ANÁLISE I – FGV
QUINTA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **15 de março de 2018**

Exercício 1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é injetiva.

Exercício 2. Sejam $a < b$, e $x_0, x_1, \dots, x_N$ pontos tais que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$. Mostre que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é diferenciável e tem derivada contínua em $[a, b]$, então existe uma constante $M \in \mathbb{R}$ independente de N tal que

$$\sum_{i=1}^{N} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq M.$$

(Obs: dizemos neste caso que f tem *variação limitada*.)

Exercício 3. Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável com a segunda derivada contínua, numa vizinhança aberta de $x \in I$. Mostre então que existem constantes positivas δ e c tal que

$$\left| f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq ch,$$

para todo $0 < h < \delta$. Mostre que a constante c pode ser escolhida independentemente de h.

Repita o exercício supondo agora que $f : I \to \mathbb{R}$ é três vezes diferenciável com a terceira derivada contínua, numa vizinhança aberta de $x \in I$, e que então

$$\left| f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \right| \leq ch^2,$$

As duas formas acima são utilizadas para aproximar $f'(x)$.

Exercício 4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suave, com mínimo local em $x = 0$, e suponha que este mínimo não seja global. Mostre que existe ponto crítico diferente de $x = 0$.

Exercício 5. Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja suave, e possua ao menos dois mínimos locais. Mostre que f possui um ponto crítico entre estes dois mínimos.

Exercício 6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suave e tal que $f'(x_1) > 0$ e $f'(x_2) > 0$ para $x_1 < x_2$ raízes de f. Mostre que f possui ao menos uma raiz em (x_1, x_2).