ANÁLISE I – FGV
QUINTA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **após o carnaval, a definir**

Exercício 1. Sejam f e g funções de $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, diferenciáveis em $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. Mostre, usando a definição de derivadas que $(f+g)'(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})+g'(\mathbf{x})$. Seja $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ também diferenciável em $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. Mostre usando a definição de derivadas que $(hg)'(\mathbf{x}) = h'(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) + h(\mathbf{x})g'(\mathbf{x})$.

Exercício 2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Decida se f é ou não diferenciável em $(0,0)$. Prove seu resultado.

Exercício 3. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto e com a seguinte propriedade: existe $\mathbf{x}_* \in \Omega$ tal que para todo $\mathbf{x} \in \Omega$, a reta $S_{\mathbf{x}} = \{t\mathbf{x}+(1-t)\mathbf{x}_* : t \in [0,1]\}$ está contida em Ω, i.e., $S_{\mathbf{x}} \subset \Omega$ (dizemos que tal domínio tem *formato de estrela*. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ diferenciável em Ω. Suponha que exista $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ tal que $f'(\mathbf{x}) = T$ para todo $\mathbf{x} \in \Omega$. Mostre que $f(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}) + \boldsymbol{c}$, para algum $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$.

Exercício 4. Seja $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ e $f : B \to \mathbb{R}$ função contínua em B, diferenciável no interior de B e tal que $f \equiv 0$ na fronteira de B. Mostre que f tem ponto crítico no interior de B.

Exercício 5. Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ compacto, e A° o conjunto dos pontos interiores de A. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável, com derivadas contínuas em A°, e f contínua em A. Suponha ainda que f se anule em toda a fronteira de A, e que f'' seja negativa definida para todo ponto em A°. Mostre que $f(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \in A^\circ$.

Exercício 6. Sejam as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciáveis, com as segundas derivadas contínuas. Suponha que o zero seja ponto de mínimo estrito de f e g, e que $f(0) = g(0) = 1$. Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x,y) = f(x)g(y)$. O que podemos afirmar sobre a Hessiana de φ em $(0,0)$ (nada pode ser afirmado, ela é indefinida, positiva definida, positiva semi-definida, negativa definida, etc)? O que podemos afirmar sobre o ponto $(0,0)$

em relação à φ (nada pode ser afirmado, é ponto de máximo, de máximo estrito, de mínimo, de mínimo estrito, de sela, etc)? Justifique suas respostas.