ANÁLISE I – FGV
TERCEIRA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **30 de janeiro de 2020**

Exercício 1. Seja K conjunto compacto, e seja $\epsilon > 0$. Mostre que existem $J \in \mathbb{N}$ e pontos $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_J$ pertencentes a K tais que

$$K \subseteq \cup_{j=1}^{J} B_\epsilon(\mathbf{x}_j).$$

Exercício 2. Sem usar o Teorema de Bolzano–Weiertrass para conjuntos no $\mathbb{R}^n$, mostre que se K é compacto e $A \subseteq K$ é infinito, então existe pelo menos um ponto de acumulação de A. Obtenha como corolário o Teorema de Bolzano–Weiertrass para conjuntos. Este ponto de acumulação necessariamente pertence a A? Necessariamente pertence a K?

Exercício 3. Mostre que se $A \subset \mathbb{R}$ não vazio e limitado, e $s = \sup A$, então existe sequência em A convergindo para s.

Exercício 4. Dizemos que uma sequência $(\mathbf{x}_j)$ no $\mathbb{R}^n$ tem *variação limitada* se a sequência (v_k) de reais definida por

$$v_k = \sum_{i=1}^{k} \|\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i\|$$

converge. Mostre que toda sequência de variação limitada é convergente.

Exercício 5. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Mostre que um ponto $\mathbf{x}^*$ é aderente a A se e somente se existe sequência convergente e contida em A, e que tenha $\mathbf{x}^*$ como seu limite. Mostre que o conjunto de pontos aderentes a A é fechado.

Exercício 6. Seja (x_k) sequência monótona em $\mathbb{R}$, e suponha que (x_k) contenha subsequência convergente. Mostre que (x_k) converge.