ANÁLISE I – FGV
QUARTA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **01 de março de 2011**

Exercício 1. Seja $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Mostre que as afirmativas abaixo são equivalentes:

(1) K é compacto

(2) toda sequência contida em K possui subsequência convergente com limite contido em K.

Exercício 2. Seja $x_1 \in [0, +\infty)$, e seja a sequência de reais definida por

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n} \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Determine para quais valores de $x_1 \in [0, +\infty)$ a sequência (x_n) converge, e para qual valor. Demonstre suas afirmativas. (*Obs: Para toda sequência convergente* (y_n)*, vale a propriedade* $\lim_{n\to\infty} \sqrt{y_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} y_n}$.)

Exercício 3. Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ contínua em $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, e $f(\mathbf{x}) > 0$. Mostre que existe uma vizinhança aberta de $\mathbf{x}$ tal que f seja estritamente positiva.

Exercício 4. Mostre que toda contração é uma função contínua.

Exercício 5. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(0) < 0$ e $f(1) > 0$. Mostre que se $s = \sup\{x \in [0, 1] : f(x) < 0\}$, então $f(s) = 0$.

Exercício 6. Sejam $a < b$ números reais, e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que dado $\epsilon > 0$, existem $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ tais que se $x, y \in [a_{i-1}, a_i]$ para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$, então $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.