *tal que*

$$T(f + a) - T(f) \leq \beta a$$

para todo $a \geq 0$ *e* $f \in \mathcal{F}_\infty(X)$ *(desconto)*

Então T *é uma* β*-contração (i.e., uma contração com constante* β*).*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $f, g \in \mathcal{F}_\infty(X)$. Então $f-g \leq \|f-g\|_{\infty,X}$, e usando as hipóteses do teorema temos

$$T(f) \leq T(g + \|f-g\|_{\infty,X}) \leq T(g) + \beta\|f-g\|_{\infty,X}.$$

Invertendo os papéis de f e g temos que $T(g) \leq T(f + \|g-f\|_{\infty,X}) \leq T(f) + \beta\|g-f\|_{\infty,X}$, e portanto $\beta\|f-g\|_{\infty,X}$ é cota superior para $|T(f) - T(g)|(\mathbf{x})$. Logo

$$\|f-g\|_{\infty,X} \leq \beta\|f-g\|_{\infty,X}.$$

□

Quando for possível substituir $\mathcal{F}_\infty(X)$ por $\mathcal{C}^0_\infty(X)$, obtemos que o ponto fixo é uma função contínua. Considere o seguinte exemplo.

EXEMPLO 2.5. Seja $X = [0, +\infty)$, e $T : \mathcal{C}^0_\infty(X) \to \mathcal{C}^0_\infty(X)$ dada por

$$(Tv)(k) = \sup_{0 \leq y \leq f(k)} [U(f(k) - y) + \beta v(y)]$$

onde $k \in X$, $\{v, U, f\} \subseteq \mathcal{C}^0_\infty(X)$, $U : X \to X$ e $f : X \to X$. Mostramos a seguir que T satisfaz as condições de Blackwell. A condição (1) é imediata. Para checar a condição (2), note que para $v \in$ e $a > 0$,

$$\begin{aligned}(T(v+a))(k) = &\sup_{0 \leq y \leq f(k)} [U(f(k) - y) + \beta v(y) + \beta a] \\ &= \sup_{0 \leq y \leq f(k)} [U(f(k) - y) + \beta v(y)] + \beta a = (T(v))(k) + \beta a.\end{aligned}$$

Existe portanto ponto fixo de T em $\mathcal{C}^0_\infty(X)$.

2.5.3. Princípio de Otimalidade de Bellman [7]. Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$. Uma *correspondência* entre X e Y é uma função $\Gamma : X \to P(Y)$[2], onde $P(Y)$ é o conjunto das partes de Y, i.e., uma coleção contendo todos os subconjuntos de Y. Ou seja, $\Gamma(\mathbf{x}) \subseteq Y$ para todo $\mathbf{x} \in X$. Supomos também que $\Gamma(\mathbf{x}) \neq \emptyset$ para todo $\mathbf{x} \in X$.

Dado $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, considere o *problema focal*, i.e., achar $h : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$h(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{y} \in \Gamma(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{2.5.2}$$

Se f for limitada superiormente, então h está bem definida. Se $f(\mathbf{x}, \cdot)$ for contínua e $\Gamma(\mathbf{x})$ for compacto, então o sup pode ser substituido por max, e está bem definida também a correspondência

$$G(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \Gamma(\mathbf{x}) : \ f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = h(\mathbf{x})\}. \tag{2.5.3}$$

Definimos agora o conceito de continuidade para correspondências.

DEFINIÇÃO 2.5.3. *Considere a correspondência* $\Gamma : X \to Y$.

- *Dizemos que* Γ *é hemi-contínua inferiormente (hci) em* $\mathbf{x} \in X$ *quando para todo* $\mathbf{y} \in \Gamma(\mathbf{x})$ *e toda sequência* $(\mathbf{x}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ *em* X *convergente para* $\mathbf{x}$, *existe sequência* $(\mathbf{y}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ *em* $\mathbb{R}^n$ *convergente para* $\mathbf{y}$, *e existe* $J \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$j \geq J \implies \mathbf{y}_j \in \Gamma(\mathbf{x}_j).$$

[2] a notação $\Gamma : X \to Y$ também é usada, quando fica claro que Γ é uma correspondência.

