Professor: Alexandre L. Madureira
Monitor: Nathan Machado

Gabarito 1

Data de entrega: até 27/01/2026 as 14h00
Podem entregar presencialmente na monitoria ou pelo email machadotnathan@gmail.com

EXERCÍCIO 1 (2.4) Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ e as funções $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : A \to \mathbb{R}$ sejam tais que os conjuntos $f(A)$ e $g(A)$ sejam limitados superiormente. Defina a função $f + g : A \to \mathbb{R}$ por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Mostre que $\sup(f + g)(A) \leq \sup f(A) + \sup g(A)$. Dê um exemplo em que a desigualdade é estrita.

Sol. Temos que $f(A)$ e $g(A)$ são limitados, logo existe $\sup f(A)$ e $\sup g(A)$. Portanto, para todo $x \in A$, temos que $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \leq \sup f(A) + \sup g(A)$. Dessa forma, $\sup f(A) + \sup g(A)$ é cota superior de $(f + g)(A)$ e existe supremo de $(f + g)(A)$. Como $\sup(f + g)(A)$ é a menor das cotas superiores de $(f + g)(A)$, temos $\sup(f + g)(A) \leq \sup f(A) + \sup g(A)$.

Exemplo em que a desigualdade é estrita: $A = [0, 1]$, $f(x) = x$ e $g(x) = -x$. Temos que $\sup(f + g)(A) = 0$, enquanto $\sup f(A) = 1$ e $\sup g(A) = 0$.

EXERCÍCIO 2 (2.9) Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ não vazio, e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(\mathbf{x}) = \inf\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{y} \in A\}.$$

Mostre que f está bem definida. Construa entretanto um exemplo onde não exista $\mathbf{y} \in A$ tal que $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, para algum $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Sol. Veja que o conjunto $\{\|x - y\| : y \in A\}$ é limitado inferiormente por 0. Portanto, possui ínfimo. Logo, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $f(\mathbf{x})$ é não vazio. Ainda, como o ínfimo é único, f está bem definida.

Para ver um exemplo onde não existe $\mathbf{y}$ tal que $f(\mathbf{x}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$, para algum $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, considere $A = B_1(\mathbf{0})$ e tome $\mathbf{x} = (1, 0, 0, ..., 0)$. Temos que $f(\mathbf{x}) = 0$, mas não existe $\mathbf{y} \in A$ tal que $f(\mathbf{x}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| = 0$.

EXERCÍCIO 3 (2.27) Mostre que se $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ são abertos em $\mathbb{R}$, então o conjunto $C = A \times B$ é aberto no $\mathbb{R}^2$.

Sol. Para mostrar que C é aberto, Tome $c \in A \times B$ arbitrário. Logo c é um elemento da forma $c = (a, b)$, para alguma $a \in A$ e algum $b \in B$. Como A e B são abertos, existem $\varepsilon_a, \varepsilon_b > 0$ tais que $(a - \varepsilon_a, a + \varepsilon_a) \subseteq A$ e $(b - \varepsilon_b, b + \varepsilon_b) \subseteq B$. Quer-se mostrar que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(c) \subseteq C$. Tome $0 < \varepsilon < \min\{\varepsilon_a, \varepsilon_b\}$. Vou mostrar que $B_\varepsilon(c) \subseteq C = A \times B$. Tome $x \in B_\varepsilon(c)$ arbitrário. Logo $x = (x_1, x_2)$, então

$$\max\{|x_1 - a|, |x_2 - b|\} \leq \sqrt{(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2} = \|(x_1 - a, x_2 - b)\| = \|x - c\| < \varepsilon.$$

Como $\max\{|x_1 - a|, |x_2 - b|\} < \varepsilon \Rightarrow |x_1 - a| < \varepsilon < \varepsilon_a$ e $|x_2 - b| < \varepsilon < \varepsilon_b$, conclui-se que $x \in C = A \times B$. Portanto, como x foi arbitrário, $B_\varepsilon(x) \subseteq C$. Logo, C é aberto.

