ANÁLISE I – FGV
QUARTA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **08 de fevereiro de 2017**

Exercício 1. Seja $(\mathbf{x}_k)$ sequência em $\mathbb{R}^n$ limitada, e tal que toda subsequência convergente converge para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Mostre que $(\mathbf{x}_k)$ converge para $\mathbf{x}$.

Exercício 2. Dizemos que uma sequência $(\mathbf{x}_j)$ no $\mathbb{R}^n$ tem *variação limitada* se a sequência (v_k) de reais definida por

$$v_k = \sum_{i=1}^{k} \|\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i\|$$

converge. Mostre que toda sequência de variação limitada é convergente.

Exercício 3. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Mostre que um ponto $\mathbf{x}^*$ é aderente (ver definição no problema 2.35) a A se e somente se existe sequência convergente e contida em A, e que tenha $\mathbf{x}^*$ como seu limite. Mostre que o conjunto de pontos aderentes a A é fechado.

Exercício 4. Seja F um conjunto fechado em $\mathbb{R}^n$ não vazio, e seja $\mathbf{y} \notin F$. Mostre que existe $\mathbf{x}^* \in F$ tal que $\|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}\| = \inf\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{x} \in F\}$.

Exercício 5. Diga se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas, provando suas afirmações. Em todos os casos, K_1 e K_2 são conjuntos, e $A = \{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| : \mathbf{x}_1 \in K_1, \mathbf{x}_2 \in K_2\}$.

(1) K_1 e K_2 fechados implica em A compacto.
(2) K_1 e K_2 fechados implica em A fechado.
(3) K_1 compacto e K_2 fechado implica em A fechado.

Exercício 6. Seja $x_1 \in [0, +\infty)$, e seja a sequência de reais definida por

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n} \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Determine para quais valores de $x_1 \in [0, +\infty)$ a sequência (x_n) converge, e para qual valor. Demonstre suas afirmativas. (*Obs: Para toda sequência convergente (y_n), vale a propriedade $\lim_{n\to\infty} \sqrt{y_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} y_n}$.*)