- Γ *é hemi-contínua superiormente (hcs) em* $\mathbf{x} \in X$ *quando para toda sequência* $(\mathbf{x}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *em* X *convergente para* $\mathbf{x}$*, e toda sequência* $(\mathbf{y}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *tal que* $\mathbf{y}_j \in \Gamma(\mathbf{x}_j)$ *para todo* $j \in \mathbb{N}$*, existe subsequência de* $(\mathbf{y}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *com limite em* $\Gamma(\mathbf{x})$*.*

Dizemos que Γ *é contínua em* $\mathbf{x} \in X$ *se é hci e hcs em* $\mathbf{x}$*, e que é contínua em* X *se é contínua para todo* $\mathbf{x} \in X$*.*

Exemplo 2.6. Seja $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ e $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ contínua. Então a correspondência $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por $\Gamma(x) = [0, f(x)]$ é contínua.

De fato, f é hci; seja $x \in \mathbb{R}^+$ e $y \in [0, f(x)]$. Se $y = 0$ tome $y_j = 0$, e se $y = f(x)$ tome $y_j = f(x_j)$. Em ambos os casos $y_j \in \Gamma(x_j)$ para todo j e $y_j \to y$ (usando a continuidade de f no segundo caso). No caso de $y \in (0, f(x))$, então seja $c = f(x)/y$, e tome $y_j = f(x_j)/c$. Logo $y_j \in [0, f(x_j)] = \Gamma(x_j)$ pois $c > 1$, e por continuidade, $y_j \to f(x)/c = y$.

Para ver que Γ é hcs em x, tome $x_j \to x$ e seja o compacto

$$X = \big(\cup_{j\in\mathbb{N}}\{x_j\} \times [0, f(x_j)]\big) \cup \big(\{x\} \times [0, f(x)]\big).$$

Seja (y_j) tal que $y_j \in \Gamma(x_j)$. Logo (x_j, y_j) está em X, e então existe subsequência (x_{j_k}, y_{j_k}) convergente em X. Seja $(x, y) \in X$ seu limite (lembre que $x_j \to x$). Então $y \in [0, f(x)]$, pela definição de X.

Definimos o gráfico da correspondência Γ por

$$\operatorname{Graf}(\Gamma) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X \times Y : \mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in \Gamma(\mathbf{x})\}.$$

Considere agora os seguintes resultados caracterizando correspondências hcs.

Lema 2.5.4 (Suficiência para hcs). Suponha que $\operatorname{Graf}(\Gamma)$ seja fechado e que para todo $\hat{X} \subseteq X$ limitado, $\Gamma(\hat{X})$ seja limitado. Então $\Gamma(\mathbf{x})$ é compacto para todo $\mathbf{x} \in X$, e é hcs

Demonstração. Para cada $\mathbf{x} \in X$, $\Gamma(\mathbf{x})$ é fechado pois $\operatorname{Graf}(\Gamma)$ é fechado e $\Gamma(\mathbf{x})$ é limitado por hipótese. Então $\Gamma(\mathbf{x}) \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}^n$ é compacto. Sejam $\mathbf{x} \in X$ e $(\mathbf{x}_n)$ sequência em X que converge para $\mathbf{x}$. Seja $\mathbf{y}_n \in \Gamma(\mathbf{x}_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos que o conjunto $\hat{X} = \{\mathbf{x}\} \cup \{\mathbf{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$ é compacto, e, por hipótese, $\Gamma(\hat{X})$ é limitado. Então a sequência $(\mathbf{y}_n)$ em $\Gamma(\hat{X})$ tem uma subsequência convergente que converge para algum $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Como $\operatorname{Graf}(\Gamma)$ é fechado, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \operatorname{Graf}(\Gamma)$, i.e., $\mathbf{y} \in \Gamma(\mathbf{x})$. $\square$

Exemplo 2.7. Seja $\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\Gamma(0) = 0$, e $\Gamma(x) = \{0, 1/x\}$, para todo $x > 0$. Então $\operatorname{Graf}(\Gamma)$ é fechado, mas Γ não é hcs em $x = 0$ (basta tomar $x_k = 1/k$ e $y_k = k$; note que $\Gamma([0, a])$ não é limitado para nenhum $a > 0$).

Lema 2.5.5 ("recíproca"). Suponha que Γ seja hcs. Se X é compacto, então $\operatorname{Graf}(\Gamma)$ é compacto (em particular, Γ tem valores compactos).

