ANÁLISE I – FGV
PRIMEIRA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **24 de janeiro de 2012**

Exercício 1. Mostre que uma função tem inversa se e somente se ela é uma bijeção.

Exercício 2. Seja $\lambda < 1$ e $n \in \mathbb{N}$. Mostre que

$$\sum_{i=n}^{k} \lambda^i = \lambda^n \frac{1-\lambda^{k-n+1}}{1-\lambda}$$

para todo inteiro $k \geq n$.

Exercício 3. Mostre que dado um conjunto não vazio $X \subseteq \mathbb{N}$, existe $a \in X$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$.

Exercício 4. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ e as funções $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : A \to \mathbb{R}$ sejam tais que os conjuntos $f(A)$ e $g(A)$ sejam limitados superiormente. Defina a função $f+g : A \to \mathbb{R}$ por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$. Mostre que $\sup(f+g)(A) \leq \sup f(A) + \sup g(A)$. Dê um exemplo em que a desigualdade é estrita.

Exercício 5. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ não vazio, e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(\mathbf{x}) = \inf\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{y} \in A\}.$$

Mostre que f está bem definida. Construa entretanto um exemplo onde não exista $\mathbf{y} \in A$ tal que $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, para algum $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Exercício 6. Mostre que dados x, $y \in \mathbb{R}$ com $x < y$, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.

Exercício 7. Mostre que

$$\|T\|_{\mathcal{L}(V_1,V_2)} = \sup\left\{ \frac{\|T\mathbf{x}\|_{V_2}}{\|\mathbf{x}\|_{V_1}} : \mathbf{x} \in V_1,\, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \right\}$$

define uma norma em $\mathcal{L}(V_1, V_2)$.