ANÁLISE I – FGV
SEXTA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **15 de março de 2017**

Exercício 1. Seja $a < b$ e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ diferenciável em $[a,b]$. Mostre que se $f'(a) > 0$ e $f'(b) < 0$, então existe $x \in (a,b)$ tal que $f'(x) = 0$.

Exercício 2. Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ quatro vezes diferenciável, com a quarta derivada contínua, numa vizinhança aberta de $x \in I$. Mostre então que existem constantes positivas δ e c tal que

$$\left| f''(x) - \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \right| \leq ch^2,$$

para todo $0 < h < \delta$. Mostre que a constante c pode ser escolhida independentemente de h. A forma acima é utilizada para aproximar $f''(x)$, quando f é suave.

Exercício 3. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em A, com a segunda derivada contínua, onde $A \subseteq \mathbb{R}$ aberto, e $x \in A$ ponto crítico de f tal que $f''(x) \neq 0$ (são chamados de *não degenerados*). Mostre que existe uma vizinhança aberta de x tal que x é o único ponto crítico.

Exercício 4. Sejam $a < b$ números reais, e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b). Mostre que entre duas raízes consecutivas de f' existe no máximo uma raiz de f.

Exercício 5. Mostre que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{(y - x^2) + x^4} & \text{para } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{para } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

tem todas as derivadas direcionais em $(0,0)$ iguais a zero, mas que f não é diferenciável no $(0,0)$.

Exercício 6. Seja $Q = (0,1) \times (0,1)$. Suponha que $f : Q \to \mathbb{R}$, e $g : Q \to \mathbb{R}$ sejam diferenciáveis em Q. Mostre que se $\mathbf{f}'(x) = \mathbf{g}'(x)$ para todo $\mathbf{x} \in Q$, então existe constante c tal que $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + c$ para todo $\mathbf{x} \in Q$.