Demonstração. Seja $(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)$ uma sequência em $\operatorname{Graf}(\Gamma)$. Como X é compacto, existe uma subsequência $(\mathbf{x}_{n_k})$ que converge para $\mathbf{x} \in X$. Como Γ é hcs em $\mathbf{x}$, existe uma subsequência $(\mathbf{y}_{n_{k_j}})$ que converge para $\mathbf{y} \in \Gamma(\mathbf{x})$, i.e., $(\mathbf{x}_{n_{k_j}}, \mathbf{y}_{n_{k_j}}) \to (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \operatorname{Graf}(\Gamma)$ e $\operatorname{Graf}(\Gamma)$ é sequencialmente compacto. Portanto, $\operatorname{Graf}(\Gamma)$ é compacto. $\square$

TEOREMA 2.5.6 (Teorema do Máximo). *Seja $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $\Gamma : X \to Y$ uma correspondência contínua e com valores compactos. Então a função $h : X \to \mathbb{R}$ definida por* (2.5.2) *é contínua e a correspondência $G : X \to Y$ definida por* (2.5.3) *é (não vazia e) hcs e tem valores compactos.*

DEMONSTRAÇÃO.

(1) G é não vazia e tem valores compactos: fixe $\mathbf{x} \in X$ e defina a função contínua $g(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ para $\mathbf{y} \in \Gamma(\mathbf{x})$. Já argumentamos que, como $\Gamma(\mathbf{x})$ é compacto, então $G(\mathbf{x})$ é não vazio. Como $G(\mathbf{x}) \subseteq \Gamma(\mathbf{x})$, então $G(\mathbf{x})$ é limitado. E note que $G(\mathbf{x}) = g^{-1}(\{h(\mathbf{x})\})$. Pelo teorema da continuidade global e usando que o domínio da g, $\Gamma(\mathbf{x})$, é fechado, temos que $G(\mathbf{x})$ é fechado. Logo é compacto.

(2) G é hcs: seja $(\mathbf{x}_n)$ uma sequência em X convergindo para $\mathbf{x}$. Tome $\mathbf{y}_n \in G(\mathbf{x}_n) \subseteq \Gamma(\mathbf{x}_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como Γ é hcs, existe uma subsequência $(\mathbf{y}_{n_k})$ que converge para $\mathbf{y} \in \Gamma(\mathbf{x})$. Seja $\mathbf{z} \in \Gamma(\mathbf{x})$. Como Γ é h.c.i., existe uma sequência $(\mathbf{z}_{n_k})$ tal que $\mathbf{z}_{n_k} \in \Gamma(\mathbf{x}_{n_k})$ que converge para $\mathbf{z}$. Como $f(\mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{y}_{n_k}) \geq f(\mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{z}_{n_k})$, para todo $k \in \mathbb{N}$, e f é contínua, segue que $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}, \mathbf{z})$. Como $\mathbf{z} \in \Gamma(\mathbf{x})$ é arbitrário, $\mathbf{y} \in G(\mathbf{x})$. Logo, G é h.c.s. em $\mathbf{x}$.

(3) $h : X \to \mathbb{R}$ é contínua: seja $(\mathbf{x}_n)$ uma sequência em X convergindo para $\mathbf{x}$. Tome $\mathbf{y}_n \in G(\mathbf{x}_n) \subseteq \Gamma(\mathbf{x}_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sejam $\bar{h} = \limsup h(\mathbf{x}_n)$ e $\underline{h} = \liminf h(\mathbf{x}_n)$. Então existe uma sequência $(\mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{y}_{n_k})$ em $\text{Graf}(G)$ tal que $\bar{h} = \lim f(\mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{y}_{n_k})$. Como G é hcs, existe uma subsequência $(\mathbf{y}_j)$ que converge para $\mathbf{y} \in G(\mathbf{x})$. Logo, $\bar{h} = \lim f(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = h(\mathbf{x})$. Analogamente, $\underline{h} = h(\mathbf{x})$. Logo, a sequência $(h(\mathbf{x}_n))$ converge e seu limite é $h(\mathbf{x})$, i.e., h é contínua em $\mathbf{x}$.

$\square$

EXEMPLO 2.8. Considere o problema de achar sequência $(\mathbf{x}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ contida em X que maximize

$$\max_{(\mathbf{x}_t)_{t\in\mathbb{N}}} \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t F(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}) \quad \text{tais que } \mathbf{x}_t \in \Gamma(\mathbf{x}_{t-1}) \text{ para } t \in \mathbb{N}, \tag{2.5.4}$$

onde $\beta \in (0, 1)$, $F : \text{Graf}(\Gamma) \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{x}_0 \in X$ são dados. O *Princípio da otimalidade de Bellman* afirma que a solução de (2.5.4) é caracterizada de forma única por

$$v(\mathbf{x}_t) = F(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}) + \beta v(\mathbf{x}_{t+1}),$$

onde v satisfaz

$$v(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{y}\in\Gamma(\mathbf{x})} [F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta v(\mathbf{y})] \quad \text{para } \mathbf{x} \in X. \tag{2.5.5}$$

2.6. Exercícios

EXERCÍCIO 2.1. Demonstre o Lema 2.1.1.

