ANÁLISE I – FGV
SEGUNDA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **01 de fevereiro de 2011**

Exercício 1. Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$, e denote por interior de A o conjunto A° de pontos interiores de A. Mostre que

(1) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$
(2) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$
(3) Se $B \subseteq A$ e B é aberto, então $B \subseteq A^\circ$ (i.e. A° é o "maior" aberto contido em A)

Exercício 2. Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Chamamos de *fecho de* A, e denotamos por $\bar{A}$, a interseção de todos os fechados que contenham A. Mostre que $\mathbf{x} \in \bar{A}$ se e somente se $\mathbf{x}$ é ponto de interior ou de fronteira da A.

Exercício 3. Demonstre o Corolário 2.3.7 das notas de aula (que afirma que $F \subseteq \mathbb{R}^n$ *é fechado se e somente se contém todos os seus pontos de fronteira.*

Exercício 4. Apresente dois subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ em que o conjunto dos pontos de fronteira seja vazio. Mostre que no existe nenhum outro subconjunto do $\mathbb{R}^n$ com estas características.

Exercício 5. Mostre que um ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é ponto de acumulação de A se e somente se toda vizinhança aberta de $\mathbf{x}$ contém infinitos pontos de A.

Exercício 6. Mostre que se $F \neq \emptyset$ é fechado em $\mathbb{R}^n$, e $\inf\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{y} \in F\} = 0$, então $\mathbf{x} \in F$.