ANÁLISE I – FGV
QUINTA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **21 de fevereiro de 2019**

Exercício 1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - c_i)^2,$$

onde $c_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \dots, n$, e $n \in \mathbb{N}$. Ache um ponto de mínimo local de f. Mostre que é único.

Exercício 2. Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ quatro vezes diferenciável, com a quarta derivada contínua, numa vizinhança aberta de $x \in I$. Mostre então que existem constantes positivas δ e c tal que

$$\left| f''(x) - \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \right| \leq ch^2,$$

para todo $0 < h < \delta$. Mostre que a constante c pode ser escolhida independentemente de h. A forma acima é utilizada para aproximar $f''(x)$, quando f é suave.

Exercício 3. Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja suave, e possua ao menos dois mínimos locais. Mostre que f possui um ponto crítico entre estes dois mínimos. Novamente, este resultado não vale em geral para $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Exercício 4. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em A, com a segunda derivada contínua, onde $A \subseteq \mathbb{R}$ aberto, e $x \in A$ ponto crítico de f tal que $f''(x) \neq 0$ (são chamados de *não degenerados*). Mostre que existe uma vizinhança aberta de x tal que x é o único ponto crítico.

Exercício 5. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em A, com a segunda derivada contínua, onde $A \subseteq \mathbb{R}$ aberto. Suponha que todo ponto crítico de A tem segunda derivada não nula. Mostre que cada compacto contido em A contém um número finito de pontos críticos não degenerados.

Exercício 6. Sejam $a < b$ números reais, e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). Mostre que entre duas raízes consecutivas de f' existe no máximo uma raiz de f.