ANÁLISE I – FGV
QUARTA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **08 de março de 2018**

Exercício 1. Mostre que toda contração é uma função contínua.

Exercício 2. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(0) < 0$ e $f(1) > 0$. Mostre que se $s = \sup\{x \in [0,1] : f(x) < 0\}$, então $f(s) = 0$.

Exercício 3. Sejam $a < b$ reais, e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a,b]$. Sejam $x_1 < x_2$ elementos de $[a,b]$ e máximos locais da f. Mostre que existe $c \in (x_1, x_2)$ que é mínimo local da f.

Exercício 4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em $\mathbb{R}$ e tal que $f(x+1) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é limitada.

Exercício 5. Mostre que se $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ são uniformemente contínuas, então $f + g$ é uniformemente contínua. Mostre que, mesmo que f seja limitada, a função fg não é necessariamente uniformemente contínua.

Exercício 6. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Dizemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é *absolutamente contínua* se para todo $\epsilon > 0$ existir δ tal que dados K subintervalos $(x_1, y_1), \dots, (x_K, y_K)$ contidos em I e disjuntos (i.e., $x_1 < y_1 < \cdots < x_K < y_K$), com $\sum_{i=1}^{K}(y_i - x_i) < \delta$ então $\sum_{i=1}^{K} |f(y_i) - f(x_i)| < \epsilon$. Mostre que

(1) toda função absolutamente contínua é uniformemente contínua
(2) toda função de Lipschitz é absolutamente contínua