ANÁLISE I – FGV
QUINTA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **27 de março de 2013**

Exercício 1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto e com a seguinte propriedade: existe $\mathbf{x}_* \in \Omega$ tal que para todo $\mathbf{x} \in \Omega$, a reta $S_{\mathbf{x}} = \{t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{x}_* : t \in [0,1]\}$ está contida em Ω, i.e., $S_{\mathbf{x}} \subset \Omega$. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ função diferenciável em Ω e tal que todas as derivadas parciais de $f(\mathbf{x})$ são nulas, para todo $\mathbf{x} \in \Omega$. Mostre que f é constante.

Exercício 2. Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ compacto, e A° o conjunto dos pontos interiores de A. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável, com derivadas contínuas em A°, e f contínua em A. Suponha ainda que f se anule em toda a fronteira de A, e que f'' seja negativa definida para todo ponto em A°. Mostre que $f(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \in A^\circ$.

Exercício 3. Sejam as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciáveis, com as segundas derivadas contínuas. Suponha que o zero seja ponto de mínimo estrito de f e g, e que $f(0) = g(0) = 1$. Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x,y) = f(x)g(y)$. O que podemos afirmar sobre a Hessiana de φ em $(0,0)$ (nada pode ser afirmado, ela é indefinida, positiva definida, positiva semi-definida, negativa definida, etc)? O que podemos afirmar sobre o ponto $(0,0)$ em relação à φ (nada pode ser afirmado, é ponto de máximo, de máximo estrito, de mínimo, de mínimo estrito, de sela, etc)? Justifique suas respostas.

Exercício 4. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ diferenciável em $\mathbf{x} \in \Omega$. Seja $\nabla f(\mathbf{x}) = (\partial f/\partial x_1, \dots, \partial f/\partial x_m)(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$. Supondo que $\mathbf{x}$ não é ponto crítico de f, mostre que a derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$ atinge seu máximo quando $\mathbf{u} = c \nabla f(\mathbf{x})$ para algum $c > 0$. O vetor ∇f é chamado de *vetor gradiente de* f, e dá a direção de "maior crescimento" da função f no ponto $\mathbf{x}$.