ANÁLISE I – FGV
SEXTA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **22 de março de 2011**

Exercício 1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{para } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{para } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Mostre que a derivada direcional de f em $(0,0)$ com respeito a $\mathbf{u} = (a,b)$ existe e que

$$D_{\mathbf{u}} f(0,0) = \frac{b^2}{a}, \qquad \text{se } a \neq 0.$$

Mostre que f não é contínua e portanto não é diferenciável no $(0,0)$.

Exercício 2. Seja $Q = (0,1) \times (0,1)$. Suponha que $f : Q \to \mathbb{R}$, e $g : Q \to \mathbb{R}$ sejam diferenciáveis em Q. Mostre que se $\mathbf{f}'(x) = \mathbf{g}'(x)$ para todo $\mathbf{x} \in Q$, então existe constante c tal que $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + c$ para todo $\mathbf{x} \in Q$.

Exercício 3. Seja $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ e $f : B \to \mathbb{R}$ função contínua em B, diferenciável no interior de B e tal que $f \equiv 0$ na fronteira de B. Mostre que f tem ponto crítico no interior de B.

Exercício 4 (Mínimos Quadrados). Considere para $i = 1, \dots, n$ os pontos $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, e seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $p(x) = ax^2 + bx + c$ tal que a, b e c minimizam o erro $\sum_{i=1}^n |p(x_i) - y_i|^2$. Mostre que a, b e c satisfazem as equações

$$a\sum_{i=1}^n x_i^4 + b\sum_{i=1}^n x_i^3 + c\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i,$$
$$a\sum_{i=1}^n x_i^3 + b\sum_{i=1}^n x_i^2 + c\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$
$$a\sum_{i=1}^n x_i^2 + b\sum_{i=1}^n x_i + cn = \sum_{i=1}^n y_i.$$

Exercício 5. Mostre, usando o Teorema 5.4.3, que $(0,0)$ é ponto de sela de $f(x,y) = x^2 - y^2$, e ponto de mínimo estrito local de $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Exercício 6. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ diferenciável em $\mathbf{x} \in \Omega$. Seja $\nabla f(\mathbf{x}) = (\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_m)(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$. Supondo que $\mathbf{x}$ não é ponto crítico de f, mostre que a derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$ atinge seu máximo quando $\mathbf{u} = c \nabla f(\mathbf{x})$ para algum $c > 0$. O vetor ∇f é chamado de *vetor gradiente de* f, e dá a direção de "maior crescimento" da função f no ponto $\mathbf{x}$.