ANÁLISE I – FGV
TERCEIRA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **12 de fevereiro de 2014**

Exercício 1. Seja $(\mathbf{x}_k)$ sequência em $\mathbb{R}^n$ convergente para $\mathbf{x}$. Mostre que $\{\mathbf{x}_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbf{x}\}$ é compacto.

Exercício 2. Seja $(\mathbf{x}_k)$ sequência em $\mathbb{R}^n$ limitada, e tal que toda subsequência convergente converge para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Mostre que $(\mathbf{x}_k)$ converge para $\mathbf{x}$.

Exercício 3. Seja $(\mathbf{x}_k)$ sequência de Cauchy contendo uma subsequência convergente para $\mathbf{x}$. Mostre que $(\mathbf{x}_k)$ converge para $\mathbf{x}$.

OBS: Não pode usar que toda sequência de Cauchy converge (a menos que você demonstre este fato).

Exercício 4. Dizemos que uma sequência $(\mathbf{x}_j)$ no $\mathbb{R}^n$ tem *variação limitada* se a sequência (v_k) de reais definida por

$$v_k = \sum_{i=1}^{k} \|\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i\|$$

converge. Mostre que toda sequência de variação limitada é convergente.

Exercício 5. Seja F um conjunto fechado em $\mathbb{R}^n$ não vazio, e seja $\mathbf{y} \notin F$. Mostre que existe $\mathbf{x}^* \in F$ tal que $\|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}\| = \inf\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{x} \in F\}$.

Exercício 6. Seja (x_k) sequência monótona em $\mathbb{R}$, e suponha que (x_k) contenha subsequência convergente. Mostre que (x_k) converge.