ANÁLISE II – FGV
PRIMEIRA PROVA

Prof. Alexandre Madureira
Data: **14 de maio de 2003**
Tempo de prova: **2 horas**
Valor total da prova: 10 pontos.

1- (2.0 pontos) Dê um exemplo de um conjunto em $\mathbb{R}^2$ que não seja nem aberto nem fechado. Prove sua afirmativa.

2- (2.0 pontos) Mostre que um conjunto F em $\mathbb{R}^p$ é fechado se e somente se F contem todos seus pontos de fronteira.

3- (2.0 pontos) Sejam $X = (\mathbf{x}_n)$ e $Y = (\mathbf{y}_n)$ sequências em $\mathbb{R}^p$ e seja $Z = (\mathbf{z}_n)$ a sequência formada por $\mathbf{z}_1 = \mathbf{x}_1$, $\mathbf{z}_2 = \mathbf{y}_1$, $\mathbf{z}_3 = \mathbf{x}_2$, $\mathbf{z}_4 = \mathbf{y}_2, \dots$, $\mathbf{z}_{2n-1} = \mathbf{x}_n$, $\mathbf{z}_{2n} = \mathbf{y}_n, \dots$. Mostre que se $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{c}$ e $\lim_{n\to\infty} \mathbf{y}_n = \mathbf{c}$, então $\lim_{n\to\infty} \mathbf{z}_n = \mathbf{c}$.

4- (2.0 pontos) Seja $D \subset \mathbb{R}^p$. Assuma que $f : D \to \mathbb{R}^p$ é uniformemente contínua. Mostre que se $(\mathbf{x}_n)$ é sequência de Cauchy, então $\big(f(\mathbf{x}_n)\big)$ também é sequência de Cauchy.

5- (2.0 pontos) Seja $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$, e seja a função $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ inversa de f, isto é,

$$g(f(\mathbf{x})) = \mathbf{x}, \qquad f(g(\mathbf{y})) = \mathbf{y},$$

para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ em $\mathbb{R}^p$. Se f é diferenciável em $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$, e g é diferenciável em $\mathbf{b} = f(\mathbf{a})$, mostre que $Df(\mathbf{a})$ e $Dg(\mathbf{b})$ são inversas uma da outra, isto é,

$$Df(\mathbf{a})Dg(\mathbf{b}) = Dg(\mathbf{b})Df(\mathbf{a}) = I,$$

onde I é a matriz identidade.