ANÁLISE II – FGV
PRIMEIRA PROVA

Prof. Alexandre Madureira
Data: **14 de maio de 2003**
Tempo de prova: **2 horas**
Valor total da prova: 10 pontos.

1- (2.0 pontos) Dê um exemplo de um conjunto em $\mathbb{R}^2$ que não seja nem aberto nem fechado. Prove sua afirmativa.

Solução: Seja por exemplo o conjunto

$$S = \big\{\mathbf{x} = (x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1 \in [0, 1)\big\},$$

representado na figura 1.

Para mostrar que S não é fechado, considere a sequência em S dada por $x_n = (1 - 1/n, 0)$. Como $x_n \to (1, 0) \notin S$, então S não contém um de seus pontos de acumulação, logo S não é fechado.

Para mostrar que S não é aberto, note que *toda* bola de raio ϵ e centro em $(0, 0)$ contém pontos em S e no complementar de S.

2- (2.0 pontos) Mostre que um conjunto F em $\mathbb{R}^p$ é fechado se e somente se F contém todos seus pontos de fronteira.

Solução: $(\Rightarrow)$ Suponha F fechado e $\mathbf{x}$ um ponto de fronteira de F. Se $\mathbf{x} \notin F$, então $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(F)$, onde $\mathcal{C}(F)$ é o conjunto complementar de F. Como $\mathcal{C}(F)$ é aberto, então $\mathcal{C}(F)$ é vizinhança de $\mathbf{x}$. Como $\mathcal{C}(F)$ não contém pontos de F, obtemos uma contradição com $\mathbf{x}$ ser de fronteira. Logo $\mathbf{x} \in F$.

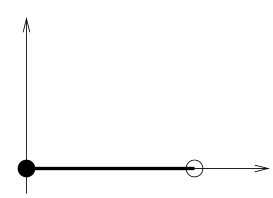

Figure 1. Conjunto S.

($\Leftarrow$) Suponha que F contenha todos seus pontos de fronteira. Seja $\mathbf{x} \notin F$. Como F contém seus pontos de fronteira, então F é ponto exterior. Logo existe vizinhança de $\mathbf{x}$ em $\mathcal{C}(F)$ e então $\mathcal{C}(F)$ é aberto. Logo F é fechado.

3- (2.0 pontos) Sejam $X = (\mathbf{x}_n)$ e $Y = (\mathbf{y}_n)$ sequências em $\mathbb{R}^p$ e seja $Z = (\mathbf{z}_n)$ a sequência formada por $\mathbf{z}_1 = \mathbf{x}_1$, $\mathbf{z}_2 = \mathbf{y}_1$, $\mathbf{z}_3 = \mathbf{x}_2$, $\mathbf{z}_4 = \mathbf{y}_2, \dots$, $\mathbf{z}_{2n-1} = \mathbf{x}_n$, $\mathbf{z}_{2n} = \mathbf{y}_n$, ... Mostre que se $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{c}$ e $\lim_{n\to\infty} \mathbf{y}_n = \mathbf{c}$, então $\lim_{n\to\infty} \mathbf{z}_n = \mathbf{c}$.

Solução: Suponha que $(\mathbf{z}_n)$ não convirja para $\mathbf{c}$. Então existe um ϵ, uma subsequência $(\mathbf{z}_{n_k})$, e um inteiro N_0 tal que

$$\|\mathbf{z}_{n_k} - \mathbf{c}\| > \epsilon.$$

para todo $n_k > N_0$. Isto implica que existem infinitos elementos de $(\mathbf{z}_n)$ distando mais que ϵ de $\mathbf{c}$. Logo existem infinitos elementos de $(\mathbf{x}_n)$ ou de $(\mathbf{y}_n)$ distando mais que ϵ de $\mathbf{c}$. mas isto contradiz o fato de que $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{c}$ e $\lim_{n\to\infty} \mathbf{y}_n = \mathbf{c}$.

4- (2.0 pontos) Seja $D \subset \mathbb{R}^p$. Assuma que $f : D \to \mathbb{R}^p$ é uniformemente contínua. Mostre que se $(\mathbf{x}_n)$ é sequência de Cauchy, então $\big(f(\mathbf{x}_n)\big)$ também é sequência de Cauchy.

Solução: Seja $\epsilon > 0$. Como f é uniformemente contínua, então existe δ tal que

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \Longrightarrow \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \epsilon, \tag{1}$$

para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in D$. Como $(\mathbf{x}_n)$ é sequência de Cauchy, então existe N_0 tal que se

$$m, n > N_0 \Longrightarrow \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n\| < \delta. \tag{2}$$

Combinando (1) e (2), temos então que

$$m, n > N_0 \Longrightarrow \|f(\mathbf{x}_m) - f(\mathbf{x}_n)\| < \epsilon.$$

5- (2.0 pontos) Seja $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$, e seja a função $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ inversa de f, isto é,

$$g(f(\mathbf{x})) = \mathbf{x}, \qquad f(g(\mathbf{y})) = \mathbf{y},$$

para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ em $\mathbb{R}^p$. Se f é diferenciável em $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$, e g é diferenciável em $\mathbf{b} = f(\mathbf{a})$, mostre que $Df(\mathbf{a})$ e $Dg(\mathbf{b})$ são inversas uma da outra, isto é,

$$Df(\mathbf{a})Dg(\mathbf{b}) = Dg(\mathbf{b})Df(\mathbf{a}) = I,$$

onde I é a matriz identidade.

Solução: Seja $h(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$. Derivando $h(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, temos $Dh(\mathbf{a}) = I$. Usando a regra da cadeia para $h(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x}))$, temos $Dh(\mathbf{a}) = Dg(\mathbf{b})Df(\mathbf{a})$. Logo, $Dg(\mathbf{b})Df(\mathbf{a}) = I$. De forma análoga segue-se que $Df(\mathbf{a})Dg(\mathbf{b}) = I$.