

**ANÁLISE I – FGV**  
**QUARTA LISTA**

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **05 de fevereiro de 2015**

*Exercício 1.* Seja  $K \subseteq \mathbb{R}^n$ . Mostre que as afirmativas abaixo são equivalentes:

- (1)  $K$  é compacto
- (2) toda sequência contida em  $K$  possui subsequência convergente com limite contido em  $K$ .

*Observação.* No  $\mathbb{R}^n$ , pode-se definir compacidade usando a propriedade (2) acima, que em geral tem o nome de *sequencialmente compacto*.

*Exercício 2.* Diga se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas, provando suas afirmações.

Em todos os casos,  $K_1$  e  $K_2$  são conjuntos, e  $A = \{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| : \mathbf{x}_1 \in K_1, \mathbf{x}_2 \in K_2\}$ .

- (1)  $K_1$  e  $K_2$  fechados implica em  $A$  compacto.
- (2)  $K_1$  e  $K_2$  fechados implica em  $A$  fechado.
- (3)  $K_1$  compacto e  $K_2$  fechado implica em  $A$  fechado.

*Exercício 3.* Mostre que se  $A \subset \mathbb{R}$  não vazio e limitado, e  $s = \sup A$ , então existe sequência em  $A$  convergindo para  $s$ .