ANÁLISE I – FGV
SEGUNDA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **25 de janeiro de 2018**

Exercício 1. Dizemos que duas normas $\|\cdot\|$ e $|||\cdot|||$ de uma espaço vetorial V são *equivalentes* se existem constantes positivas c_1 e c_2 tais que

$$c_1|||\mathbf{v}||| \leq \|\mathbf{v}\| \leq c_2|||\mathbf{v}|||$$

para todo $v \in V$. Mostre que normas equivalentes gerams "os mesmos abertos", i.e., um conjunto é aberto usando-se a norma $\|\cdot\|$ se e somente se ele for aberto usando-se a norma $|||\cdot|||$.

Exercício 2. Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Mostre que $A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$ e $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$.

Exercício 3. Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Chamamos de *fecho de* A, e denotamos por $\bar{A}$, a interseção de todos os fechados que contenham A. Mostre que $\mathbf{x} \in \bar{A}$ se e somente se $\mathbf{x}$ é ponto de interior ou de fronteira da A.

Exercício 4. Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Mostre que A é fechado se e somente se $A = \bar{A}$.

Exercício 5. Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Dizemos que $\mathbf{x}$ é *ponto aderente* a A se para todo $\epsilon > 0$ tem-se $B_\epsilon(\mathbf{x}) \cap A \neq \emptyset$. Mostre que o conjunto de pontos aderentes a A é dado por $\bar{A}$, o fecho de A.

Exercício 6. Mostre que todo ponto de

$$\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$$

é ponto de fronteira, e que 0 é o único ponto de acumulação.