EXERCÍCIO 2.2. Seja M, M' espaços métricos e $f : M \to M'$ contínua. Mostre que, dado $X \subseteq M$ munido da mesma métrica de M, a função $f|_X$ é contínua.

EXERCÍCIO 2.3. Considere os espaços métricos M_1, M_2 e M_3 e seja $M = M_1 \times M_2$ com qualquer uma das métricas do Exemplo 1.5. Seja $f : M \to M_3$, e, para cada $\mathbf{x}_2 \in M_2$ fixo, defina $g : M_1 \to M_3$ por $g(\mathbf{x}_1) = f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. Mostre que se f é contínua, então g é contínua, mas que a recíproca não é verdadeira.

Exercício 2.4. Seja V espaço vetorial normado. Mostre que as seguintes funções são contínuas:

(1) $f : \mathbb{R} \times V \to V$ dada por $f(\alpha, \mathbf{x}) = \alpha\mathbf{x}$.
(2) $g : V \times V \to V$ dada por $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} + \mathbf{y}$

Usando as propriedades acima, mostre que soma de funções contínuas é contínua, bem como o produto de uma função vetorial por uma função escalar, se ambas forem contínuas.

Exercício 2.5. Seja $f : M \to \mathbb{R}$ contínua em $\mathbf{x} \in M$, e $f(\mathbf{x}) > 0$. Mostre que existe uma vizinhança aberta de $\mathbf{x}$ tal que f seja estritamente positiva.

Exercício 2.6. Seja $f : M \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que o conjunto $\{\mathbf{x} \in M : f(\mathbf{x}) = 0\}$ é fechado em M.

Exercício 2.7. Sejam f, $g : M \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Mostre que o conjunto $\{\mathbf{x} \in M : f(\mathbf{x}) > g(\mathbf{x})\}$ é aberto em M.

Exercício 2.8. Mostre que toda contração é uma função contínua.

Exercício 2.9. Seja K conjunto compacto e $f : K \to M'$ contínua, e seja $(\mathbf{x}_j)$ sequência contida em K. Mostre que a sequência $\big(f(\mathbf{x}_j)\big)$ possui subsequência convergente com limite contido em $f(K)$.

Exercício 2.10 (Equivalência de normas no $\mathbb{R}^n$). Mostre que no $\mathbb{R}^n$ todas as normas são equivalentes.

(Dica: mostre que todas as normas são equivalentes à norma euclidiana, i.e., considere $\|\cdot\|$ como sendo a norma euclidiana. Para tal, comece mostrando que existe constante c_1 tal que $c_1|||\mathbf{v}||| \le \|\mathbf{v}\|$ para todo $v \in V$. Para obter a desigualdade inversa, mostre que $|||\cdot|||$ define uma função contínua em $\mathbb{R}^n$. Conclua então usando o Teorema dos pontos extremos (Teorema 2.2.5) de forma apropriada.)

Exercício 2.11. Sejam V e W dois espaços vetoriais normados, e $T : V \to W$ uma aplicação linear. Mostre que

(1) T é contínua em V se e somente se T é contínua em $\mathbf{0}$
(2) T é contínua em V se e somente se T é limitada, i.e, existe c tal que
$$\|T\mathbf{v}\|_W \le c\|\mathbf{v}\|_V \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in V.$$
(3) se V e W têm dimensão finita, então T é contínua

Exercício 2.12. Mostre que o produto de duas funções uniformemente contínuas e limitadas é função uniformemente contínua.

Exercício 2.13. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Dizemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é *absolutamente contínua* se para todo $\epsilon > 0$ existir δ tal que dados K subintervalos $(x_1, y_1), \dots, (x_K, y_K)$ contidos em I e disjuntos (i.e., $x_1 < y_1 < \cdots < x_K < y_K$), com $\sum_{i=1}^K (y_i - x_i) < \delta$ então $\sum_{i=1}^K |f(y_i) - f(x_i)| < \epsilon$. Mostre que

(1) toda função absolutamente contínua é uniformemente contínua
(2) toda função de Lipschitz é absolutamente contínua

Exercício 2.14. Dê um exemplo de uma função uniformemente contínua que não seja absolutamente contínua.

