ANÁLISE I – FGV
QUINTA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **13 de março de 2012**

Exercício 1. Sejam f, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Mostre que o conjunto $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : f(\mathbf{x}) > g(\mathbf{x})\}$ é aberto em $\mathbb{R}^m$.

Exercício 2. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ é aberto. Mostre que f é contínua em Ω se e somente se $f^{-1}((\alpha, +\infty))$ e $f^{-1}((-\infty, \alpha))$ são abertos para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercício 3. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(0) < 0$ e $f(1) > 0$. Mostre que se $s = \sup\{x \in [0,1] : f(x) < 0\}$, então $f(s) = 0$.

Exercício 4. Mostre que se $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ são uniformemente contínuas, então $f + g$ é uniformemente contínua. Mostre que, mesmo que f seja limitada, a função fg não é necessariamente uniformemente contínua.

Exercício 5. Mostre que o produto de duas funções uniformemente contínuas e limitadas é função uniformemente contínua.

Exercício 6. Suponha $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uniformemente contínua em Ω. Mostre que podemos definir $\bar{\mathbf{f}} : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ tal que $\bar{\mathbf{f}}$ seja contínua em $\bar{\Omega}$, e $\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \Omega$. Neste caso dizemos que $\bar{\mathbf{f}}$ é uma *extensão contínua* de $\mathbf{f}$.