**ANÁLISE I – FGV**
**QUARTA LISTA**

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **13 de fevereiro de 2020**

*Exercício* 1. Sejam $f$, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Mostre que o conjunto $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : f(\mathbf{x}) > g(\mathbf{x})\}$ é aberto em $\mathbb{R}^m$.

*Exercício* 2. Sejam $a < b$ reais, e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$. Sejam $x_1 < x_2$ elementos de $[a, b]$ e máximos locais da $f$. Mostre que existe $c \in (x_1, x_2)$ que é mínimo local da $f$.

*Exercício* 3. Suponha $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ uniformemente contínua em $(0, 1]$. Mostre que podemos definir $f(0)$ tal que $f$ seja uniformemente contínua em $[0, 1]$.

*Exercício* 4. Seja $B \subseteq \mathbb{R}^m$ limitado, e $\boldsymbol{f} : B \to \mathbb{R}^n$ uniformemente contínua. Mostre que $\boldsymbol{f}$ é limitada em $B$. Mostre que esta conclusão não é necessariamente verdadeira se $B$ não for limitado.

*Exercício* 5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - c_i)^2,$$

onde $c_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \ldots, n$, e $n \in \mathbb{N}$. Ache um ponto de mínimo local de $f$. Mostre que é único.

*Exercício* 6. Sejam $a < b$, e $x_0, x_1, \ldots, x_N$ pontos tais que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$. Mostre que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é diferenciável e tem derivada contínua em $[a, b]$, então existe uma constante $M \in \mathbb{R}$ independente de $N$ tal que

$$\sum_{i=1}^{N} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq M.$$

(Obs: dizemos neste caso que $f$ tem *variação limitada*.)