Exercício 2.15. Suponha $\mathbf{f} : M \to M'$ uniformemente contínua no espaço métrico M, e que M' seja completo. Mostre que podemos definir $\bar{\mathbf{f}} : \overline{M} \to \overline{M'}$ tal que $\bar{\mathbf{f}}$ seja contínua em $\overline{M}$, e $\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in M$. Neste caso dizemos que $\bar{\mathbf{f}}$ é uma *extensão contínua* de $\mathbf{f}$.

Exercício 2.16. Mostre que se $f : M \to M'$ é homeomorfismo, então $G \subseteq M$ é aberto se e somente se $f(G) \subseteq M'$ for aberto (uma aplicação que leva abertos em abertos é chamada de *aplicação aberta*). E que $X \subseteq M$ é fechado se e somente se $f(X) \subseteq M'$ for fechado.

Exercício 2.17. Mostre que se M e M' são espaços métricos homeomorfos, e M é compacto, então M' é compacto. E se M é conexo, então M' é conexo.

Exercício 2.18. Mostre que homeomorfismos definem relações de equivalência entre espaços métricos.

Exercício 2.19. Mostre que dado $a < b$, o intervalo (a, b) é homeomorfo a $\mathbb{R}$, mas não é homeomorfo a $[a, b]$.

Exercício 2.20. Mostre um espaço métrico onde bolas abertas podem não ser homeomorfas.

Exercício 2.21. Mostre 4, no Exemplo 2.4.

Exercício 2.22. Mostre que $G = \{(x, \sin(1/x)) : x \in (0, 1)\} \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$ é conexo (i.e., o gráfico de $\sin 1/x$ e o eixo "y" são conexos).

APÊNDICE A

Miscellanea

[1]

A.1. Desigualdade de Hölder e Minkowisk

Seja $p > 1$ e q tal que $1/p + 1/q = 1$ (p e q são chamados de *conjugados*). Então vale a desigualdade de Hölder para todo $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^p$, $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^q$:

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{N} |y_i|^q\right)^{1/q}.$$

A desigualdade de Minkowisk é dada por

$$\left(\sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{N} |y_i|^p\right)^{1/p}$$

Ambas as desigualdades valem também para "$N = \infty$", bastando tomar $N \to \infty$

A.2. Séries

Sejam os números $a_1, a_2, \ldots$. Dizemos que uma série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge se a sequência s_k definida por

$$s_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$$

converge. Neste caso escrevemos que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i < +\infty$. Note que se a série converge, então $a_i \to 0$, pois

$$|a_i| = |s_i - s_{i-1}| \to 0,$$

pois como s_i converge, então s_i é de Cauchy.

Outra observação é que se $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ converge (neste caso dizemos que a série converge absolutamente), então $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ também converge. De fato, podemos limitar as somas parciais

$$|s_j - s_i| = \left|\sum_{k=i}^{j} a_k\right| \leq \sum_{k=i}^{j} |a_k|,$$

e como a série à direita é de Cauchy, obtemos a convergência.

Note também que para provar convergência de uma série de termos positivos, basta provar que as somas parciais são limitadas e usar que sequências monótonas e limitadas convergem.

[1]Última Atualização: 25/04/2018

Referências Bibliográficas

[1] Ward Cheney, *Analysis for applied mathematics*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 208, Springer-Verlag, New York, 2001. MR1838468

[2] Paul Glendinning, *Stability, instability and chaos: an introduction to the theory of nonlinear differential equations*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1994. MR1304054

[3] A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elements of the theory of functions and functional analysis. Vol. 1. Metric and normed spaces*, Graylock Press, Rochester, N. Y., 1957. Translated from the first Russian edition by Leo F. Boron. MR0085462

[4] Erwin Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989. MR992618

[5] Elon Lages Lima, *Espaços métricos*, Projeto Euclides [Euclid Project], vol. 4, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1977 (Portuguese). MR654506

[6] Alexandre Madureira, *Introdução à Análise Real*, Lecture Notes, 2018 (Portuguese).

[7] Humberto Moreira, *Análise Matemática II*, Lecture Notes, 2017 (Portuguese).

[8] James R. Munkres, *Topology: a first course*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975. MR0464128

[9] Walter Rudin, *Principles of mathematical analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1976. International Series in Pure and Applied Mathematics. MR0385023 (52 #5893)

[10] I. M. Singer and J. A. Thorpe, *Lecture notes on elementary topology and geometry*, Springer-Verlag, New York, 1976. Reprint of the 1967 edition; Undergraduate Texts in Mathematics. MR0413152 (54 #1273)

[11] Jorge Sotomayor, *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Projeto Euclides [Euclid Project], vol. 11, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979 (Portuguese). MR651910