ANÁLISE I – FGV
QUINTA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **15 de março de 2011**

Exercício 1. Seja $B \subseteq \mathbb{R}^m$ limitado, e $\boldsymbol{f} : B \to \mathbb{R}^n$ uniformemente contínua. Mostre que $\boldsymbol{f}$ é limitada em B. Mostre que esta conclusão não é necessariamente verdadeira se B não for limitado.

Exercício 2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Calcule $f'(0)$.

Exercício 3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - c_i)^2,$$

onde $c_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \ldots, n$, e $n \in \mathbb{N}$. Ache um ponto de mínimo local de f. Mostre que é único.

Exercício 4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é injetiva.

Exercício 5. Seja I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável. Mostre que se f' é positiva em I, i.e., $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é estritamente crescente.

Exercício 6. Sejam $a < b$ números reais, e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). Mostre que entre duas raízes consecutivas de f' existe no máximo uma raiz de f.