EXERCÍCIO 4 (2.35) Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$, e denote por interior de A o conjunto A° de pontos interiores de A. Mostre que

(1) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$

(2) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

(3) Se $B \subseteq A$ e B é aberto, então $B \subseteq A^\circ$ (i.e. A° é o "maior" aberto contido em A)

Sol. Item (1): Precisamos mostrar que $(A^\circ)^\circ \subseteq A^\circ$ e $A^\circ \subseteq (A^\circ)^\circ$.

$(A^\circ)^\circ \subseteq A^\circ$: se $x \in (A^\circ)^\circ$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subseteq A^\circ$. Logo, $x \in A^\circ$.

$A^\circ \subseteq (A^\circ)^\circ$: Se $x \in A^\circ$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subseteq A$. Quer-se mostrar $x \in (A^\circ)^\circ$, para isso vou mostrar que $B_\varepsilon(x) \subseteq A^\circ$, ou seja, x é ponto interior de A°. Tome $x' \in B_\varepsilon(x)$. Veja que para $r = \varepsilon - ||x - x'||$, $B_r(x') \subseteq B_\varepsilon(x) \subseteq A$. Mas então $x' \in A^\circ$ e, portanto, $B_\varepsilon(x) \subseteq A^\circ$. Logo, $x \in (A^\circ)^\circ$.

Item (2): Precisamos mostrar que $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$ e $A^\circ \cap B^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ$.

$(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$: se $x \in (A \cap B)^\circ$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$. Com isso, $B_\varepsilon(x) \subseteq A$ e $B_\varepsilon(x) \subseteq B$ e, consequentemente, $x \in A^\circ \cap B^\circ$.

$A^\circ \cap B^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ$: Se $x \in A^\circ \cap B^\circ$, então existem $\varepsilon_a, \varepsilon_b$ tais que $B_{\varepsilon_a}(x) \subseteq A$ e $B_{\varepsilon_b}(x) \subseteq B$. Tome $\varepsilon = \min\{\varepsilon_a, \varepsilon_b\}$, então $B_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$, implicando que $x \in (A \cap B)^\circ$.

Item (3): Suponha $B \subseteq A$ e B aberto. Se $x \in B$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subseteq B \subseteq A$. Mas então x é ponto interior de A. Logo, $x \in A^\circ$.

EXERCÍCIO 5 (2.45) Mostre que um ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é ponto de acumulação de A se e somente se toda vizinhança aberta de $\mathbf{x}$ contém infinitos pontos de A.

Sol.

$(\rightarrow)$ Suponha que x é ponto de acumulação de A. Suponha por absurdo que o conjunto de pontos de A em uma dada vizinhança aberta V de x seja finito, dado por $K \equiv \{a_1, \ldots, a_k\}$. Mas então, defina $\varepsilon = \min_{a \in K} ||x - a||$ e podemos encontrar $0 < r < \varepsilon$ tal que $B_r(x) \setminus \{x\} \cap A = \emptyset$. Mas isso gera uma contradição com x ser ponto de acumulação. Portanto, toda vizinhanção aberta de x contém infinitos pontos de A.

$(\leftarrow)$ Suponha agora que toda vizinhança aberta de x contém infinitos pontos de A. Logo, para todo $r > 0$, temos que $(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ pois $B_r(x)$ é vizinhança aberta de x e possui infinitos pontos de A, garantindo que x é um ponto de acumulação de A.

EXERCÍCIO 6 (2.47) Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, e $\mathbf{x}$ ponto de acumulação de $A \cap B$. Mostre que $\mathbf{x}$ é ponto de acumulação de A e de B.

Sol. Como x é ponto de acumulação de $A \cap B$, pelo exercício anterior, temos que toda vizinhança aberta de x possui infinitos pontos de $A \cap B$. Mas então, toda vizinhança aberta de x possui infinitos pontos de A e infinitos pontos de B. Portanto, pelo exercício anterior, x é ponto de acumulação de A e também de B.