ANÁLISE I – FGV
SEXTA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **20 de março de 2012**

Exercício 1. Suponha que $I \subseteq \mathbb{R}$ seja um intervalo, e $c \in I$. Mostre que f é diferenciável em c com derivada L se e somente se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in I,\ |x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c) - L(x - c)| < \epsilon.$$

Exercício 2. Seja $a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diferenciável em $[a, b]$. Mostre que se $f'(a) > 0$ e $f'(b) < 0$, então existe $x \in (a, b)$ tal que $f'(x) = 0$.

Exercício 3. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ diferenciável em $\mathbf{x}_0 \in \Omega$. Mostre que f é conínua em $\mathbf{x}_0$.

Exercício 4. Mostre que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{para } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{para } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

tem todas as derivadas direcionais em $(0, 0)$, mas que f não é diferenciável no $(0, 0)$.

Exercício 5. Sejam $a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diferenciável em $c \in (a, b)$. Mostre que

$$f'(c) = \lim_{t \to 0} \frac{f(c + t) - f(c - t)}{2t}.$$

Apresente um exemplo onde a existência do limite acima não implica na existência da derivada.

Exercício 6. Ache a menor distância do ponto $(2, 1, -3)$ ao plano $2x + y - 2z = 4$.