ANÁLISE I – FGV
QUARTA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Monitor: Guilherme Cota

Data de entrega: **16 de fevereiro de 2024**

Exercício 1. Demonstre o seguinte resultado (foi demonstrado em sala, mas tente fazer por si só):

Seja $\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{R}$, e $\mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Então as afirmativas abaixo são equivalentes.

(1) $\boldsymbol{f}$ é contínua em $\mathbf{x}$.

(2) Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathbf{y} \in \Omega, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \implies \|\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{f}(\mathbf{y})\| < \epsilon.$$

(3) Se $(\mathbf{x}_k)$ é sequência em Ω e $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$, então $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{f}(\mathbf{x}_k) = \boldsymbol{f}(\mathbf{x})$.

Exercício 2. Sejam f, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Mostre de duas formas diferentes que o conjunto $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : f(\mathbf{x}) > g(\mathbf{x})\}$ é aberto em $\mathbb{R}^m$.

Exercício 3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo x, $y \in \mathbb{R}$. Mostre que $f(0) = 0$ e que $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que se f é contínua em $x = 0$, então f é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 4. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ é aberto. Mostre que f é contínua em Ω se e somente se $f^{-1}((\alpha, +\infty))$ e $f^{-1}((-\infty, \alpha))$ são abertos para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercício 5. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(0) < 0$ e $f(1) > 0$. Mostre que se $s = \sup\{x \in [0, 1] : f(x) < 0\}$, então $f(s) = 0$.

Exercício 6. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ fechado e limitado, e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ contínua em Ω. Sem usar Heine–Borel, mostre que $f(\Omega)$ é fechado e limitado.