ANÁLISE I – FGV
QUARTA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **20 de março de 2013**

Exercício 1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = 0$. Mostre então que $g(x) = |f(x)|$ é diferenciável em c se e somente se f é diferenciável em c e $f'(c) = 0$.

Exercício 2. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é absolutamente contínua se, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, dados $N \in \mathbb{N}$ e intervalos $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$ em [0,1], disjuntos e tais que

$$\sum_{k=1}^{N} |y_k - x_k| < \delta,$$

tem-se que $\sum_{k=1}^{N} |f(y_k) - f(x_k)| < \epsilon$. Mostre que f absolutamente contínua implica em f uniformemente contínua. Mostre que se f é diferenciável em $[0, 1]$ com derivada contínua então f é absolutamente contínua.

Exercício 3. Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ quatro vezes diferenciável, com a quarta derivada contínua, numa vizinhança aberta de $x \in I$. Mostre então que existem constantes positivas δ e c tal que

$$\left| f''(x) - \frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2} \right| \leq ch^2,$$

para todo $0 < h < \delta$. Mostre que a constante c pode ser escolhida independentemente de h. A forma acima é utilizada para aproximar $f''(x)$, quando f é suave.

Exercício 4. Mostre que dados quaisquer x, $y \in \mathbb{R}$ fixados, o resto da série de Taylor com n termos da função $\cos x$ centrada em x e calculada em y converge para zero quando $n \to +\infty$.

Exercício 5. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em A, com a segunda derivada contínua, onde $A \subseteq \mathbb{R}$ aberto, e $x \in A$ ponto crítico de f tal que $f''(x) \neq 0$ (são chamados de *não degenerados*). Mostre que existe uma vizinhança aberta de x tal que x é o único ponto crítico.

Exercício 6. Sejam f e A como no exercício 5. Mostre que cada compacto contido em A contém um número finito de pontos críticos não degenerados.