ANÁLISE I – FGV
GABARITO DA PRIMEIRA PROVA

Prof. Alexandre Madureira
Data: **06 de fevereiro de 2011**
Tempo de prova: **2 horas e 30 minutos**
Valor total da prova: 10.8 pontos.

1- (2.0 pontos) Prove que, para todo inteiro $n > 1$ tem-se que

$$1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

Solução: Prova por indução. Para $n = 2$ temos que

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} > \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Suponha agora que a desigualdade valha para $n = N^*$:

$$1 + \sum_{i=2}^{N^*} \frac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{N^*}. \tag{1}$$

Então, para $n = N^* + 1$, temos que

$$1 + \sum_{i=2}^{N^*+1} \frac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{N^*} + \frac{1}{\sqrt{N^*+1}}$$

por (1). Logo,

$$1 + \sum_{i=2}^{N^*+1} \frac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{N^*} + \frac{1}{\sqrt{N^*+1}} = \frac{\sqrt{N^*(N^*+1)}+1}{\sqrt{N^*+1}} > \frac{N^*+1}{\sqrt{N^*+1}} = \sqrt{N^*+1}.$$

2- (2.0 pontos) Mostre que se $A \subset \mathbb{R}$ é não vazio e limitado, e $s = \sup A$, então existe sequência de pontos em A convergindo para s.

Solução: Como s é supremo, então, para todo $k \in \mathbb{N}$, o número $s - 1/k$ não é cota superior de A. Logo, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $x_k \in A$ tal que $x_k > 1 - 1/k$. Como s é supremo de A, então $x_k \le s$, pois $x_k \in A$. Para mostrar que a sequência definida por (x_k) converge para s, note que dado $\epsilon > 0$ existe $K^* \in \mathbb{N}$ tal que $1/K^* < \epsilon$. Logo, se $k > K^*$, então $|x_k - s| < 1/k < 1/K^* < \epsilon$.

3- (2.0 pontos) Mostre que a interseção de um número finito de conjuntos abertos em $\mathbb{R}^n$ é aberta. Prove ou apresente um contra-exemplo para a afirmativa seguinte:

Interseções infinitas de abertos são sempre abertas.

Solução: ver Lema 2.3.2. Para contra-exemplo, tome $I_k = (-1/k, 1)$, onde $k \in \mathbb{N}$. Então $\cap_{k\in\mathbb{N}} I_k = [0, 1)$. De fato, $[0, 1) \subseteq I_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, e portanto $[0, 1) \subseteq \cap_{k\in\mathbb{N}} I_k$. Seja agora $x \in \cap_{k\in\mathbb{N}} I_k$. Então $x \in I_1 = (-1, 1)$. Falta mostrar que $x \geq 0$. Se $x \in (-1, 0)$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $-1/K > x$ e portanto $x \notin I_K$. Logo x é positivo.

4- (2.0 pontos) Seja $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Mostre que as afirmativas abaixo são equivalentes:

(1) K é compacto
(2) toda sequência contida em K possui subsequência convergente com limite pertencendo a K.

0.8 ponto extra se resolver o exercício acima sem usar o Teorema de Heine–Borel (a menos que você demonstre as propriedades de Heine Borel que for usar).

Solução: Usando Heine–Borel.

Suponha que K seja compacto, e portanto fechado e limitado (por Heine–Borel). Seja $(\mathbf{x}_k)$ sequência em K. Então $(\mathbf{x}_k)$ é limitada, e por Bolzano–Weierstrass, $(\mathbf{x}_k)$ possui subsequência $(\mathbf{x}_{k_i})$ convergente. Seja $\mathbf{x} = \lim_{i\to\infty}(\mathbf{x}_{k_i})$. Como K é fechado, todos os limites de sequências em K que são convergentes pertencerão a K. Logo $\mathbf{x} \in K$.

Suponha agora que (2) valha. Então, se K não fosse limitado, para todo $k \in \mathbb{N}$, existiria $\mathbf{x}_k \in K$ tal que $\|\mathbf{x}_k\| > k$. Mas toda subsequência $(\mathbf{x}_{k_i})$ de $(\mathbf{x}_k)$ é não limitada pois $\|\mathbf{x}_{k_i}\| > k_i > i$. Logo $(\mathbf{x}_{k_i})$ não converge, contrariando (2). Logo K é limitado. Para provar que K é fechado, seja $(\mathbf{x}_k)$ sequência em K que seja convergente. Seja $\mathbf{x}$ seu limite. Por (2), $(\mathbf{x}_k)$ possui subsequência $(\mathbf{x}_{k_i})$ convergente, com limite pertencendo a K. Mas $(\mathbf{x}_{k_i})$ também converge para $\mathbf{x}$, pois é subsequência de sequência convergente para $\mathbf{x}$. Portanto $\mathbf{x} \in K$.

5- (2.0 pontos) Seja $(\mathbf{x}_i)$ sequência em $\mathbb{R}^n$ tal que $\|\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i\| < c_i$. Seja $S_i = \sum_{k=1}^{i} c_k$ e suponha que a sequência (S_i) seja convergente. Mostre que $(\mathbf{x}_i)$ é convergente.

Solução: Seja $\epsilon > 0$. Como (S_i) é convergente, então é de Cauchy. Logo, existe $J \in \mathbb{N}$ tal que

$$i, j > J \implies |S_i - S_{j-1}| < \epsilon.$$

Sejam $i, j > J$. Sem perda de generalidade, suponha $i > j$. Logo,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| \leq \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}\| + \cdots + \|\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j\| \leq \sum_{k=j}^{i} c_k = \sum_{k=1}^{i} c_k - \sum_{k=1}^{j-1} c_k \\ = S_i - S_{j-1} \leq |S_i - S_{j-1}| < \epsilon.\end{aligned}$$

Portanto $(\mathbf{x}_i)$ é de Cauchy e então converge.