

LISTA 2

Data de entrega: até 03/02/2026 às 14h00

Podem entregar presencialmente na monitoria ou pelo email machadotnathan@gmail.com

EXERCÍCIO 1 (2.57) Mostre sem usar o Teorema de Heine–Borel que a bola aberta $B_1(\mathbf{0}) \subseteq \mathbb{R}^n$ não é compacta.

EXERCÍCIO 2 (2.59) Decida se os conjuntos abaixo são ou não compactos. Prove suas afirmativas sem utilizar o Teorema de Heine–Borel.

(a) $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A finito.

(b) $B \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que B não contém ao menos um de seus pontos de acumulação.

EXERCÍCIO 3 (2.61) Seja K conjunto compacto, e seja $\epsilon > 0$. Mostre que existem $J \in \mathbb{N}$ e pontos $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_J$ pertencentes a K tais que

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^J B_\epsilon(\mathbf{x}_j).$$

EXERCÍCIO 4 (2.64) Sem usar a parte do Teorema de Heine-Borel que diz que todo fechado e limitado é compacto, mostre que a interseção arbitrária de compactos é compacta e que a união finita de compactos é compacta.

EXERCÍCIO 5 (3.3) Seja $C \subseteq \mathbb{R}^n$ não-vazio, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, e $A = \{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| : \mathbf{x} \in C\}$. Mostre que existe o ínfimo de A , e que

$$\inf A = 0 \iff \text{existe sequência em } C \text{ convergente para } \mathbf{y}.$$

EXERCÍCIO 6 (3.8) Seja $(\mathbf{x}_k)$ sequência em $\mathbb{R}^n$ limitada, e tal que toda subsequência convergente converge para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Mostre que $(\mathbf{x}_k)$ converge para $\mathbf{x}$.